① 四种典型方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \\ u(0,t)=u(l,t)=0 \ // \ u_x(0,t)=u_x(l,t)=0 \ // \ u(0,t)=u_x(l,t)=0 \ // \ u_x(0,t)=u(l,t)=0 \\ u(x,0)=\varphi(x) \quad u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

（这4种方程加结论（本征值，本征函数，求解公式）可以做为记忆公式，简化计算量）.

② 极坐标系下 $\Delta_2 u=0$ 边值.

$$u(r,\theta)=A_0+B_0\ln r+\sum_{k=1}^{+\infty}(A_kr^k+B_kr^{-k})(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta)$$

做为记忆，注意圆内域（$r\to 0$ 有界）. 圆外域（$r\to\infty$ 有界）. 圆环域.

（计算时注意对应项计算会比较简单）.

③ S-L理论与S-L定理.

$$b_0(x)y''(x)+b_1(x)y'(x)+b_2(x)y(x)+\lambda y(x)=0$$

转化为

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0$$

其中：$\rho(x)=\dfrac{1}{b_0(x)}\exp\left\{\int\dfrac{b_1(x)}{b_0(x)}dx\right\}$

$$k(x)=\rho(x)b_0(x) \qquad -q(x)=\rho(x)b_2(x)$$

（$k(x)$. $k'(x)$. $\rho(x)$ 在 $[a,b]$ 连续；$k(x)>0$. $\rho(x)>0$. $q(x)\geqslant 0$ $x\in(a,b)$）

（a. b 至多是 $k(x)$. $\rho(x)$ 的1级零点）

（$q(x)$ 在 (a,b) 连续. 在端点至多1级极点.）

满足下列条件：

① 端点 $x=a$ 有 $k(a)\neq 0$ 并在该端点附加三类边界（齐次）条件：

$$[\alpha y'(x)+\beta y(x)]_{x=a}=0$$

② 端点 $x=a$ 有 $k(a)=0$，$k'(a)\neq 0$ 且 $|y(a)|<+\infty$

③ 端点 $x=a$ 和 $x=b$ 有 $k(a)=k(b)$ 且 $\underbrace{y(a)=y(b),\ y'(a)=y'(b)}_{\text{周期性条件}}$

则有下列性质

① 可数性

※ ② 非负性：$\lambda_n\geq 0$.　$\lambda=0 \Leftrightarrow q(x)\equiv 0$，端点都不取第一、三类边界条件.

③ 正交性.

④ 完备性.

④ 非齐次问题.

（1）边界条件是齐次的，方程非齐次　（若非齐次不依赖 t，则可用 (2) 方法）.

1）初始条件为零：冲量原理（齐次化原理）/ 本征函数展开法

2）初始条件非零：叠加原理. $\begin{cases}\text{齐次方程} + \text{非零初始}\\ \text{非齐次方程} + \text{零初始}\end{cases}$

（2）边界条件是非齐次的，方程是齐次的.

引入未知 $v(x,t)$ 和辅助 $w(x,t)$，使 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$.

适当选择 $w(x,t)$，使关于 $v(x,t)$ 的方程边界条件齐次化。

通常选 $w(x,t) = A(t)x + B(t)$

$w(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$. [原定解条件均为第二类]

⑤ 泊松方程.

叠加原理. $u(x,y,z) = w(x,y,z) + \underbrace{v(x,y,z)}_{\text{特解}}$

（注意要用直角坐标求出特解. 如例本章习题11题）.

第二章其它问题小结：

① 求固有函数，尤其是涉及正余弦时一定要仔细，防止正余弦搞反.

② 圆内稳定问题，泊松方程和齐次化后问题，利用对应项系数求解会加快解题速度（本章4题. 11题）.

③ 上述问题注意圆内. 圆外还是圆环问题.

④ 对于非齐次问题，特解法去除非齐次化解题会提高效率.

（本章第10题. (1) 特解 $v(x,t) = u_0$（常数）.

(3) 特解 $v(x,t) = -\frac{A}{4}\left[e^{-2x} - \frac{x}{l}(e^{-2l}+1) - 1\right]$（仅与 x 有关）

(5) 特解 $v(x,t) = -\frac{1}{2}gx^2 + (gl+E)x$（仅与 x 有关））.

⑤ 本章的各类级数积分是锻炼计算能力的，希望大家重视.

① 贝塞尔函数

(1) 推导过程简单熟悉

(2) $J_\nu(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\dfrac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$.

(3) 对于方程 $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \quad (\nu\geqslant 0)$

通解是 $y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2N_\nu(x)$.

② 母函数 $e^{\frac{x}{2}(\zeta-\zeta^{-1})}=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\zeta^n \quad (0<|\zeta|<+\infty)$

积分表示 $J_n(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)\,d\theta$

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\{i(x\sin\theta-n\theta)\}\,d\theta.$$

③ 性质: (1) $J_n(x+y)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}J_k(x)J_{n-k}(x)$.

微分关系 (2) $\dfrac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right)=x^\nu J_{\nu-1}(x)$; $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\dfrac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$

(3) $J_\nu'(x)=J_{\nu-1}(x)-\dfrac{\nu}{x}J_\nu(x)$; $J_\nu'(x)=\dfrac{\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu+1}(x)$.

递推关系 (4) $J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\dfrac{2\nu}{x}J_\nu(x)$; $J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=2J_\nu'(x)$

④ 渐近公式. 衰减振荡性和零点.

⑤ 贝塞尔方程的固有值问题.

对于 $f(x)$. 由 S-L (完备性) 展开成 Fourier - Bessel 级数.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n J_\nu(\omega_n x).$$

$$f_n=\frac{1}{N_\nu^2}\int_0^a x f(x) J_\nu(\omega_n x)\,dx.$$

模的平方由边界条件决定. (记为 $N_{\nu 1}^2$, $N_{\nu 2}^2$. $N_{\nu 3}^2$)

(1) 第一类边界条件 $\Rightarrow J_\nu(\omega a)=0$.

$$N_{\nu 1}^2=\frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega a)$$

(2) 第二类边界条件 $\Rightarrow J_\nu'^2(\omega a)=0$.

$$N_{\nu 2}^2=\frac{1}{2}\left[a^2-\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]J_\nu^2(\omega a).$$

(3) 第三类边界条件 ($\alpha y(a)+\beta y'(a)=0$) $\Rightarrow J_\nu'(\omega a)=-\frac{J_\nu(\omega a)}{\omega h}$ $\left(h=\frac{\alpha}{\beta}\right)$

$$N_{\nu 3}^2=\frac{1}{2}\left[a^2-\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2+\left(\frac{a}{\omega h}\right)^2\right]J_\nu^2(\omega a).$$

Bessel 部分小结:

① 灵活运用 Bessel 函数的各类性质.

② Bessel 固有值问题的衍生题型:

(1) Fourier - Bessel 级数展开. (参见 270 页例 1).

(2) 定解问题求解 (参见 268 页书中推导. 及 271 页例 2)