第一章 命题逻辑

命题：有真假的陈述句

联结词： $\neg$ $\vee$ $\wedge$ $\rightarrow$ $\longleftrightarrow$

否定 析取 合取 蕴涵 等值

复合命题：含联结词的命题

任何命题符号是公式，称为原子公式

X为全体命题符号的集合，则命题语言(全体命题公式的集合)记为$L(X)$

$X_n=\{x_1,\cdots,x_n\}$ $L(X_n)$ $\vdash$：形式证明

(L1) $p\rightarrow(q\rightarrow p)$

(L2) $(p\rightarrow(q\rightarrow r))\rightarrow((p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r))$

(L3) $(\neg p\rightarrow\neg q)\rightarrow(q\rightarrow p)$

(MP) 从p和$p\rightarrow q$推出q

L的性质：

① 单调性. 若$\Gamma\subseteq\Gamma'$且$\Gamma\vdash p$则$\Gamma'\vdash p$；若$\vdash p$则对任何Γ，$\Gamma\vdash p$

② 紧致性. 若$\Gamma\vdash p$，则存在有穷$\Delta\subseteq\Gamma$，使得$\Delta\vdash p$

③ 一致.相容.无矛盾. 若存在公式p使得$\Gamma\vdash p$且$\Gamma\vdash\neg p$，则称Γ不一致.矛盾.不相容

否则称Γ一致.相容.无矛盾

④ 平凡性. 若Γ是不一致的，则对任何公式p有$\Gamma\vdash p$

⑤ 演绎定理 $\Gamma\cup\{p\}\vdash q$当且仅当$\Gamma\vdash p\rightarrow q$

假设三段论. HS $\{p\rightarrow q,q\rightarrow r\}\vdash p\rightarrow r$

1101C-08 201412·2500

中国科学技术大学

反证律 若$\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash q$且$\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash\neg q$,则$\Gamma\vdash p$

归谬论 若$\Gamma\cup\{p\}\vdash q$且$\Gamma\cup\{p\}\vdash\neg q$,则$\Gamma\vdash\neg p$

双重否定律 $\{\neg\neg p\}\vdash p$; $\vdash\neg\neg p\to p$; $\{p\}\vdash\neg\neg p$; $\vdash p\to\neg\neg p$

子公式: 称一个公式q是公式p的子公式,如果q在p中出现

如x_1是x_1, $\neg x_1$, $x_1\to x_2$的子公式 $\neg(x_1\to x_2)$是$x_1\to\neg(x_1\to x_2)$子公式

重要结论:

同一律 $\vdash p\to p$

否定前件律 $\vdash\neg q\to(q\to p)$

否定肯定律 $\vdash(\neg p\to p)\to p$

换位律 $\vdash(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$

可证等价替换规则: 设q是p的子公式, q'是任意公式, p'是用q'替换p中的所得公式。若$\vdash q\to q'$且$\vdash q'\to q$, 则$\vdash p\to p'$且$\vdash p'\to p$

$p\vee q=_{def}\neg p\to q$

$p\wedge q=_{def}\neg(p\to\neg q)$

$p\leftrightarrow q=_{def}(p\to q)\wedge(q\to p)$

命题1

① $\vdash p\to(p\vee q)$

② $\vdash q\to(p\vee q)$

③ $\vdash(p\vee q)\to(q\vee p)$

④ $\vdash(p\vee p)\to p$

⑤ $\vdash\neg p\vee p$ 排中律

1101C-08 201412·2500

命题2

① $\vdash (p \wedge q) \to p$

② $\vdash (p \wedge q) \to q$

③ $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$

④ $\vdash p \to (p \wedge p)$

⑤ $\vdash p \to (q \to (p \wedge q))$

⑥ $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$ 矛盾律

命题3

① $\vdash (p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$

② $\vdash (p \leftrightarrow q) \to (q \to p)$

③ $\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

④ $\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$

⑤ $\vdash (p \to q) \to ((q \to p) \to (p \leftrightarrow q))$

De.Morgan律

① $\vdash \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

② $\vdash \neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

指派.命题变元的解释：$L(X)$的一个指派是一个映射 $v_0: X \to \{t, f\}$

赋值.联结词解释原则：$L(X)$的一个赋值v是一个满足下列条件的映射：

(1) $v(\neg)$是一个函数$\{t,f\} \to \{t,f\}$，规定$\neg$为一个一元真值函数

(2) $v(\to)$是一个函数$\{t,f\}^2 \to \{t,f\}$，解释为二元真值函数

即联结词解释为真值函数(定义域.值域)都是$\{t,f\}$的函数

标准赋值是满足下列条件的赋值v：

(1) $v(\neg) = f_\neg$，$f_\neg$定义如下

x_i	$f_\neg(x_i)$
t	f
f	t

(2) $v(\to) = f_\to$，$f_\to$定义如下

$x_1 \backslash x_2$ ($x_1 \to x_2$)	t	f
t	t	f
f	t	t

1101C-08 201412·2500

$L(X)$的一个标准解释$I=(V_0, V)$是由一个指派V_0和标准赋值V组成的映射$I: L(X)\to\{t,f\}$，满足

① 对任何命题变元x，$I(x)=V_0(x)$

② 对任意公式p，$I(\neg p)=V(\neg)I(p)=f_\neg(I(p))=\begin{cases} t, & I(p)=f \\ f, & I(p)=t \end{cases}$

③ 对任意公式p,q，$I(p\to q)=V(\to)(I(p),I(q))$

$$=f_\to(I(p),I(q))$$

$$=\begin{cases} f, & I(p)=t \text{ 且 } I(q)=f \\ t, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$x_1 \backslash x_2$	t	f
t	t	f
f	f	f

$I(x_1\wedge x_2)$

$x_1 \backslash x_2$	t	f
t	t	t
f	t	f

$I(x_1\vee x_2)$

$x_1 \backslash x_2$	t	f
t	t	f
f	f	t

$I(x_1\leftrightarrow x_2)$

每一个公式在语义中解释为一个真值函数

若p只有成真(成假)指派则称重言式(矛盾式)，若p同时有成真和成假指派，称为偶然式

语义后承，逻辑推论：任给公式集Γ，公式p，称p为Γ的一个语义后承，记为$\Gamma\models p$，如果对L的所有解释I，只要Γ中每一个公式q满足$I(q)=t$，则$I(p)=t$

性质：① 若$\Gamma\subseteq\Gamma'$且$\Gamma\models p$则$\Gamma'\models p$

② 若$\Gamma\models p$且$\Gamma\models p\to q$则$\Gamma\models q$

③ $\Gamma\models p\to q$，当且仅当$\Gamma\cup\{p\}\models q$

④ p是重言式，当且仅当$\phi\models p$（记为$\models p$）

$L(X)$中公式之间的逻辑关系
- p与q互可推：$\{p\}\models q$且$\{q\}\models p$
- q从p可推：$\{p\}\models q$且$\{q\}\not\models p$
- p与q互不可推：$\{p\}\not\models q$且$\{q\}\not\models p$

逻辑等值：$\models p\leftrightarrow q$

性质：$\models p\leftrightarrow q$当且仅当对所有解释$I$：$I(p\leftrightarrow q)=t$　$\models$定义

$I((p\to q)\wedge(q\to p))=t$　$\leftrightarrow$定义

$\forall I$：$I(p\to q)=t$ & $I(q\to p)=t$　　$I(p\to q)=I(q\to p)=t$　$\wedge$解释

$(\forall I: I(p\to q)=t)$ & $(\forall I: I(q\to p)=t)$　　$I(p\to q)=t$并且对所有解释I：$I(q\to p)=t$

$\models p\to q$且$\models q\to p$　$\models$定义

$\{p\}\models q$且$\{q\}\models p$　语义演绎定理

若p与q逻辑等值，则对任何指派v_0，v_0是p的成真(成假)指派，当且仅当v_0是q的成真(成假)指派；反之亦然。

两公式逻辑等值，则它们在语义上是"不可分辨的"　语义相同语法可能不同

一个公式$p\in L(X)$在语义上代表一个真值函数$f_p\{t,f\}^n\to\{t,f\}$

$\models p\leftrightarrow q$当且仅当$f_p=f_q$

性质
① $\models p\leftrightarrow p$　自反
② $\models p\leftrightarrow q\Rightarrow\models q\leftrightarrow p$　对称
③ $\models p\leftrightarrow q$且$\models q\leftrightarrow r\Rightarrow\models p\leftrightarrow r$　传递

(①②③：等价)

④ $\models p\leftrightarrow q\Leftrightarrow\models\neg p\leftrightarrow\neg q$　　$\models p\leftrightarrow(p\wedge(\neg q\vee q))$

$\models p\leftrightarrow(p\vee(\neg q\vee q))$　吸收律

1101C-08 201412·2500

定义 $L(X)$ 上的一个等价关系 $R_{\leftrightarrow}$ 为 $\vDash P\leftrightarrow q$，由 $R_{\leftrightarrow}$ 可得 $L(X)$ 的一个划分，使得每个子集是一个等价类。每个等价类有唯一的真值函数

$L(X_n)$，$X_n=\{x_1,\cdots,x_n\}$，$L(X_n)$ 有 2^{2^n} 个等价类，有一个重言式集，有一个矛盾式集，其他为偶然式集

命题变元和命题变元的否定称为文字，文字的析取式 $l_1\vee l_2\vee\cdots\vee l_k$ 称为基本析取式或子句，子句的合取式称为合取范式，设 l_{ij} 是文字，

则合取范式形为 $(l_{11}\vee\cdots\vee l_{1k_1})\wedge\cdots\wedge(l_{m1}\vee\cdots\vee l_{mk_m})$　合取：$\wedge$

析取范式形为 $(l_{11}\wedge\cdots\wedge l_{1k_1})\vee\cdots\vee(l_{m1}\wedge\cdots\wedge l_{mk_m})$　析取：$\vee$

若 q 是一个合取(析取)范式且 $\vDash p\leftrightarrow q$，则称 q 为 p 的一个合取(析取)范式

求 p 的范式步骤：① 消去 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ (用 $\leftrightarrow$, $\vee$ 的定义)

② $\neg$ 深入(用双否律, De. Morgan 律)

③ 整理(用交换律, 分配律…)

主范式：q 中每个命题变量在 p 的每个基本析取(合取)式中都按下标由小到大的次序出现且仅出现一次

每个非矛盾(非重言)式有唯一的主析取(合取)范式

命题演算的可靠性：$\Gamma\vdash p\Rightarrow\Gamma\vDash p$

完全性：$\Gamma\vDash p\Rightarrow\Gamma\vdash p$

若 p 是 L 的公理，则 $\vDash p$

相容集：对任何 $\Gamma\subseteq L(X)$，若存在 $p\in L(X)$ 使 $\Gamma\vdash p$ 且 $\Gamma\vdash\neg p$，称 Γ 是不相容的(不一致的)；否则称 Γ 为相容(一致)的。

1101C-08 201412·2500

中国科学技术大学

极大相容集：若Γ相容，且对任何$q \in L(X)$有$\Gamma \vdash q$或$\Gamma \vdash \neg q$，则称Γ为极大相容集　推理能力的极大

直接证明
简化证明
仅语义证明
} 不可用可靠性完全性.

随变证明：语法、语义证明可互换(证明要注明由可靠性或完全性)

1101C-08 201412·2500