第二章　一阶逻辑

L, $L(X)$：原子命题＋联结词

一阶谓词演算K：

逻辑符号：个体变元 $x_1, x_2, \cdots$

联结词 $\neg, \rightarrow$

量词 $\forall$

非逻辑符号：个体常元 $a_1, a_2, \cdots$

函数符号：$f_1^1, f_2^1, f_1^2, f_2^2, f_1^3, f_2^3, \cdots$

右下是下标，右上代表是几元函数

谓词符号：$P_1^0, P_2^0, \cdots$　0元谓词符号　确定的命题

$P_1^1, P_2^1, \cdots$　一元　个体性质

$P_2^1, P_2^2, \cdots$　二元　两个体间关系

辅助符号：(　,　)

项：① 个体变元和个体常元是项

② 若f是n元函数符号，$t_1, t_2, \cdots, t_n$是项，则$f(t_1, \cdots, t_n)$也是项

③ 只有经过有限次应用上述规则生成的是项

公式：① 若P是$n(\geq 0)$元谓词符号，而$t_1, \cdots, t_n$是项，则$P(t_1, \cdots, t_n)$是公式　原子公式

② 若p, q是公式，则$\neg p$和$p \rightarrow q$是公式　复合公式

③ 若P是公式，x是个体变元，则$\forall x\, P$是公式　量化公式

④ 只有经过有限次应用以上规则生成的是公式

1101C-08 201412·2500

谓词与函数区别：谓词将个体映射为真值，函数将个体映射为个体，两者组合时谓词在函数之外.

(K1) $p\to(q\to p)$

(K2) $(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$

(K3) $(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$

(K4) $\forall x\, p(x)\to p(t)$ 项t对p(x)中的x自由

(K5) $\forall x\,(p\to q)\to(p\to\forall x q)$ x不在p中自由出现

(MP) 从 p, $p\to q$ 推出 q

(UG) 从 p 推出 $\forall x p$

定义： $\exists x p =_{def} \neg\forall x\neg p$

$p\wedge q =_{def} \neg(p\to\neg q)$

$p\vee q =_{def} \neg p\to q$

$p\leftrightarrow q =_{def} (p\to q)\wedge(q\to p)$

p是q的一个子公式，如果p是一个K公式且p是q（K公式）的一部分.

例： $\forall x_1(P_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_2 P_2^2(x_2,x_3))$

子公式： ① 自身 ③ $\forall x_2 P_2^2(x_2,x_3)$

约束出现 ② $P_1^2(x_1,x_2)$ ④ $P_2^2(x_2,x_3)$

$\forall x\, p(x)$ ⑤ $P_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_2 P_2^2(x_2,x_3)$

①$\forall x p$中x的所有出现都是约束出现，称p为对$\forall x$的辖域

②x在公式p中的一个出现x是约束出现当且仅当存在p的一个子公式q，x°在

q中约束出现

③ x在P中的一个出现是自由出现当且仅当该出现不是约束出现

闭项：不含个体变元的项　　$f_1^1(a_1)$, $f_1^2(a_1, a_2)$ ⋯

闭公式：所有个体变元在其中都没有自由出现的公式．　$\forall x_1 P_1^1(f_1^1(x_1))$

项t对P(x)中x自由：(可代换的) P(x)表示个体变元x可能在公式P中自由出现。

~~若没有自由出现~~ 若x在P(x)中有自由出现，用t处处同时替换

则t对P(x)中x　x在P(x)中的每个自由出现，所得结果记为

自由．　P(t)，若t中个体变元在P(t)中都是自由出现，

$\forall x P(x)$ 算约束出现　则称项t对P(x)中x自由

闭项对任何P(x)中x自由

x对P(x)中x自由

x在P(x)中不自由出现，则对任何t，t对P(x)中x自由．

K．　K(Y)，Y是个体变元集．

对任何$\Gamma \subseteq K(Y)$，$P \in K(Y)$，称P从Γ形式可推，记$\Gamma \vdash_K P$，如果存在P的一个从Γ的推导$P_1, P_2, \cdots, P_n = P$，使得对所有$k (1 \le k \le n)$

① P_k是K的公理　或

② $P_k \in \Gamma$　　　或

③ 存在P_i和$P_j = P_i \to P_k$使$i, j < k$ 或

④ 存在$P_j (j<k)$使$P_k = \forall x P_j$．x称为这个形式推导的概括变元

若$\Gamma \vdash_K P$且$\Gamma = \varnothing$，则称P在K中形式可证，记为$\vdash_K P$．P又称为K的一条内定理

中国科学技术大学

解题方法：将K中问题转化为L中问题（脱帽.戴帽）

设$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in L(X)$，$q_1,\cdots,q_n\in K(Y)$，则

$\vdash_L p(x_1,\cdots,x_n)\Rightarrow\vdash_K p(q_1,\cdots,q_n)$

L中一个内定理将命题变元替换，得K中一个内定理

K是L的一个"扩张"

K的性质：①单调性．若$\Gamma\subseteq\Gamma'$且$\Gamma\vdash_K p$，则$\Gamma'\vdash_K p$

②紧致性　若$\Gamma\vdash_K p$，则存在有限$\Delta\subseteq\Gamma$使$\Delta\vdash_K p$

③平凡性　若Γ不相容，则对任何$p\in K(Y)$有$\Gamma\vdash_K p$

K演绎定理：①若$\Gamma\vdash_K p\to q$，则$\Gamma\cup\{p\}\vdash_K q$

②若$\Gamma\cup\{p\}\vdash_K q$，且推导中的概括变元不在p中自由出现，则$\Gamma\vdash_K p\to q$

K反证律：若$\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash_K q$且$\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash_K \neg q$且所用概括变元不在p中自由出现，则$\Gamma\vdash_K p$

K归谬律：若$\Gamma\cup\{p\}\vdash_K q$且$\Gamma\cup\{p\}\vdash_K\neg q$且概括变元不在p中自由出现，$\Gamma\vdash_K\neg p$

∃1规则：若t对$p(x)$中x自由，则$\vdash p(t)\to\exists x p(x)$

∃2规则：设$\Gamma\cup\{p\}\vdash q$，且概括变元不在p中自由出现，若x不在q中自由出现，则$\Gamma\cup\{\exists x p\}\vdash q$

若$\Gamma\vdash_K p\leftrightarrow q$，则称p与q在Γ下可证等价；若$\Gamma=\varnothing$，则p与q可证等价

设$p,q,r\in K(Y)$，则

① $\vdash p\leftrightarrow p$　自反性

1101C-08 201412·2500

中国科学技术大学

② $\vdash p\leftrightarrow q$ 当且仅当 $\vdash q\leftrightarrow p$ 对称性

③ $\vdash p\leftrightarrow q$ 且 $\vdash q\leftrightarrow r$ 则 $\vdash p\leftrightarrow r$ 传递性.

④ $\vdash p\leftrightarrow q$ 当且仅当 $\vdash \neg p\leftrightarrow \neg q$

$\Gamma\vdash p\leftrightarrow q$ 当且仅当 $\Gamma\vdash p\to q$ 且 $\Gamma\vdash q\to p$.

子公式的等价可替换性:

设 q 是 p 的一个子公式,用 $q'\in K(Y)$ 替换 p 中的 q(的一次出现)的结果记为 p',则若 $\Gamma\vdash q\leftrightarrow q'$,则 $\Gamma\vdash p\leftrightarrow p'$

可以通过替换证明一个公式

对偶律:设 $p\in K(Y)$ 只出现原子公式及 $\neg,\wedge,\vee,\forall,\exists$. 将 p 中所有原子公式替换为否定式, $\vee$ 与 $\wedge$ 互换, $\forall$ 与 $\exists$ 互换,所得结果记为 p^*,称为 p 的对偶式,则 $\vdash p^*\leftrightarrow \neg p$

前束范式是任何形为 $Q_1x_1\cdots Q_nx_n\,p$ 的公式,其中 $Q_i(i=1,\cdots,n)$ 代表 $\forall$ 或 $\exists$, p 中不出现任何量词,称为原公式的母式

令 Q^* 为 Q 的对偶量词

① 若 y 在 $p(x)$ 中不出现且 x 不在 $p(y)$ 中出现,则 $\vdash Q_x\,p(x)\leftrightarrow Q_y\,p(y)$ "改名"

② 若 x 不在 p 中自由出现,则 $\vdash (p\to Q_x q)\leftrightarrow Q_x(p\to q)$ 前反后不反

若 x 不在 q 中自由出现,则 $\vdash (Q_x\,p\to q)\leftrightarrow (Q^*x(p\to q))$

③ $\vdash \neg Q_x\,p\leftrightarrow Q^*_x\neg p$

④ $\vdash (\forall x p\wedge\forall x q)\leftrightarrow \forall x(p\wedge q)$

⑤ $\vdash (\exists x p\vee\exists x q)\leftrightarrow \exists x(p\vee q)$

1101C-08 201412·2500

⑥ 若x不在p中自由出现，则 $\vdash(p\vee\forall xq)\leftrightarrow\forall x(p\vee q)$

$\vdash(p\wedge\exists xq)\leftrightarrow\exists x(p\wedge q)$

化范式的步骤：

①改名

②量词外移

③ ¬深入

④ 整理.

一阶结构：设K(Y)是任意给定的一阶语言，K(Y)的一阶结构是一个三元组 $M=(\mathbb{D},\mathbb{F},\mathbb{P})$，其中D是一个非空集，称为M的论域D中元素称为个体，$\mathbb{F}$是D上函数的集合，$\mathbb{P}$是D上关系的非空集，使

①对K(Y)中每一个个体常元，D中有一个个体 a^M

②对K(Y)中每一个n(≥0)元函数符号f，$\mathbb{F}$中有一个n元函数 $f^M:\mathbb{D}^n\to\mathbb{D}$

③对K(Y)中每一个n(≥0)元函数符号f，$\mathbb{F}$中有一个n元关系 $P^M\subseteq D^n$

个体变元的指派：对任给K(Y)及其一阶结构 $M=(\mathbb{D},\mathbb{F},\mathbb{P})$，K(Y)的一个(相对于M的)个体变元指派是一个映射 $V:Y\to\mathbb{D}$

一阶解释：任何一阶语言K(Y)的一阶解释是一个复合映射 $I=(M,V,\nu)$

其中 $M=(\mathbb{D},\mathbb{F},\mathbb{P})$ 是K(Y)的一个一阶结构，V是K(Y)的一个个体

1101C-08 201412·2500

变元指派，v是(标准)赋值，使得：

① 对任何 $x \in Y$，$I(x) = V(x)$

② 对任何个体常元 a，$I(a) = a^M$

③ 对任何函数符号 f，$I(f) = f^M$

④ 对任何项 $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，$I(f(t_1, \cdots, t_n)) = f^M(I(t_1), \cdots, I(t_n))$

⑤ 对任何谓词符号 p，$I(p) = P^M$

⑥ 对任何原子公式 $P(t_1, \cdots, t_n)$，$I(p(t_1, \cdots, t_n)) = \begin{cases} t, & \text{if } (I(t_1), \cdots, I(t_n)) \in P^M \\ f, & \text{otherwise} \end{cases}$

⑦ 对任何公式 p，$I(\neg p) = \begin{cases} t, & \text{if } (I(p)) = f \\ f, & \text{otherwise} \end{cases}$

⑧ 对任何公式 p, q，$I(p \to q) = \begin{cases} f, & \text{if } I(p) = t \text{ and } I(q) = f \\ t, & \text{otherwise} \end{cases}$

⑨ 对任何公式 p 和个体变元 x，$I(\forall x p) = \begin{cases} t, & \text{if 对所有 } d \in D: I_d^x(p) = t \\ f, & \text{otherwise} \end{cases}$

其中 $I_d^x = (M, V|_d^x, v)$，$V|_d^x(y) = \begin{cases} d, & y = x \\ V(y), & y \neq x \end{cases}$，$I = (M, V, v)$

I的变通　用d去替换$V(x)$

M可满足：设 $I = (M, V, v)$ 是 $K(Y)$ 的一个解释，$p \in K(Y)$，若 $I(p) = t$，则称 p 在 I 之下为真，又称 p 在 M 中可满足，又称 M 满足 p

M有效：设 M 为任何一阶结构，$p \in K(Y)$，若对一切 V，p 在 $I = (M, V, v)$ 下是真，则 p 在 M 中有效，或 p 是 M 有效的，又称 M 是 p 的一个模型，记为 $M \models p$

逻辑有效：设 $p \in K(Y)$，若对一切一阶结构 M，$M \models p$，称 p 为逻辑有效，记为 $\models p$

令 $M \models \Gamma$ 表示对所有 $p \in \Gamma$，有 $M \models p$，称 M 为 Γ 的一个模型

1101C-08 201412·2500

语义后承：设$\Gamma \subseteq K(Y)$，$p \in K(Y)$，若对一切一阶结构M有$M \models \Gamma \Rightarrow M \models p$，
则称p是Γ的一个语义后承(逻辑推论)，记$\Gamma \models p$，当$\Gamma = \phi$
时记为$\models p$

若$p(x_1, \cdots, x_n) \in K(Y_n)$，$Y_n = \{x_1, \cdots, x_n\}$，令$\forall p$表示$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n p(x_1, \cdots, x_n)$
称为$p(x_1, \cdots, x_n)$的全称闭式

任给一阶结构M ① $M \models p$ iff $M \models \forall x p \Longleftrightarrow M \models \forall p$ 语义UG
② 若$M \models p$且$M \models p \to q$则$M \models q$ 语义MP
③ 若$\Gamma \subseteq \Gamma'$且$\Gamma \models p$则$\Gamma' \models p$ 语义单调性

设p为一闭式，$I = (M, V, \nu)$，若$I(p) = t$ ($I(p) = f$)，则对一切$I' = (M, V', \nu)$
有$I'(p) = t$ ($I'(p) = f$)

任给闭式$p \in K(Y)$，$K(Y)$的一阶结构M，有$M \models p$或$M \models \neg p$.

$\Gamma \vdash p \Longleftrightarrow \Gamma \models p$ ⇒可靠性 ⇐完全性

K的公理都是逻辑有效的

对一切$p \in K(Y)$，$\vdash p$与$\vdash \neg p$不同时成立(语法上)

若Γ有模型，则Γ相容. $\exists M. M \models \Gamma$.

相容集有可数模型.

1101C-08 201412·2500