数理逻辑整理

童世炜

2015 年 6 月 18 日

目录

烤柿前突击出来的，有错的话自行脑补修正∧_∧

1 命题演算公式,定理,性质合集

公理：

(L1) $p \to (q \to p)$

(L2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to q))$

(L3) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$

定理：

$\vdash p \to p$ (同一律)

$\vdash \neg\, q \to (q \to p)$ (否定前件律)

$\vdash (\neg\, p \to p) \to p$ (否定肯定律)

$\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ (HS，假设三段论)

$\vdash \neg\,\neg\, p \to p$ (双重否定律)

$\vdash p \to \neg\,\neg\, p$ (第二双重否定律)

$$\vdash (p \to q) \to (\neg\, q \to \neg\, p) \qquad \text{(换位律)}$$

演绎定理 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash p \to q$

假设三段论 $\{p \to q, q \to r\} \vdash p \to r$

反证律

$$\left.\begin{array}{r} \Gamma \cup \{\neg\, p\} \vdash q \\ \Gamma \cup \{\neg\, p\} \vdash \neg\, q \end{array}\right\} \Longrightarrow \Gamma \vdash p$$

归谬律

$$\left.\begin{array}{r} \Gamma \cup \{p\} \vdash q \\ \Gamma \cup \{p\} \vdash \neg\, q \end{array}\right\} \Longrightarrow \Gamma \vdash \neg\, p$$

L的简单性质:

性质 1 (单调性)

1° 若$\Gamma \subseteq \Gamma'$，且$\Gamma \vdash p$，则$\Gamma' \vdash p$;

2° 若$\vdash p$，则对任何Γ，$\Gamma \vdash p$。

性质 2 (紧致性)

若$\Gamma \vdash p$，则存在有穷子集$\Delta \subseteq \Gamma$,使$\Delta \vdash p$.

性质 3 (平凡性)

定义：一致性/相容性/无矛盾性

若存在公式p使$\Gamma \vdash p$ 且$\Gamma \vdash \neg\, p$,则称Γ是不一致的（不相容的，矛盾的）；否则，称其为一致的

平凡性：若Γ不相容，则对$\forall p$有$\Gamma \vdash p$.

性质 4 (可证等价替换规则)

若p是q的子公式，q'是任意公式，p'是用q'替换p中的q所得公式

若$\vdash q \to q'$ 且$\vdash q' \to q$;

则$\vdash p \to p'$，且$\vdash p' \to p$.

性质 5 (语义后承/逻辑推论/语义推论性质)

1° 若$\Gamma \subseteq \Gamma'$且$\Gamma \vDash p$,则$\Gamma' \vDash p$ *(语义的单调性)*

2° 若$\Gamma \vDash p$且$\Gamma \vDash p \to q$，则$\Gamma \vDash q$ *(语义的MP规则)*

3° $\Gamma \vDash p \to q \Leftrightarrow \Gamma \cup \{p\} \vDash q$ *(语义的演绎定理)*

4° p是重言式$\Leftrightarrow \phi \vDash p$ *(记$\phi \vDash p$ 为 $\vDash p$)*

5° $p \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vDash p$

6° $\vDash p \Rightarrow \Gamma \vDash p$，即永真式是任何公式集的语义推论

性质 6 (L的可靠性与完全性)

$$\left.\begin{array}{ll} L\text{的可靠性} & \Gamma \vdash p \Rightarrow \vDash p \\ L\text{的完全性} & \Gamma \vDash p \Rightarrow \vdash p \end{array}\right\} \Longrightarrow \Gamma \vdash p \Leftrightarrow \vDash p$$

性质 7 (等值公式)

p与q等值，是指$p \leftrightarrow q$为永真式

判断两公式是否等值的方法：真值表

2 一阶逻辑（一阶谓词逻辑）/谓词演算

公理：

(K1) $p \to (q \to p)$

(K2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to q))$

(K3) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$

(K4) $\forall x p(x) \to p(t)$,其中项t对p(x)中的x是自由的

(K5) $\forall x(p \to q) \to (p \to \forall q)$,其中项x不在p中自由出现

(*Gen)

定理 1 (From L)

$\vdash p \to p$ *(同一律)*

$\vdash \neg\, q \to (q \to p)$ *(否定前件律)*

$\vdash (\neg\, p \to p) \to p$ *(否定肯定律)*

$\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ *(HS，假设三段论)*

$\vdash \neg\, \neg\, p \to p$ *(双重否定律)*

定理 2 (平凡性)

Γ 有矛盾$\Rightarrow$ K的任一公式从Γ可证

定理 3 ($\exists_1$规则)

设项t对p(x)中的x自由，则有 $\vdash p(t) \to \exists x p(x)$

定理 4 (∃$_2$规则)
设$\Gamma \cup \{p\} \vdash q$，其证明中$Gen$变元不在$p$中自由出现，且$x$不在$q$中自由出现，那么有$\Gamma \cup \{\exists xp\} \vdash q$，且除了$x$不增加其它$Gen$ 变元

定理 5 (演绎定理)
1° 若$\Gamma \vdash p \to q$，则$\Gamma \cup \{p\} \vdash q$
2° 若$\Gamma \cup \{p\} \vdash q$，**且证明中所用的$Gen$变元不在$p$中自由出现**，则不增加新的$Gen$变元就可得$\Gamma \vdash p \to q$
推论：当p是闭式时，有

$$\Gamma \cup \{p\} \vdash q \Leftrightarrow \Gamma \vdash p \to q$$

定理 6 (不知道叫什么$(-.-)$)
$\vdash \forall x(p \to q) \to (\exists xp \to \exists q)$

定理 7 (反证律)
所用Gen变元不在p中自由出现，则不增加新的Gen变元就可以得到结论

$$\left.\begin{array}{r}\Gamma \cup \{\neg\, p\} \vdash q \\ \Gamma \cup \{\neg\, p\} \vdash \neg\, q\end{array}\right\} \implies \Gamma \vdash p$$

定理 8 (归谬律)
所用Gen变元不在p中自由出现，则不增加新的Gen变元就可以得到结论

$$\left.\begin{array}{r}\Gamma \cup \{p\} \vdash q \\ \Gamma \cup \{p\} \vdash \neg\, q\end{array}\right\} \implies \Gamma \vdash \neg\, p$$

定理 9
1° $\vdash \forall xp(x) \leftrightarrow \forall yp(y)$
2° $\vdash \exists xp(x) \leftrightarrow \exists yp(y)$
其中y不在$p(x)$中出现

定理 10
1° $\vdash \neg\, \forall xp \leftrightarrow \exists x \neg\, p$
2° $\vdash \neg\, \exists xp \leftrightarrow \forall x \neg\, p$

谓词演算的语义
K的字母表,一阶语言
1、逻辑符号
(1)个体变元 $x_1, x_2, ...$
(2)联接词 $\neg$ $\vdash$
(3)量词 $\forall$ $\exists$
2、非逻辑符号
(4)个体常元$c_1, c_2, ...$
(5)函数符号
f_1^1, f_2^1 (一元函数符号)
f_1^2, f_2^2 (二元函数符号)
...
(6)谓词符号
P_1^0, P_2^0(0元谓词符号)
P_1^1, P_2^1(1元谓词符号)
...

K的解释域,一阶结构

解释域的元素叫做个体对象，解释域通常也叫做“解释”和“结构”。

设K(Y)是任一给定的一阶语言.K(Y)的一个一阶结构是一个三元组,记为$M = \{\mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$, $\mathcal{D}$ 是一个非空集，称为M的论域，是上的函数集，是上关系的非空集，使得
(1) 对K(Y)的每一个个体常元a，$\mathcal{D}$中有一个个体a^M
(2) 对K(Y)中每个n元$(n > 0)$函数符号f,$\mathcal{F}$中有一个n元函数f^M:$\mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$
(3) 对K(Y)中每个n元$(n > 0)$谓词符号P,$\mathcal{P}$中有一个n元关系$P^M \subseteq \mathcal{D}^n$
（也就是把每个符号的含义告诉给机器，这只这只是啥子）
也可以酱紫看（符号区别上面的）:
M具有以下性质：
(1)对K的每个个体常元c_i，都有M的元素$\overline{c_i}$与之对应：$c_i \mapsto \overline{c_i}, \overline{c_i} \in M$
(2)对K的每个运算符f_i^n，都有M上的n元运算符$\overline{f_i^n}$与之对应：$f_i^n \mapsto \overline{f_i^n}, \overline{f_i^n}$是$M$上的$n$元运算
(3)对K的每个谓词f_i^n，都有M上的n元关系$\overline{R_i^n}$与之对应：$R_i^n \mapsto \overline{R_i^n}, \overline{R_i^n}$是$M$上

的n元关系

个体变元指派

对任给K(Y)及其一阶结构$M=\{\mathcal{D},\mathcal{F},\mathcal{P}\}$,K(y)的一个个体变元（相对于）个体变元指派是一个映射$V:Y\to\mathcal{D}$

另一种看法（符号区别上面的）是项解释，在个体常元被解释以后，就需要对个体变元进行解释，从而使得每一项都可以被解释；而在解释域确定以后，项解释φ便由个体变元的指派φ_0完全确定

而对于带全称量词的p，引入变元变通概念

一记：设x是某个给定的个体变元，y是任意的个体变元,且$\varphi,\varphi'\in\varPhi_M$满足条件: $y\neq x\Rightarrow\varphi'(y)=\varphi(y)$ （也就是把量词限定的x做一个全映射检查（其实也就0/1））

另可记为：对任何公式p与个体变元x

$$I(\forall xp)=\begin{cases}t & \text{如果对所有}d\in\mathcal{D};I_d^x=t\\ f & \text{otherwise}\end{cases}$$

其中$I_d^x=(M,V|_d^x,v)$

(注：一阶解释的I是一个符合映射$I=(M,V,v)$,$M=(\mathcal{D},\mathcal{F},\mathcal{P})$是一阶结构，$V$是一个指派，$v$ 是一个（标准）赋值)

$$V|_d^x(y)=\begin{cases}d & y=x\\ V(y) & y\neq x\end{cases}$$

公式的赋值函数

一记为$|p|(\varphi)$,一记v

定理 11

1° $|p|_M=1\Leftrightarrow|\forall xp|_M=1$

2° 设p' 是p的全称闭式，则 $|p|_M=1\Leftrightarrow|p'|_M=1$

3° $|p|_M=0\Leftrightarrow|\forall xp|_M=0$

4° 设p' 是p的全称闭式，则 $|p|_M=0\Rightarrow|p'|_M=0$

5° $|p|_M=1$ 且$|p\to q|_M=1\Rightarrow|q|_M=1$

定理 12

1° $\Gamma\vDash p$且$\Gamma\vDash p\to q\Rightarrow\Gamma\vDash q$

2° $\Gamma \vDash p \Leftrightarrow \Gamma \vDash \forall xp$

3° 若p' 是p的全称闭式,则：$\Gamma \vDash p \Leftrightarrow \Gamma \vDash p'$

定理 13 (K的可靠性)

$\Gamma \vdash p \Rightarrow \Gamma \vDash p$

定理 14 (K的完全性)

$\Gamma \vDash p \Rightarrow \Gamma \vdash p$

3 一阶理论/形式算术与递归函数+不完备性定理

等词公理：

(E1) $R_1^2(t,t)$

(E2) $R_1^2(t_k,u) \to R_1^2(f_i^n(t_1,...,t_k,...,t_m), f_i^n(t_1,...,u,...t_n))$

(E3) $R_1^2(t_k,u) \to (R_i^n(t_1,...,t_k,...,t_m) \to R_i^n(t_1,...,u,...t_n))$

亦可以“$\approx$”记R_1^2

(E1) $t \approx t$

(E2) $t_k \approx u \to (f_i^n(t_1,...,t_k,...,t_m) \approx f_i^n(t_1,...,u,...t_n))$

(E3) $t_k \approx u \to (R_i^n(t_1,...,t_k,...,t_m) \to R_i^n(t_1,...,u,...t_n))$

等词定理(E是由所有等词定理组成的集)

1° $E \vdash t \approx t$

2° $E \vdash t \approx u \to u \approx t$

3° $E \vdash t \approx u \to (u \approx v \to t \approx v)$

定理 1 (等项替换，$(E2)$的推广) $E \vdash u \approx v \to t(u) \approx t(v)$

其中项u是项$t(u)$的子项,$t(v)$是将$t(u)$中某一处出现的u替换成项v所得结果

定理 2 (等项替换，$(E3)$的推广) $E \vdash t \approx u \to (p(t) \to p(u))$

其中$p(u)$是将公式$p(t)$中某一处出现的项t用项u替换后的结果，且t和u的变元都不在替换处受约束

形式算术K_n

算术公理

(N1) $t' \not\approx \overline{0}$

(N2) $t'_1 \approx t'_2 \to t_1 \approx t_2$

(N3) $t+\overline{0}\approx t$
(N4) $t_1+t'_2\approx(t_1+t_2)'$
(N5) $t\times overline0\approx\overline{0}$
(N6) $t_1\times t'_2\approx t_1\times t_2+t1$
(N7) $p(\overline{0})\to(\forall x(p(x)\to p(x'))\to\forall xp(x))$
其中t,t_1,t_2是任意的项，$p(x)$是任意的公式,算术公理的集记为$\mathcal{N}$

定理 3 $\mathcal{N}\vdash\overline{m}+\overline{n}\approx m+n$

定理 4 $\mathcal{N}\vdash\overline{m}\times\overline{n}\approx m\times n$

定理 5 $\mathcal{N}\vdash\overline{0}+t\approx t$

定理 6 $\mathcal{N}\vdash t'_1+t_2\approx(t_1+t_2)'$

定理 7 (加法交换律) $\mathcal{N}\vdash t'_1+t_2\approx(t_1+t_2)'$
其中t_1,t_2是任意的项

定理 8 (加法结合律) $\mathcal{N}\vdash(t_1+t_2)+t_3\approx t_1+(t_2+t_3)$
其中t_1,t_2,t_3是任意的项

定理 9 (加法消去律) $\mathcal{N}\vdash t_1+t_2\approx t_2\leftarrow t_1\approx\overline{0}$
其中t_1,t_2是任意的项

定理 10 $\mathcal{N}\vdash t_1+t_2\approx\overline{0}\to t_1\approx\overline{0}$

定理 11 $\mathcal{N}\vdash t_3+t_1\approx t_2\to(t_4+t_2\approx t_1\to t_1\approx t_2)$

定理 12 $\mathcal{N}\vdash\exists x(x+t_1\approx t_2)\to(\exists x(x+t_2\approx t_1)\to(t_1\approx t_2))$

定理 13 $\mathcal{N}\vdash t\not\approx\overline{0}\to\overline{1}\leqslant t$

定理 14 (上面那只的推广) $\mathcal{N}\vdash(t\not\approx\overline{0}\wedge\ldots\wedge t\not\approx\overline{n-1}\to\overline{n}\leqslant t$

定理 15 $\mathcal{N}\vdash(t\not\approx\overline{0}\wedge\ldots\wedge t\not\approx\overline{n}\to t\nleqslant\bar{(}n)$

定理 16 设公式$p(x)$只含一个自由变元x，则有
$\mathcal{N}\vdash(p(\overline{0})\wedge\ldots\wedge p(\overline{n}))\to t\nleqslant\overline{n}$

定理 17 *若*$n > 0$,则
$\mathcal{N} \vdash x \nleqslant \overline{n} \to \overline{n} \leqslant x$

定理 18 对任意自然数m和n
(1) 当$m = n$时，$\mathcal{N} \vdash \overline{m} \approx \overline{n}$
(2) 当$m \neq n$时，$\mathcal{N} \vdash \overline{m} \not\approx \overline{n}$

可表示函数和关系

“k元函数”指k元数论函数$f : N^k \to N$,“R是k元关系”指R是k元数论关系$R \subseteq N^k$

(可表示函数) k元函数f在K_N中可表示：如果存在含$k+1$个自由变元的公式$p(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$使对任意$n_1, \ldots, n_k, m \in N$,
(1) $f(n_1, \ldots, n_k) = m \Rightarrow \mathcal{N} \vdash p(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, m)$
(2) $f(n_1, \ldots, n_k) \neq m \Rightarrow \mathcal{N} \vdash \neg\, p(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, m)$
(3) $\mathcal{N} \vdash p(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, t) \to t \approx \overline{f(n_1, \ldots, n_k)}$

k元函数f用公式$p(x_1, \ldots, x_k, y)$在K_N中可表示的充要条件是：对任意$n_1, \ldots, n_k$及项t(*t对$p(x_1, \ldots, x_k, y)$中y自由*),
1° $\mathcal{N} \vdash p(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{f(n_1, \ldots, n_k)})$
2° $\mathcal{N} \vdash p(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, t) \to t \approx \overline{f(n_1, \ldots, n_k)}$

(可表示关系) N上的k元关系R在K_N中可表示，是指存在着含有k个自由变元的公式$p(x_1, \ldots, x_k)$,它具有以下性质：对任意$n_1, \ldots, n_k, m \in N$,
(1) $(n_1, \ldots, n_k) \in R \Rightarrow \mathcal{N} \vdash p(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$
(2) $(n_1, \ldots, n_k) \notin R \Rightarrow \mathcal{N} \vdash \neg\, p(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$

只有递归函数（关系）是K_N可表示的

K_N是相容，但是不完备的

4 思考题提示

思考题1-1 试用联接词表达自然语言中的“如果……则”

$p \to q$

思考题1-2 同一律证明是否一定要用（L1）

一定要用

定义特征函数$\delta(p) \in S$.设:

(1)$\delta(L2) \in S$

(2)$\delta(L3) \in S$

(3)MP可以保持这个特征:即$\delta(p) \in S$且$\delta(p \to q) \in S \Rightarrow \delta(q) \in S$

$\Longrightarrow \{L2, L3, MP\} \vdash r \Rightarrow \delta(r) \in S$

若$\delta(r) \notin S$,说明$\delta(r)$ 不能由$L2, L3, MP$推出

$\delta(p) \in S$是一个三值函数，定义一个三值真值表

证明$\delta(p \to p) \notin S$即可

(附：特征函数的定义)

k元关系$R(\subseteq N^k)$的特征函数$C_R : N^k \to \{0,1\}$是用下式定义的

$$C_R(n_1, \dots, n_k) = \begin{cases} 1 & (n1, \dots, n_k) \in R \\ 0 & (n1, \dots, n_k) \notin R \end{cases}$$

思考题1-3 演绎定理说明了什么

蕴含词的解释：蕴含词（$\to$）必须被解释（或者说赋值）为实质蕴含(真值表表示的蕴含)。否则，三个公理不成立，以及语义语法之间可能出现不一致

可以简化证明

思考题1-4 双否律$\{\neg\neg p\}$ 无需证明,因为$\neg\neg p$与p相同，对吗

不对，在L（X）中，由层次性可知，$\neg\neg p \neq p$

思考题1-5 直接证明$\vdash (\neg p \to p) \to p$最少需要几步

$\odot\nabla\odot$ 只能做23步的渣渣不会呀……> _ <

思考题1-6

1° 语义后承与重言式有何关系

2° 论断是否成立：任给$\Gamma \subseteq L(X)$和$p \in L(X)$，存在$q \in L(X)$使$\Gamma \vDash p$ 当且

仅当$\vDash q$

p为重言式为语义后承$\Gamma \vDash p$的特例$(\Gamma = \Phi)$
1° $\Gamma = \{p_1 ... p_n\}$有限
$q = p_1 \to (p_2 \to ...(p_n \to p)...)$
则由语义的演绎定理可得$\Gamma \vDash p \Leftrightarrow \vDash q$
2° Γ无限
利用紧致性，得到$\Gamma \vDash p \Rightarrow$有限子集$\Gamma' \vDash p$,转为$1^\circ$
思考题1-7 $\Gamma \vdash p$是否是可判定的
一类问题可判定的标准：
(1) 该类问题中的每一个问题实例只有“是”或“否”两种回答
(2) 存在一个“能行”方法A，使得对该类问题的每一实例，A都可以在有限时间内给出正确答案
命题逻辑的可判定性 存在一个能行方法A,对$P \in L(X)$，当$\vdash P$时，A回答yes，当$\nvdash P$时A回答no.
利用L的可靠性和完全性：$\Gamma \vdash p \Leftrightarrow \Gamma \vDash p$
因此可以通过真值表来进行判定

首先要做的就是指派和赋值（赋值此处不需要），对于指派，这里要求是对变元的任意指派
(1)Γ集有限

(2)Γ集无穷

外延：一阶逻辑的判定问题
1° 任给符号是否是K的公理 $\surd$
2° 任给公式p, q, r,是否从p, q用MP规则推出r $\surd$
3° 任给公式p, q,q是否从p中用Gen规则推出 $\surd$
4° 任给公式序列，是否是K的一个形式证明 $\surd$
5° 任给公式p是否是K的内定理 $\times$
思考题2-1 （K4）（K5）限制条件有何意义？举例
限制条件的意义在于保证K4，K5在任何解释域M下均恒真，即有效式
(K4) 为一个由多到一的推论，限制条件保证了不再有更多的约束条件出现
无限制的反例：$M\{R, \Phi, >\}$

$$\forall x \exists y R_1^2(x,y) \to \exists y R_1^2(y,y)$$

(K5) 为一个由一到多的推论，限制条件保证了不会有约束条件被忽略
无限制的反例：$M\{R, \Phi, \{R_1^1 :> 2, R_2^1 :> 1\}\}$

$$\forall x(R_1^1(x) \to R_2^1(x)) \to (R_1^1(x) \to \forall x R_2^1(x))$$

思考题2-2 K演绎定理的限制有何意义？
无限制反例：
$\because\quad R_1^1(x_1) \vdash \forall x_1 R_1^1(x_1)$ UG
$\therefore\quad \vdash R_1^1(x_1) \to \forall x_1 R_1^1(x_1)$
再利用K的可靠性和完全性，从语义上说明

思考题2-3 真在一阶逻辑里有那几个层次？它们的关系

三层
- M可满足:在一个M中，在一种项解释φ下，p是真的
- M有效：在一个M中，在任一项解释φ下，p是真的
- (模型类有效：$\Gamma \vDash p$ 在任一使Γ中公式为真的M中，在任一项解释φ下，p是真的)
- M逻辑有效：在任何M中,在任一项解释φ下，p是真的

M可满足：设$I = \{M, V, v\}$是$K(Y)$的一阶解释，$p \in K(Y)$,若$I(p) = t$，则称p在I下为真，又称p在M下可满足
M有效：设M为任一一阶结构，$p \in K(Y)$,若对一切V，p在$I\{M, V, v\}$下为真，则称p在M中有效（p是M有效的，M是p的一个模型，记为$M \vDash p$）
逻辑有效：设$p \in K(Y)$,若对一切一阶结构M，若$M \vDash p$，则称p为逻辑有效的，记为$\vDash p$

思考题2-4 若$\Gamma \vDash p$,则对一切解释I，若$\forall q \in \Gamma$有$I(q) = t$.则$I(p) = t$?
不正确。
$\Gamma \vDash p \Leftrightarrow \forall M \vDash \Gamma$ 则$M \vDash p$
换成一切解释，可能其一阶结构M不再是Γ的模型，则$\vDash$约束不再存在

思考题3-1 L是否“强迫”$' \to '$ 解释为实质蕴含（语义解释）
是，为了$L1 \sim L3$的成立，$' \to '$ 必须解释为实质蕴含
$L1, L2, MP$强迫$\to$解释为实质蕴含,在此基础上，$L3$强迫$\neg$ 解释为非

5　杂记

HS直接证明

(1)$(q \to r) \to (p \to (q \to r))$　$(L1)$

(2)$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$　$(L2)$

(3)$((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to ((q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))))$　$(L1)$

(4)$(q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$　$MP(2)(3)$

(5)$((q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))) \to (((q \to r) \to (p \to (q \to r))) \to ((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))))$　$(L2)$

(6)$((q \to r) \to (p \to (q \to r))) \to ((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$　$MP(4)(5)$

(7)$(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$　$MP(1)(6)$

(8)$((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)) \to (((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$　$(L2)$

(9)$((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r))$　$MP(7)(8)$

(10)$(((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r))) \to ((p \to q) \to (((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r))))$　$(L1)$

(11)$(p \to q) \to (((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$　$MP(9)(10)$

(12)$((p \to q) \to (((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r)))) \to (((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to q))) \to ((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))))$　$(L2)$

(13)$((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to q))) \to ((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$　$MP(11)(12)$

(14)$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to q)$　$(L1)$

(15)$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)$　$MP(13)(14)$

双否律的直接证明

(1)$\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to \neg\neg p)$　$(L1)$

(2)$(\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to \neg\neg p)) \to ((\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to$

$(\neg\neg p \to \neg\neg p))$ $(L2)$

(3)$(\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $MP(1)(2)$

(4)$\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $(L1)$

(5)$\neg\neg p \to \neg\neg p$ $MP(3)(4)$

(6)$\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $(L1)$

(7)$(\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $(L3)$

(8)$((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)))$ $(L1)$

(9)$\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))$ $MP(7)(8)$

(10)$(\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))) \to ((\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)))$ $(L2)$

(11)$(\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))MP(9)(10)$

(12)$\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $(L1)$

(13)$\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $MP(11)(12)$

(14)$(\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ $(L3)$

(15)$((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)) \to (\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)))$ $(L1)$

(16)$\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))$ $MP(14)(15)$

(17)$(\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))) \to ((\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)))$ $(L2)$

(18)$(\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p))$ $MP(16)(17)$

(19)$\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)$ $MP(13)(18)$

(20)$(\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)) \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))$ $(L2)$

(21)$(\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ $MP(19)(20)$

(22)$\neg\neg p \to p$ $MP(5)(21)$

第二双否律的直接证明

(1)$\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to \neg\neg\neg p)$ $(L1)$

(2)$(\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to \neg\neg\neg p)) \to ((\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p))$ $(L2)$

(3)$(\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $MP(1)(2)$

(4)$\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $(L1)$

(5)$\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p$ $MP(3)(4)$

(6)$\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $(L1)$

(7)$(\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)$ $(L3)$

(8)$((\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)))$ $(L1)$

(9)$\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p))$ $MP(7)(8)$

(10)$(\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p))) \to ((\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)))$ $(L2)$

(11)$(\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p))$ $MP(9)(10)$

(12)$\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $(L1)$

(13)$\neg\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)$ $MP(11)(12)$

(14)$(\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p) \to (\neg\neg\neg p \to \neg p)$ $(L3)$

(15)$((\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p) \to (\neg\neg\neg p \to \neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p) \to (\neg\neg\neg p \to \neg p)))$ $(L1)$

(16)$\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p) \to (\neg\neg\neg p \to \neg p))$ $MP(14)(15)$

(17)$(\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p) \to (\neg\neg\neg p \to \neg p))) \to ((\neg\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg p \to \neg p)))$ $(L2)$

(18)$(\neg\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg p \to \neg p))$ $MP(16)(17)$

(19)$\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg p \to \neg p)$ $MP(13)(18)$

(20)$(\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg p \to \neg p)) \to ((\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg\neg p \to \neg p))$ $(L2)$

(21)$(\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg\neg p \to \neg p)$ $MP(19)(20)$

(22)$\neg\neg\neg p \to \neg p$ $MP(5)(21)$

(23)$(\neg\neg\neg p \to \neg p) \to (p \to \neg\neg p)$ $(L3)$

(24)$p \to \neg\neg p$ $MP(22)(23)$