数理逻辑复习

2018年6月28日 9:57

I的变通 用d去替换v(x)

M可满足：设 $I=(M,V,\nu)$ 是 $K(Y)$ 的一个解释，$p\in K(Y)$，若 $I(p)=t$，则称p在I之下为真，又称p在M中可满足，又称M满足p

M有效：设M为任何一阶结构，$p\in K(Y)$，若对一切V，p在 $I=(M,V,\nu)$ 下是真，则p在M中有效，或p是M有效的，又称M是p的一个模型，记为 $M\models p$

逻辑有效：设 $p\in K(Y)$，若对一切一阶结构M，$M\models p$，称p为逻辑有效，记为 $\models p$

令 $M\models\Gamma$ 表示对所有 $p\in\Gamma$，有 $M\models p$，称M为Γ的一个模型

1101C-08 201412·2500

- 所有书上的定理都可以用，一定要**标注出处**，防止误以为伪证。
- 一定多看几遍作业题，思考题也要看一两遍**必须能找到**，去年好几个同学，作业原题15分没找到。
- 开卷记得带所有的资料，**书，讲义，思考题，作业答案。**

考试题目

- 试题类型参考去年试卷，大题题型不会有太多的变化
- 简答题一般是可以抄书的东西或者抄思考题的东西
- 证明题和化简就是书上的原题或者非常类似的题，一道L的直接证明，一道K的证明。
- 最后一道每年都是利用给定的逻辑构造解释域的题，但是每年给的东西不一样，利用和代数结构相关的那些自反对称传递相关的内容，构造一个你自己觉得合适的运算关系，言之有理即可。但一定要写出依据。

复习范围

- 重点是一二章！！！

中国科学技术大学

语义后承：设 $\Gamma\subseteq K(Y)$，$p\in K(Y)$，若对一切一阶结构M有 $M\models\Gamma\Rightarrow M\models p$，则称p是Γ的一个语义后承（逻辑推论），记 $\Gamma\models p$，当 $\Gamma=\varphi$ 时记为 $\models p$

若 $p(x_1,\cdots,x_n)\in K(Y_n)$，$Y_n=\{x_1,\cdots,x_n\}$，令 $\forall p$ 表示 $\forall x_1\forall x_2\cdots\forall x_n p(x_1,\cdots,x_n)$ 称为 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 的全称闭式

任给一阶结构M ① $M\models p$ iff $M\models\forall x p\Leftrightarrow M\models\forall p$ 语义UG

② 若 $M\models p$ 且 $M\models p\to q$ 则 $M\models q$ 语义MP

③ 若 $\Gamma\subseteq\Gamma'$ 且 $\Gamma\models p$ 则 $\Gamma'\models p$ 语义单调性

设p为一闭式，$I=(M,V,\nu)$，若 $I(p)=t$（$I(p)=f$），则对一切 $I'=(M,V',\nu)$ 有 $I'(p)=t$（$I'(p)=f$）

任给闭式 $p\in K(Y)$，$K(Y)$ 的一阶结构M，有 $M\models p$ 或 $M\models\neg p$

$\Gamma\vdash p\Longleftrightarrow\Gamma\models p$ ⇒可靠性 ⇐完全性

K的公理都是逻辑有效的

对一切 $p\in K(Y)$，$\vdash p$ 与 $\vdash\neg p$ 不同时成立（语法上）

若Γ有模型，则Γ相容 $\exists M.M\models\Gamma$

相容集有可数模型

- 第三章前几节适当了解，后面的和第四章哥德尔的讲过的部分，能在抄书的时候找到定理在哪就行，一个字都不会变，别花太多时间在上面。
- 对于那些一长串甚至几页的证明，忽略就好，出了你也可以抄书。
- 判断题只需要对错不需要解释，会出一些细节，容易出易错题的地方多看看，复习深入一些。
- 作业题一定要认真看，本来也没多少...
- 思考题答案即 复习整理童世炜 切记打印并提前看几遍，大题和判断题基本都会出。

易错作业

- L语言的公理，注意L3，直接证明不要把L3用错了。
- 理解L语言的演绎定理推导过程，很多时候直接证明不会的话用演绎定理一步一步推导
- 直接证明不涉及非的话很简单，只用L1和L2就够了。
- 注意语法和语义的区别，L语言要求用语法证明，实在做不出来用语义证明投机也能适当给分。
- 理解指派和赋值的区别，个体变元和公式的区别。
- P64～P66好好看看，务必理解自由和约束，作业题很多人做错。
- K语言中公理，注意自由不自由，这个在演绎定理中也出现过。
- 存在和任意的一些规则。
- K语言参考练习20第一题。

P135: 2

2 在例 1 的 K 的解释域 N 中，若等词≈改为解释成“有不同的奇偶性”，那么等词公理在 N 中是否都恒真？是否都恒假。

答：在解释域 N 中，若等词≈改为解释成“有不同的奇偶性”，那么(E1)型等词公理在 N 中恒假，而(E2)与(E3)型等词公理在 N 中既不恒真也不恒假。

P138: 1

1 设项 t、u 都对公式 $p(x_i)$ 中 x_i 自由，且不含 x_i。求证 $E\cup\{\exists!x_i\,p(x_i), p(t)\}\vdash p(u)\to u\approx t$，这里规定 $\exists!x_i\,p(x_i)=\exists x_i(p(x_i)\wedge\forall x_j(p(x_j)\to x_i\approx x_j))$ 其中 x_j 不在 $p(x_i)$ 中出现。

证明：由于 x_j 不在 $p(x_i)$ 中出现且项 t、u 都对公式 $p(x_i)$ 中 x_i 自由，所以项 t、u 都对公式 $p(x_j)$ 中 x_j 自由。 (结论一)

（提示：这里涉及 $p(x_i)$ 之类的表示方法在表示对象变元间替换时的不严谨情况，我会在习题课上具体讲）

以下是 K 中 $u\approx t$ 从 $E\cup\{p(x_i)\wedge\forall x_j(p(x_j)\to x_i\approx x_j), p(t), p(u)\}$ 的一个“证明”。

(1) $p(x_i)\wedge\forall x_j(p(x_j)\to x_i\approx x_j)$ 假定
(2) $(p(x_i)\wedge\forall x_j(p(x_j)\to x_i\approx x_j))\to\forall x_j(p(x_j)\to x_i\approx x_j)$ 永真式
(3) $\forall x_j(p(x_j)\to x_i\approx x_j)$ (1), (2), MP
(4) $\forall x_j(p(x_j)\to x_i\approx x_j)\to(p(u)\to x_i\approx u)$ (K4) (依据结论一)
(5) $\forall x_j(p(x_j)\to x_i\approx x_j)\to(p(t)\to x_i\approx t)$ (K4) (依据结论一)
(6) $p(u)\to x_i\approx u$ (3), (4), MP
(7) $p(t)\to x_i\approx t$ (3), (5), MP
(8) $p(u)$ 假定
(9) $p(t)$ 假定
(10) $x_i\approx u$ (6), (8), MP
(11) $x_i\approx t$ (7), (9), MP
(12) $x_i\approx u\to(x_i\approx t\to u\approx t)$ (E3)
(13) $x_i\approx t\to u\approx t$ (10), (12), MP
(14) $u\approx t$ (11), (13), MP

在以上“证明”中没有使用任何 Gen 变元。所以根据演绎定理，不需任何 Gen 变元就可得 $E\cup\{p(x_i)\wedge\forall x_j(p(x_j)\to x_i\approx x_j), p(t)\}\vdash p(u)\to u\approx t$。 (结论二)

由于项 t、u 都不含 x_i，所以 x_i 不在 $p(u)\to u\approx t$ 中自由出现。 (结论三)

由结论二和结论三，根据 $\exists_2$ 规则可得 $E\cup\{\exists x_i(p(x_i)\wedge\forall x_j(p(x_j)\to x_i\approx x_j)), p(t)\}\vdash p(u)\to u\approx t$。由于本题规定 $\exists!x_i\,p(x_i)=\exists x_i(p(x_i)\wedge\forall x_j(p(x_j)\to x_i\approx x_j))$，所以有 $E\cup\{\exists!x_i$

1 求证当 n=2k 时，$N\vdash\exists x_i(x_i\times\underline{2}\approx\underline{n})$。

证明：以下是 K_N 中 $\exists x_i(x_i\times\underline{2}\approx\underline{n})$ 从 N 的一个“证明”。

(1) $\underline{k}\times\underline{2}\approx\underline{2k}$ 命题 2
(2) $(\underline{k}\times\underline{2}\approx\underline{2k})\to\exists x_i(x_i\times\underline{2}\approx\underline{2k})$ $\exists_1$ 规则（由于 $\underline{k}$ 对 $x\times\underline{2}\approx\underline{2k}$ 中的 x 自由）
(3) $\exists x_i(x_i\times\underline{2}\approx\underline{2k})$ (1), (2), MP

所以 $N\vdash\exists x_i(x_i\times\underline{2}\approx\underline{n})$。 证毕

4 求证 $N\vdash\neg(t'_1+t_2\approx t_1)$。

证明：以下是 K_N 中 $t'_2\approx\underline{0}$ 从 $N\cup\{t'_1+t_2\approx t_1\}$ 的一个“证明”。

(1) $\neg(t'_2\approx\underline{0})$ (N1)
(2) $t'_1+t_2\approx t_1$ 假定
(3) $t'_1+t_2\approx(t_1+t_2)'$ 命题 4
(4) $t_1+t'_2\approx(t_1+t_2)'$ (N4)
(5) $t'_1+t_2\approx t_1+t'_2$ (3), (4), 等词性质
(6) $t_1+t'_2\approx t'_2+t_1$ 加法交换律
(7) $t'_1+t_2\approx t'_2+t_1$ (5), (6), 等词性质
(8) $t'_2+t_1\approx t_1$ (2), (7), 等词性质
(9) $t'_2+t_1\approx t_1\to t'_2\approx\underline{0}$ 加法消去律
(10) $t'_2\approx\underline{0}$ (8), (9), MP

由(1)(10)可得 $N\cup\{t'_1+t_2\approx t_1\}\vdash\neg(t'_2\approx\underline{0})$ 及 $t'_2\approx\underline{0}$ 且“证明”中所涉及的任何 Gen 变元可以避免出现在 $t'_1+t_2\approx t_1$ 中。所以根据归谬律可得 $N\vdash\neg(t'_1+t_2\approx t_1)$。 证毕

在以上"证明"中没有使用任何 Gen 变元。所以根据演绎定理，不需任何 Gen 变元就可得 $E\cup\{p(x_i)\wedge\forall x_j(p(x_j)\to x_i\approx x_j), p(t)\}\vdash p(u)\to u\approx t$。 (结论二)

由于项 t、u 都不含 x_i，所以 x_i 不在 $p(u)\to u\approx t$ 中自由出现。 (结论三)

由结论二和结论三，根据$\exists_2$规则可得 $E\cup\{\exists x_i(p(x_i)\wedge\forall x_j(p(x_j)\to x_i\approx x_j)), p(t)\}\vdash p(u)\to u\approx t$。由于本题规定$\exists! x_i\, p(x_i)=\exists x_i(p(x_i)\wedge\forall x_j(p(x_j)\to x_i\approx x_j))$，所以有 $E\cup\{\exists! x_i\, p(x_i), p(t)\}\vdash p(u)\to u\approx t$。 证毕

由(1)(10)可得 $N\cup\{t'_1+t_2\approx t_1\}\vdash -(t'_2\approx\underline{0})$及 $t'_2\approx\underline{0}$ 且"证明"中所涉及的任何 Gen 变元可以避免出现在 $t'_1+t_2\approx t_1$ 中。所以根据归谬律可得 $N\vdash -(t'_1+t_2\approx t_1)$。 证毕

2 $\Gamma\models p$，$\Gamma\models p\to q$，则 $\Gamma\models q$

证明：任取一个使Γ中成员的真值都为 1 的赋值 v。

由于 $\Gamma\models p$ 且 $\Gamma\models p\to q$，

所以 $v(p)=1$ 且 $v(p\to q)=1$

所以必有 $v(q)=1$，既 $\Gamma\models q$。 证毕

3 $\Gamma\cup\{p\}\models q \Leftrightarrow \Gamma\models p\to q$

证明：任取一个使Γ中成员的真值都为 1 的赋值 v。

先证充分性（⇒）

设 $\Gamma\cup\{p\}\models q$。

若 $v(p)=1$ 则根据 $\Gamma\cup\{p\}\models q$ 可得 $v(q)=1$，此时 $v(p\to q)=1\to 1=1$；

若 $v(p)=0$ 则 $v(p\to q)=0\to v(q)=1$。

所以必有 $v(p\to q)=1$，既 $\Gamma\models p\to q$。

再证必要性（⇐）

设 $\Gamma\models p\to q$。

因此 $v(p\to q)=1$。

因此若 $v(p)=1$ 则必有 $v(q)=1$。

所以 $\Gamma\cup\{p\}\models q$。 证毕

4 $\varnothing\models p \Leftrightarrow \models p$

证明：先证充分性（⇒）

设$\varnothing\models p$。

任取一个 L(X) 的赋值 v。

显然地，对任一 $q\in\varnothing$ 有 $v(q)=1$。

根据$\varnothing\models p$ 可得 $v(p)=1$。

所以$\models p$。

再证必要性（⇐）

设$\models p$。

任取一个使∅中成员的真值都为 1 的赋值 v。

由于$\models p$，

所以 $v(p)=1$。

所以$\varnothing\models p$。 证毕

P165: 2

1.1 证明 K_N 中的同一公式不能用来表示两个不同的关系。

证明：假设存在着含有 k 个自由变元的公式 $p(x_1,\ldots,x_k)$，它可以表示两个 N 上的 k 元关系 R_1 与 R_2。又假设$|R_1|\geq|R_2|$。

所以必然存在 $n_1,\ldots,n_k\in N$，使得

(1) $(n_1,\ldots,n_k)\in R_1$，且

(2) $(n_1,\ldots,n_k)\notin R_2$。

由于 R_1 与 R_2 用公式 $p(x_1,\ldots,x_k)$在 K_N 中可表示，所以根据(1)和(2)可得：

(3) $N\vdash p(\underline{n_1},\ldots,\underline{n_k})$，且

(4) $N\vdash -p(\underline{n_1},\ldots,\underline{n_k})$。

(3)和(4)的同时成立与 N 的无矛盾性相矛盾。所以不存在这样的公式。

证毕

P170: 4

4 二元关系"〉"可以用 K_N 中的什么公式表示？

答：可以用公式来$\forall x_3-(x_3+x_1\approx x_2)$表示。

P88: 2、3.2；P89: 4.1

2 试证对任意公式 p 与 q，有$\vdash\forall x_i(p\to q)\to(\forall x_i p\to\forall x_i q)$。

证明：以下是 K 中$\forall x_i q$ 从$\{\forall x_i(p\to q), \forall x_i p\}$的一个"证明"。

(1) $\forall x_i(p\to q)$ 假定

(2) $\forall x_i(p\to q)\to(p\to q)$ (K4)

(3) $p\to q$ (1), (2), MP

(4) $\forall x_i p$ 假定

(5) $\forall x_i p\to p$ (K4)

(6) p (4), (5), MP

(7) q (3), (6), MP

(8) $\forall x_i q$ (7), Gen

在以上过程中，除 x_i 外没有使用别的 Gen 变元。x_i 不在$\forall x_i(p\to q)$和$\forall x_i p$ 中自由出现。所以根据演绎定理可得$\vdash\forall x_i(p\to q)\to(\forall x_i p\to\forall x_i q)$。 证毕

3.2 求证$\{\forall x_1\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)\}\vdash\forall x_2\forall x_3 R_1^2(x_2,x_3)$

证明：以下是 K 中$\forall x_2\forall x_3 R_1^2(x_2,x_3)$从$\{\forall x_1\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)\}$的一个"证明"。

(1) $\forall x_1\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ 假定

(2) $\forall x_1\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ (K4)

(3) $\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ (1), (2), MP

(4) $\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)\to R_1^2(x_1,x_3)$ (K4)

(5) $R_1^2(x_1,x_3)$ (3), (4), MP

(6) $\forall x_1 R_1^2(x_1,x_3)$ (5), Gen

(7) $\forall x_1 R_1^2(x_1,x_3)\to R_1^2(x_2,x_3)$ (K4)

(8) $R_1^2(x_2,x_3)$ (6), (7), MP

(9) $\forall x_3 R_1^2(x_2,x_3)$ (8), Gen

(10) $\forall x_2\forall x_3 R_1^2(x_2,x_3)$ (9), Gen 证毕

4.1 设 x_1 不在 p 中自由出现。求证$\vdash(p\to\forall x_1 q)\to\forall x_1(p\to q)$。

证明：以下是 K 中$\forall x_1(p\to q)$从$\{p\to\forall x_1 q\}$的一个"证明"。

(1) $p\to\forall x_1 q$ 假定

(2) $\forall x_1 q\to q$ (K4)

(3) $p\to q$ (1), (2), HS

(4) $\forall x_1(p\to q)$ (3), Gen

以上"证明"中只使用了 x_1 这一个 Gen 变元。由于 x_1 不在 p 中自由出现，所以 x_1 不在 $p\to\forall x_1 q$ 中自由出现。因此根据演绎定理，不增加新的 Gen 变元就可得$\vdash(p\to\forall x_1 q)\to\forall x_1(p\to q)$。 证毕

P117: 1.1、3.4

1.1 证明$\models\exists x_1\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_2\exists x_1 R_1^2(x_1,x_2)$

证明：取任意一个 K 的解释域 M，以及任意一个项解释$\varphi\in\Phi_M$。记 $p=\exists x_1\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_2\exists x_1 R_1^2(x_1,x_2)$、$p'=\exists x_1\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)$、$p''=\forall x_2\exists x_1 R_1^2(x_1,x_2)$。

(1) 若$|p'|(\varphi)=0$，则$|p|(\varphi)=|p'|(\varphi)\to|p''|(\varphi)=0\to|p''|(\varphi)=1$。

(2) 若$|p'|(\varphi)=1$，则存在φ的 x_1 变通φ′使得$|\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi')=1$。因此对φ′的任意 x_2 变通φ_2 有$|R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi_2)=1$。

(3) 设$|p'|(\varphi)=1$。取φ的任意一个 x_2 变通φ″，作φ″的 x_1 变通φ_1 使$\varphi_1(x_1)=\varphi'(x_1)$。此时$\varphi_1$ 是φ′的一个 x_2 变通。根据(2)有$|R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi_1)=1$。而$\varphi_1$ 是φ″的一个 x_1 变通，因此有$|\exists x_1 R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi'')=1$。又由于φ″是φ的任意一个 x_2 变通，因此有$|p''|(\varphi)=1$。所以$|p|(\varphi)=|p'|(\varphi)\to|p''|(\varphi)=1\to 1=1$。

由(1)和(3)可知，对任意的解释域 M 以及任意的项解释$\varphi\in\Phi_M$，总有$|p|(\varphi)=1$。所以有$\models p$。 证毕

3.4 证明$\forall x_1 R_1^2(x_1,x_1)\to\exists x_2\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)$不是有效式

证明：取 K 的一个解释域 M=N，且 R_1^2 解释为≤。则有$|\forall x_1 R_1^2(x_1,x_1)|_M=1$ 且$|\exists x_2\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)|_M=0$。因此$|\forall x_1 R_1^2(x_1,x_1)\to\exists x_2\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)|_M=1\to 0=0$。所以$\forall x_1 R_1^2(x_1,x_1)\to\exists x_2\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)$不是有效式。 证毕

额外习题

任给一个 K 的解释域 M，求证以下命题：

1. $|p|_M=1\Leftrightarrow|\forall x\, p|_M=1\Leftrightarrow|\forall p|_M=1$；
2. 若$|p|_M=1$ 且$|p\to q|_M=1$，则$|q|_M=1$；
3. 若$\Gamma\subseteq\Gamma'$且$\Gamma\models p$，则$\Gamma'\models p$。

证明：1. (课本上有具体证明，在此略)

2. (课本上有具体证明，在此略)

3. 任取一个Γ′的模型 M。由于$\Gamma\subseteq\Gamma'$，所以 M 是Γ的一个模型。又由于$\Gamma\models p$，所以有$|p|_M=1$。因此（由 M 的任意性可得）$\Gamma'\models p$。 证毕

求证对 $K^+(Y)$中所有闭式 q 有$\Gamma^*\vdash_{K^+}q\Leftrightarrow|q|_M=1$（其中 $K^+(Y)$、Γ*和 M 的定义间书中"K 的可靠性"一节）。

证明：（具体证明可参考课本，在此略）

4 思考题提示

思考题1-1 试用联接词表达自然语言中的"如果……则"

$p\to q$

思考题1-2 同一律证明是否一定要用（L1）

仅当$\models q$

p为重言式为语义后承$\Gamma\models p$的特例$(\Gamma=\Phi)$

1° $\Gamma=\{p_1...p_n\}$有限

思考题1-1 试用联接词表达自然语言中的“如果……则”

$p \to q$

思考题1-2 同一律证明是否一定要用（L1）

一定要用

定义特征函数$\delta(p) \in S$.设:

$(1)\delta(L2) \in S$

$(2)\delta(L3) \in S$

(3)MP可以保持这个特征:即$\delta(p) \in S$且$\delta(p \to q) \in S \Rightarrow \delta(q) \in S$

$\Longrightarrow \{L2, L3, MP\} \vdash r \Rightarrow \delta(r) \in S$

若$\delta(r) \notin S$,说明$\delta(r)$ 不能由$L2, L3, MP$推出

$\delta(p) \in S$是一个三值函数，定义一个三值真值表

证明$\delta(p \to p) \notin S$即可

(附：特征函数的定义)

k元关系$R(\subseteq N^k)$的特征函数$C_R : N^k \to \{0, 1\}$是用下式定义的

$$C_R(n_1, \ldots, n_k) = \begin{cases} 1 & (n1, \ldots, n_k) \in R \\ 0 & (n1, \ldots, n_k) \notin R \end{cases}$$

思考题1-3 演绎定理说明了什么

蕴含词的解释：蕴含词（$\to$）必须被解释（或者说赋值）为实质蕴含(真值表表示的蕴含)。否则，三个公理不成立，以及语义语法之间可能出现不一致

可以简化证明

思考题1-4 双否律$\{\neg\neg p\}$ 无需证明,因为$\neg\neg p$与p相同，对吗

不对，在L（X）中，由层次性可知，$\neg\neg p \neq p$

思考题1-5 直接证明$\vdash (\neg p \to p) \to p$最少需要几步

⊙∇⊙ 只能做23步的渣渣不会呀……> _ <

思考题1-6

1° 语义后承与重言式有何关系

2° 论断是否成立：任给$\Gamma \subseteq L(X)$和$p \in L(X)$，存在$q \in L(X)$使$\Gamma \vDash p$ 当且仅当$\vDash q$

p为重言式为语义后承$\Gamma \vDash p$的特例$(\Gamma = \Phi)$

1° $\Gamma = \{p_1 ... p_n\}$有限

$q = p_1 \to (p_2 \to ...(p_n \to p)...)$

则由语义的演绎定理可得$\Gamma \vDash p \Leftrightarrow \vDash q$

2° Γ无限

利用紧致性，得到$\Gamma \vDash p \Rightarrow$有限子集$\Gamma' \vDash p$,转为1°

思考题1-7 $\Gamma \vdash p$是否是可判定的

一类问题可判定的标准：

(1) 该类问题中的每一个问题实例只有“是”或“否”两种回答

(2) 存在一个“能行”方法A，使得对该类问题的每一实例，A都可以在有限时间内给出正确答案

命题逻辑的可判定性 存在一个能行方法A,对$P \in L(X)$，当$\vdash P$时，A回答yes，当$\nvdash P$时A回答no.

利用L的可靠性和完全性：$\Gamma \vdash p \Leftrightarrow \Gamma \vDash p$

因此可以通过真值表来进行判定

首先要做的就是指派和赋值（赋值此处不需要），对于指派，这里要求是对变元的任意指派

(1)Γ集有限

(2)Γ集无穷

外延：一阶逻辑的判定问题

1° 任给符号是否是K的公理 √

2° 任给公式p, q, r,是否从p, q用MP规则推出r √

3° 任给公式p, q,q是否从p中用Gen规则推出 √

4° 任给公式序列，是否是K的一个形式证明 √

5° 任给公式p是否是K的内定理 ×

思考题2-1 （K4）（K5）限制条件有何意义？举例

限制条件的意义在于保证K4，K5在任何解释域M下均恒真，即有效式

(K4) 为一个由多到一的推论，限制条件保证了不再有更多的约束条件出现

无限制的反例：$M\{R, \Phi, >\}$

$$\forall x \exists y R_1^2(x, y) \to \exists y R_1^2(y, y)$$

(K5) 为一个由一到多的推论，限制条件保证了不会有约束条件被忽略

无限制的反例：$M\{R, \Phi, \{R_1^1 :> 2, R_2^1 :> 1\}\}$

$$\forall x(R_1^1(x) \to R_2^1(x)) \to (R_1^1(x) \to \forall x R_2^1(x))$$

思考题2-2 K演绎定理的限制有何意义？

无限制反例：

$\because \quad R_1^1(x_1) \vdash \forall x_1 R_1^1(x_1)$ UG

$\therefore \quad \vdash R_1^1(x_1) \to \forall x_1 R_1^1(x_1)$

再利用K的可靠性和完全性，从语义上说明

思考题2-3 真在一阶逻辑里有那几个层次？它们的关系

$$\text{三层}\begin{cases} \text{M可满足:在一个}M\text{中，在一种项解释}\varphi\text{下，}p\text{是真的} \\ \text{M有效：在一个}M\text{中，在任一项解释}\varphi\text{下，}p\text{是真的} \\ \text{(模型类有效：}\Gamma \vDash p\text{ 在任一使}\Gamma\text{中公式为真的}M\text{中，在任一项解释}\varphi\text{下，}p\text{是真的)} \\ \text{M逻辑有效：在任何}M\text{中,在任一项解释}\varphi\text{下，}p\text{是真的} \end{cases}$$

M可满足：设$I = \{M, V, v\}$是$K(Y)$的一阶解释，$p \in K(Y)$,若$I(p) = t$，则称p在I下为真，又称p在M下可满足

M有效：设M为任一一阶结构，$p \in K(Y)$,若对一切V，p在$I\{M, V, v\}$下为真，则称p在M中有效（p是M有效的，M是p的一个模型，记为$M \vDash p$）

逻辑有效：设$p \in K(Y)$,若对一切一阶结构M，若$M \vDash p$，则称p为逻辑有效的，记为$\vDash p$

思考题2-4 若$\Gamma \vDash p$,则对一切解释I，若$\forall q \in \Gamma$有$I(q) = t$.则$I(p) = t$?

不正确。

$\Gamma \vDash p \Leftrightarrow \forall M \vDash \Gamma$ 则$M \vDash p$

换成一切解释，可能其一阶结构M不再是Γ的模型，则$\vDash$约束不再存在

$(\neg\neg p \to \neg\neg p))$ $(L2)$

$(3)(\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $MP(1)(2)$

$(4)\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $(L1)$

$(5)\neg\neg p \to \neg\neg p$ $MP(3)(4)$

$(6)\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $(L1)$

$(7)(\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $(L3)$

$(8)((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to$

思考题3-1 L是否“强迫”$'\to'$解释为实质蕴含（语义解释）

是，为了$L1 \sim L3$的成立，$'\to'$ 必须解释为实质蕴含

$L1, L2, MP$强迫$\to$解释为实质蕴含,在此基础上，$L3$强迫$\neg$ 解释为非

5 杂记

HS直接证明

$(1)(q \to r) \to (p \to (q \to r))$ $(L1)$

$(2)(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ $(L2)$

$(3)((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to ((q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))))$ $(L1)$

$(4)(q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ $MP(2)(3)$

$(5)((q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))) \to (((q \to r) \to (p \to (q \to r))) \to ((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))))$ $(L2)$

$(6)((q \to r) \to (p \to (q \to r))) \to ((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ $MP(4)(5)$

$(7)(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ $MP(1)(6)$

$(8)((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)) \to (((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$ $(L2)$

$(9)((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ $MP(7)(8)$

$(10)(((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r))) \to ((p \to q) \to (((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r))))$ $(L1)$

$(11)(p \to q) \to (((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$ $MP(9)(10)$

$(12)((p \to q) \to (((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r)))) \to (((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to q))) \to ((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))))$ $(L2)$

$(13)((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to q))) \to ((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$ $MP(11)(12)$

$(14)(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to q)$ $(L1)$

$(15)(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)$ $MP(13)(14)$

双否律的直接证明

$(1)\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to \neg\neg p)$ $(L1)$

$(2)(\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to \neg\neg p)) \to ((\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to$

$(6)\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $(L1)$

$(7)(\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)$ $(L3)$

$(8)((\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)))$ $(L1)$

(5) $\neg\neg p \to \neg\neg p$ $\quad MP(3)(4)$

(6) $\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $\quad (L1)$

(7) $(\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $\quad (L3)$

(8) $((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)))$ $\quad (L1)$

(9) $\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))$ $\quad MP(7)(8)$

(10) $(\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))) \to ((\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)))$ $\quad (L2)$

(11) $(\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))$ $\quad MP(9)(10)$

(12) $\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $\quad (L1)$

(13) $\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $\quad MP(11)(12)$

(14) $(\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ $\quad (L3)$

(15) $((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)) \to (\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)))$ $\quad (L1)$

(16) $\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))$ $\quad MP(14)(15)$

(17) $(\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))) \to ((\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)))$ $\quad (L2)$

(18) $(\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p))$ $\quad MP(16)(17)$

(19) $\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)$ $\quad MP(13)(18)$

(20) $(\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)) \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))$ $\quad (L2)$

(21) $(\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ $\quad MP(19)(20)$

(22) $\neg\neg p \to p$ $\quad MP(5)(21)$

第二双否律的直接证明

(1) $\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to \neg\neg\neg p)$ $\quad (L1)$

(2) $(\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to \neg\neg\neg p)) \to ((\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p))$ $\quad (L2)$

(3) $(\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $\quad MP(1)(2)$

(4) $\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $\quad (L1)$

(5) $\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p$ $\quad MP(3)(4)$

(7) $(\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)$ $\quad (L3)$

(8) $((\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)))$ $\quad (L1)$

(9) $\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p))$ $\quad MP(7)(8)$

(10) $(\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p))) \to ((\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)))$ $\quad (L2)$

(11) $(\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p))$ $\quad MP(9)(10)$

(12) $\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $\quad (L1)$

(13) $\neg\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)$ $\quad MP(11)(12)$

(14) $(\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p) \to (\neg\neg\neg p \to \neg p)$ $\quad (L3)$

(15) $((\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p) \to (\neg\neg\neg p \to \neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p) \to (\neg\neg\neg p \to \neg p)))$ $\quad (L1)$

(16) $\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p) \to (\neg\neg\neg p \to \neg p))$ $\quad MP(14)(15)$

(17) $(\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p) \to (\neg\neg\neg p \to \neg p))) \to ((\neg\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg p \to \neg p)))$ $\quad (L2)$

(18) $(\neg\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg p \to \neg p))$ $\quad MP(16)(17)$

(19) $\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg p \to \neg p)$ $\quad MP(13)(18)$

(20) $(\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg p \to \neg p)) \to ((\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg\neg p \to \neg p))$ $\quad (L2)$

(21) $(\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg\neg p \to \neg p)$ $\quad MP(19)(20)$

(22) $\neg\neg\neg p \to \neg p$ $\quad MP(5)(21)$

(23) $(\neg\neg\neg p \to \neg p) \to (p \to \neg\neg p)$ $\quad (L3)$

(24) $p \to \neg\neg p$ $\quad MP(22)(23)$

证明等值, 可以列真值表