No.
Date

数理逻辑

第0章 导论

0.1 学习数理逻辑的意义

科学意义：了解西方科学的思维方式与传统

学科意义：学习计算机科学的重要基础工具

(1) 数理逻辑与西学传统的思维方式

△ 现代科学主要是建立在西学传统之上的.

△ 西学传统的核心是"分析"和"实验/实证."

（中国传统的核心是"综合"和"思辨"）

△ "分析"的基础是"理性"(reason)

△ 理性的集中体现是逻辑

△ 数理逻辑是逻辑的一个分支，是迄今最成熟的逻辑，是形式化的逻辑

"The development of Western science has been based on two great achievements, the invention of the formal logical system (in Euclidean geometry) by the Greek philosophers, and the discovery of the possibilities of finding out the casual relationships by systematic experiment (at the Renaissence). In ~~one~~ my opinion one need not be astonished the Chinese sages did not make these steps. The astonishing thing is that these discoveries were made at all."

欧几里德几何

(2) 数理逻辑是计算机科学的基础

△ Leibniz (1646-1716)　"通用语言"

△ Boole (1815-1864)　"小系统实现"

△ Frege (1848-1925)　第一个完成逻辑演算

△ Hilbert (1862-1943)　Hilbert方案

△ Gödel (1906-1978)　充分复杂的形式系统不可判定

△ Turing (1912-1952)　提出图灵机模型

(3) 以数理逻辑为基础的形式化方法是计算机科学的重要基础和工具

△ 计算的建模

No.
Date

- 程序语言的语义
- 数据库的语义
- △ 逻辑程序设计　Prolog, ASP
- △ 自然语言处理
- △ 自动推理
- △ 智能体(agent)和多智能体系统(MAS)
- △ 其他：model checking
- 思维训练

.2 基础概念

1) 什么是逻辑？

传统观点：逻辑是研究推理/思维的正确形式

2) 分类

① 演绎　例：鸟会飞、燕子是鸟、燕子会飞　前提成立则结论成立 "有效性"

② 归纳　例：燕子会飞、乌鸦会飞……，鸟会飞　前提成立则结论不成立

③ 类比　例：燕子是鸟，燕子会飞，企鹅是鸟　企鹅会飞

) 为什么研究"正确形式"？

鸟会飞，布什是鸟　布什会飞　有效推理！

) 为什么以"形式正确"为标准和研究目标？

① 某些命题的正确与否不是逻辑可以解决的

② 形式正确与否独立于观察和实验，正确形式可以应用于科学和日常思维实践，例

$\Gamma_{牛} \models p$ ×；$\Gamma_{爱} \models \neg p$ ✓　实验结果p不成立，说明牛顿力学有问题

.3 课程安排

推荐教辅：王宪钧《数理逻辑引论》
莫绍揆《数理逻辑简介》等　｛形式化的数学内容不看
侯世达：哥德尔(Gödel)，艾舍尔，巴赫……
刘晓力：理性的生命——哥德尔思想研究
王浩：哥德尔研究

No.

Date

讲课：
陈小平　　xpchen@ustc.edu.cn

思考题0-1 "注重推理过程的可靠性"与"注重推理结论的正确性"有何不同?

Chap.1 命题逻辑

1.1 命题与联结词

△命题是有真假的陈述句.(只要有真假,即使不能讨论也是命题)

例如: (1) 雪是白的.(经验命题)

(2) 2+2=4 (数学命题)

(3) 5000年前,太阳从西边出来.(时态命题)

(4) 他相信9.11事件是伪造的.(模态命题)

(5) 你吃了吗? (不是命题)

(6) 别说话! (同上)

(7) 本命题是假的.(同上)

△在命题逻辑中不研究时态命题和模态命题.

△命题的分类: 1°简单命题 2°复合命题 例如:

(1)(2)是简单命题. (3)、(4)视为复合命题,也是简单命题.

△逻辑常项: 命题逻辑的逻辑常项是联结词,常用的有5个:

¬(~, ‾) 否定词　¬P读为"非P"

∨　析取词　P∨q读为"P或q"

∧(&) 合取词　P∧q读为"P且q"

→(⊃) 蕴含词　P→q读为"P蕴含q"

↔(≡) 等值词　P↔q读为"P等值于q"

△命题逻辑只分析到联结词,对其他逻辑常项(∀,模态词,时态等)"视而不见"

但联结词一定区分出来.含联结词的命题称为复合命题,例:

(8) 雪是白的并且2+2=4.　$P\wedge q$

(9) 雪是白的或者2+2=4　$P\vee q$

(10) 并非雪是白的.　$\neg P$

(11) 雪是白的蕴含2+2=4　$P\to q$

(12) 雪是白的等值于2+2=4　$P\leftrightarrow q$

No.
Date

△命题的"内容"与"真假"

1° "内容"：说了什么.

2° "真假"：也叫真值、命题是否成立

Frege 逻辑是一种"外延逻辑"（只考虑真值，不考虑内容）

△命题逻辑中的推理方式：1° 用命题演算 2° 用真值表（语义推理）

习题1-1（Warson 实验）

设有四张纸牌，每张牌的一面有△，另一面有○，△和○的颜色或红或蓝。四张牌放在桌子上：红△ 蓝○ 红○ 蓝△

有人提出猜测："若朝上一面是红△，则另一面是蓝○"，要求通过翻牌来检验此猜测是否成立？问应该板几张牌？怎么板？能否确定此猜测是否成立？

思考题1-1 用逻辑联结词表达自然语言中的"如果…，则…"。

1.2 命题演算 L

"命题逻辑的形式公理系统"

- L
  - L构成
    - L语言
    - 推理设施
      - 公理模式
      - 规则
  - 推理
    - 形式证明
    - 形式推导

1.2.1 命题演算的形式系统 L

I. 命题语言

(a) 符号表/字母表

△命题符号/命题变元 //代表原子命题//

$x_1, x_2, x_3, \cdots$ //可数无穷多个//

△ 基本联结词：$\neg$, $\rightarrow$

△ 辅助符号：(,)

b) 公式 //代表命题//

1° 任何命题符号是公式，称为原子公式

2° 若 p 是公式，则 $\neg p$ 是公式，称为否定式

3° 若 p, q 是公式，则 $p \rightarrow q$ 是公式，称为蕴涵式

4° 只有经过有限次应用以上步骤生成的是公式

"形成规则"

X为全体命题符号的~~规则~~集合,则命题语言(全体命题公式的集合)记为$L(X)$
时考虑X的一个子集$X_n=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$生成的所有公式的集,记为$L(X_n)$
注意:形成规则中的p, q, 本身不是L公式,只是代表L公式, $p, q \notin L(X)$

1. 推理设施

(a) 公理模式

(L1) $p\to(q\to p)$ (L2) $(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$

(L3) $(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$

上述三条本身不是公理,代表无穷多公理

$x_1\to(x_2\to x_1)$ 公理

$x_2\to(x_2\to x_2)$ …

$x_3\to(x_2\to x_3)$ …

....

(b) 推理设施

(MP) 从p和$p\to q$推出q. //分离规则// 有效的

p和$p\to q$真,则q真

1.2.2 L中形式推导和形式证明

(1) 形式证明 任给公式p, p在$L(X)$中的一个形式证明是$L(X)$中的一个公式序列p_1, p_2
$\cdots p_n$,其中p_n就是p(p_n与p代表同一个$L(X)$中公式,记为$p_n=p$),满足对任何一个k,
代表同一个
代表$L(X)$中公式

代表同一个

$(1\le k\le n)$: 1° p_k是一条公理,或者

2° 存在p_i, p_j, $(i, j<k)$使$p_j=p_i\to p_k$

若存在p的一个形式证明,则称p是可证的,又称p为L的一个内定理,记为$\vdash_L p$,简记$\vdash p$.

例1. 试证$\vdash(x_1\to x_2)\to(x_1\to x_1)$

解: (1) $\underbrace{x_1\to(x_2\to x_1)}_{p}$ (L1)

(2) $\underbrace{(x_1\to(x_2\to x_1))\to((x_1\to x_2)\to(x_1\to x_1))}_{p\to q}$ (L2)

(3) $\underbrace{(x_1\to x_2)\to(x_1\to x_1)}_{q}$ (MP: 1,2)

得证

No.
Date

Ⅲ 形式推导

任给公式 p 和公式集 Γ，p 的一个从 Γ 的形式推导是一个公式序列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ ($p_n = p$)，满足对任何 k ($1 \le k \le n$)：

1° p_k 是公理；或者 2° 存在 p_i, p_j ($i, j < k$) 使 $p_j = p_i \to p_k$；或者 3° $p_k \in \Gamma$。

若存在 p 的一个从 Γ 的形式推导，称 p 从 Γ 可推，记为 $\Gamma \vdash p$，称 Γ 为 p 的前提集

例2. 证 $\{x_1\} \vdash x_2 \to x_1$

解 (1) x_1 前提

(2) $x_1 \to (x_2 \to x_1)$ (L1)

(3) $x_2 \to x_1$ (MP; 1, 2)

得证

例3 (同一律) $p \to p$

例4 (否定前件律) $\neg p \to (p \to q)$

习题1-2 P22 2(1°, 2°), 3(3°, 4°)

思考题1-2 同一律证明是否一定要用到(L1)? 证明你的结论 是的

1.3 L 的简单性质

这些性质得到证明的，称为"定理"

定理1 (单调性)

1° 若 $\Gamma \subseteq \Gamma'$ 且 $\Gamma \vdash p$，则 $\Gamma' \vdash p$

2° 若 $\vdash p$，则对任何 Γ，有 $\Gamma \vdash p$ (相当于在 1° 中令 Γ 为 ϕ，Γ' 为 Γ)

证。设 $\Gamma \subseteq \Gamma'$ 且 $\Gamma \vdash p$，依定义存在 $p_1, \cdots, p_n$ ($p_n = p$) 是 p 的一个从 Γ 的形式推导，显然 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 也是 p 的一个从 Γ' 的形式推导，所以 $\Gamma' \vdash p$

定理2 (紧致性) 若 $\Gamma \vdash p$，则存在有穷 $\Delta \subseteq \Gamma$，使得 $\Delta \vdash p$

证 设 $\Gamma \vdash p$，则存在 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ ($p_n = p$) 是 p 的一个从 Γ 的形式推导，令 $\Delta = \Gamma \cap \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$，显然有 $\Delta \vdash p$

义(一致/相容/无矛盾) 若存在公式 p 使得 $\Gamma \vdash p$ 且 $\Gamma \vdash \neg p$，则称 Γ 是不一致(不相容，矛盾)

No.
Date

的；否则称Γ是一致（相容，无矛盾）的.

定理3（平凡性）若Γ是不一致的，则对任何公式p有$\Gamma \vdash p$.

证：设Γ是不一致的，则有q使$\Gamma \vdash q$且$\Gamma \vdash \neg q$. 对任意公式p，构造一个p的从Γ的形式推导：

$\left.\begin{matrix}\vdots \\ q\end{matrix}\right\}$ $\Gamma \vdash q$的一个推导　　$\left.\begin{matrix}\vdots \\ \neg q\end{matrix}\right\}$ $\Gamma \vdash \neg q$的一个推导

$\left.\begin{matrix}\vdots \\ \neg q \to (q \to p)\end{matrix}\right\}$ $\vdash \underbrace{\neg q \to (q \to p)}_{\text{否定前件律}}$ 的一个证明（见课本）

$q \to p$　　(MP)

p　　(MP)

$\therefore \Gamma \vdash p$.

定理4（演绎定理）$\Gamma \cup \{p\} \vdash q$ 当且仅当 $\Gamma \vdash \underset{前件}{p} \to \underset{后件}{q}$

证（$\Leftarrow$）设$\Gamma \vdash p \to q$. 则$p \to q$有一个从Γ的形式推导$p_1, \cdots, p_n$（$p_n = p \to q$）于是$p_1, \cdots, p_n, p, q$是q的一个从$\Gamma \cup \{p\}$的推导形式.

（$\Rightarrow$）设$q_1, \cdots, q_n$（$q_n = q$）是q的一个从$\Gamma \cup \{p\}$的推导. 施归纳于n证明$\Gamma \vdash p \to q$.

(1) $n=1$　此时推导序列为q. 依定义有三种可能：① $q = p$；② $q \in \Gamma$ ③ q是公理　易证三种情形下都有$\Gamma \vdash p \to q$.（练习）

(2) $n > 1$　有四种情况：①～③同上. 类似(1)可证；④ q是由q_i和q_j（$q_j = q_i \to q$）应用MP推出的. 由归纳假设有 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q_i \Rightarrow \Gamma \vdash p \to q_i$

$(i, j < n)$　　$\Gamma \cup \{p\} \vdash q_j \Rightarrow \Gamma \vdash p \to q_j$

于是有$p \to q$的一个从Γ的推导：

(k) $\left.\begin{matrix}\vdots \\ p \to q_i\end{matrix}\right\}$ $\Gamma \vdash p \to q_i$的一个推导　(l) $\left.\begin{matrix}\vdots \\ p \to q_j\end{matrix}\right\}$ $\Gamma \vdash p \to q_j$的一个推导 $(q_j = q_i \to q)$

(l+1) $(p \to (q_i \to q)) \to ((p \to q_i) \to (p \to q))$　(L2)

(l+2) $(p \to q_i) \to (p \to q)$　MP: (l)(l+1)

(l+3) $p \to q$　MP: (k)(l+2)

$\therefore \Gamma \vdash p \to q$

No.
Date

根据归纳法原理，结论对一切n成立。 证毕

思考题1-3 演绎定理说明了什么？

推论（假设三段论，HS） $\{p\to q, q\to r\}\vdash p\to r$

证：依演绎定理，只需证 $\{p\to q, q\to r, p\}\vdash r$。显然，存在一个r的推导：$p, p\to q, q, q\to r, r$。

△ 使用了演绎定理等定理的推导/证明，称为"简化证明"；不用的，称为"直接证明"（按定义证明/推导）

命题（否定肯定律） $\vdash(\neg p\to p)\to p$

证. 依演绎定理，只需证明 $\{\neg p\to p\}\vdash p$.

(1)
⋮ → 见课本
(7) $\neg p\to(p\to\neg(\neg p\to p))$ ~~$\}\vdash\neg p\to(p\to q)$的一个实例的一个证明~~

(8) $(\neg p\to(p\to\neg(\neg p\to p)))\to((\neg p\to p)\to(\neg p\to\neg(\neg p\to p)))$ (L2)

(9) $(\neg p\to p)\to(\neg p\to\neg(\neg p\to q))$ MP(7)(8)

(10) $\neg p\to q$ 前提

(11) $\neg p\to\neg(\neg p\to p)$ MP(9)(10)

(12) $(\neg p\to\neg(\neg p\to p))\to((\neg p\to p)\to p)$ (L3)

(13) $(\neg p\to p)\to p$ MP(11)(12)

(14) p MP(10)(13)

得证.

定理5（反证律）若 $\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash q$ 且 $\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash\neg q$，则 $\Gamma\vdash p$.

定理6（归谬论）若 $\Gamma\cup\{p\}\vdash q$ 且 $\Gamma\cup\{p\}\vdash\neg q$，则 $\Gamma\vdash\neg p$.

定理7（双重否定律）

1° $\{\neg\neg p\}\vdash p$； 2° $\vdash\neg\neg p\to p$； 3° $\{p\}\vdash\neg\neg p$； 4° $\vdash p\to\neg\neg p$.

例：证明 $\vdash(\neg p\to\neg q)\to((\neg p\to q)\to p)$

证：依演绎定理，只需证 $\{\neg p\to\neg q, \neg p\to q\}\vdash p$。由于
$\{\neg p\to\neg q, \neg p\to q, \neg p\}\vdash\neg q$ 且
$\vdash\neg q$.

No.

Date

依反证律得 $\{\neg p\to\neg q, \neg p\to q\}\vdash p$. 得证.

思考题1-5 直接证明 $\vdash(\neg p\to p)\to p$, 最少需要多少步?

例(换位律) 证明 $\vdash(q\to p)\to(\neg p\to\neg q)$ 是(L3)?

证: 依演绎定理, 只需证 $\{q\to p\}\vdash\neg p\to\neg q$.

(1) $q\to p$ 前提

(2) $\neg\neg q\to q$ 双否律

(3) $\neg\neg q\to p$ HS(1)(2)

(4) $p\to\neg\neg p$ 双否律

(5) $\neg\neg q\to\neg\neg p$ HS(3)(4)

(6) $(\neg\neg q\to\neg\neg p)\to(\neg p\to\neg q)$ (L3)

(7) ~~并~~ $\neg p\to q$ MP(5)(6) 得证

习题1-3 分别用简化~~和~~证明和演绎证明: ① P_{22}: 2(3°) ② P_{22}. 3(1°)

③ P_{25}. 1 ④ P_{29}: 1. 13°, 4°, 5°)

思考题 编写一个程序自动证明: 任给 Γ 和 p, $\Gamma\vdash p$ 是否成立.

问用直接证明还是简化证明更简单.

称公式 q 是公式 p 的子公式, 如果 q 在 p 中出现. 如 x_1 是 x_1, $\neg x_1$, $x_1\to x_2$, … 的子公式; $\neg(x_1\to x_2)$ 是 $x_1\to\neg(x_1\to x_2)$ 的子公式.

定理8 (可证等价替换规则) 设 q 是 p 的子公式, q' 是任意公式, p' 是用 q' 替换 p 中的 q 所得公式. 若 $\vdash q\to q'$ 且 $\vdash q'\to q$, 则 $\vdash p\to p'$ 且 $\vdash p'\to p$ 证明: 练习

问题: 内定理和定理有什么区别?

$x_1\to x_2$ 什么含义? "蕴涵".

1.4 定义联结词

L中基本联结词: $\to$, $\neg$

定义联结词: $\vee$, $\wedge$, ~~$\leftrightarrow$~~ $\leftrightarrow$

L (I) (II) (III) 定义:

No.
Date

表达式

$p \vee q =_{df} \neg p \to q$
$p \wedge q =_{df} \neg(p \to \neg q)$
$p \leftrightarrow q =_{df} (p \to q) \wedge (q \to p)$

左边的表达式代表右边公式.
是右边公式的简写

命题1

1° $\vdash p \to (p \vee q)$ [即 $\vdash p \to (\neg p \to q)$] [V-引入]

2° $\vdash (p \vee q) \to (q \vee p)$ ["析取"这个联结词有交换性] [V-交换律]

3° ~~$\vdash (p \vee q)$~~ $\vdash (p \vee p) \to p$ [V-幂等律]

4° $\vdash \neg p \vee p$ [排中律]

证. 1° 依定义, 只需证 $\vdash p \to (\neg p \to q)$, 依可证等价替换规则及否定前件律 $\vdash \neg\neg p \to (\neg p \to q)$

No.
Date

命题2

1° $\vdash (p\wedge q)\to p$ {像$\vdash p\to(p\vee q)$一样,是重言式。} ~~(∧引入)~~ (∧消

2° $\vdash (p\wedge q)\to(q\to p)$

3° $\vdash p\to(p\wedge p)$

4° $\vdash \neg(p\wedge\neg p)$ (无)矛盾律

命题3

1° $\vdash \neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$

2° $\vdash \neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$

形式证明、形式推导的定义中,需补充一个条件:

(4) 存在 $i<k$ 使得 $P_i = df\ P_k$ 或 $P_k = df\ P_i$;

例 (i) $x_1\vee x_2$

⋮

(k) $\neg x_1\to x_2$ 定义

习题1-5 P_{32} 1,2.

1.5 L的语义解释

L是一个"形式系统",它的语义解释给语言中的所有对象赋予数学含义。

定义1(指派,命题变元的解释) L(X)的一个指派是一个映射 $v_0: X\to\{t,f\}$.
真假

($v_0(x_i)\in\{t,f\}$, $\{t,f\}$称作真值集)

定义2(赋值,联结词解释原则) L(X)的一个赋值v是一个满足下列条件的映射:

1° $v(\neg)$是一个函数$\{t,f\}\to\{t,f\}$ 一元真值函数 规定¬为一个

在L中→为蕴涵,而在此为映射.

2° $v(\to)$是一个函数 $\{t,f\}^2\to\{t,f\}$ →解释为二元真值函数

即联结词解释为真值函数(即定义域、值域都是$\{t,f\}$的函数

定义3(标准赋值) 标准赋值是满足下列条件的赋值v:

1° $v(\neg)=f_\neg$, $f_\neg$定义如下

x_i	$f_\neg(x_i)$
t	f
f	t

即

x_i	$\neg x_i$
t	f
f	t

No.
Date

$v(\to) = f_{\to}$，$f_{\to}$定义如下

	t	f
t	t	f
f	t	t

即

$x_1 \backslash x_2$ ($x_1 \to x_2$)	t	f
t	t	f
f	t	t

(定义4) L的标准解释）L(X)的一个(标准)解释 $I=(v_0, v)$ 是由一个指派v_0和(标准)赋值v组成的映射$I: L(X) \to \{t, f\}$，满足

1° 对任何命题变元x，$I(x) = v_0(x)$；

2° 对任意公式p，$\underbrace{I(\neg p) = v(\neg) I(p)}_{\text{定义4}} = \underbrace{f_{\neg}(I(p)) = \begin{cases} t, & I(p)=f; \\ f, & I(p)=t \end{cases}}_{\text{定义3}}$

3° 对任意公式p, q，$I(p\to q) = v(\to)(I(p), I(q)) = f_{\to}(I(p), I(q))$

$$= \begin{cases} f, & I(p)=t \text{ 且 } I(q)=f; \\ t, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \#$$

例. 设$v_0(x_1) = f$，$v_0(x_2) = t$，则

$$\begin{aligned} I(\neg x_1 \to x_2) &= f_{\to}(I(\neg x_1), I(x_2)) \\ &= f_{\to}(f_{\neg}(I(x_1)), v_0(x_2)) \\ &= f_{\to}(f_{\neg}(v_0(x_1)), t) \\ &= f_{\to}(f_{\neg}(f), t) \\ &= f_{\to}(t, t) \\ &= t \end{aligned}$$

$x_1 \backslash x_2$	t	f
t	t	f
f	f	f

$I(x_1 \wedge x_2)$

$f_{\wedge}(x_1, x_2)$

$x_1 \backslash x_2$	t	f
t	t	t
f	t	f

$x_1 \vee x_2$

$x_1 \backslash x_2$	t	f
t	t	f
f	f	t

$x_1 \leftrightarrow x_2$

则：$\neg x_1 \to x_2$

x_1	x_2	$\neg x_1$	$\neg x_1 \to x_2$
t	t	f	t
t	f	f	t
f	t	t	t

真值表法

No.
Date

~~定义~~ 例 重言式(在所有 v_0 下为 t)

p	p→p
t	t
f	t

p	q	p∧q	p∧q→p
t	t	t	t
t	f	f	t
f	t	f	t
f	f	f	t

看→的特点.

矛盾式(所有 v_0 下为 f)

¬(p→p) , ¬p∧p

偶然式(既非重言式,又非矛盾式)

¬p→p

p	¬p	¬p→p
t	f	t
f	t	f

定义(语义后承,逻辑推论)任给公式集Γ,公式p,称p为Γ的一个语义后承,记为Γ⊨p,如果对L的所有解释I有下列关系成立:只要Γ中每一个公式q满足I(q)=t,则I(p)=t.

例. {p, p→q} ⊨ q.

p	q	p→q	q
t	t	t	t
t	f	f	
f	t	t	
f	f	t	

→只有这一个满足Γ中每一个公式满足真

{¬p} ⊨ p→q

p	q	¬p	p→q
t	t	f	
t	f	f	
f	t	t	t
f	f	t	t

No.
Date

$\{p\} \models p \vee q$

p	q	$p \vee q$
t	t	t
t	f	t
f	t	t
f	f	f

推理的"有效性" 保真性　保真：保持前提的真

$\Gamma_{真} \models p$　　$\Gamma_{假} \models \neg p$

性质

1° 若 $\Gamma \subseteq \Gamma'$ 且 $\Gamma \models p$ 则 $\Gamma' \models p$.

2° 若 $\Gamma \models p$ 且 $\Gamma \models p \to q$ 则 $\Gamma \models q$.

3° $\Gamma \models p \to q$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{p\} \models q$.

4° p 是重言式，当且仅当 $\Phi \models p$.（记为 $\models p$）

习题. 证明性质 1°～4°（掌握核心定义）

思考题　语义后承与重言式有何关系？下列判定是否成立？

任给 Γ, p 存在 q s.t. $\Gamma \models p \Leftrightarrow \models q$

1.6 公式集的逻辑结构

$L(X)$ 中公式之间的逻辑关系：

1° p 与 q 互可推：$\{p\} \models q$ 且 $\{q\} \models p$.

2° q 从 p 可推：$\{p\} \models q$ 且 $\{q\} \not\models p$

3° p 与 q 互不可推：$\{p\} \not\models q$ 且 $\{q\} \not\models p$.

定义1（逻辑等值）

若 $\models p \leftrightarrow q$，则称 p 与 q 逻辑等值

命题2 $\models p \leftrightarrow q$ 当且仅当对所有解释 I：$I(p \leftrightarrow q) = t$

对所有解释 I：$I((p \to q) \wedge (q \to p)) = t$

对所有解释 I：$I(p \to q) = I(q \to p) = t$

对所有解释 I：$I(p \to q) = t$ 并且对所有解释 I：$I(q \to p) = t$

当且仅当 $\models p\to q$ 且 $\models q\to p$

当且仅当 $\{p\}\models q$ 且 $\{q\}\models p$.

推论3 若p与q逻辑等值，则对任何指派v_0，v_0是p的成真(成假)指派，当且仅当v_0是q的成真(成假)指派；反之亦然. [从性质2最后一个条件得到]

~~$v_0: X\to\{t,f\}$~~

两公式逻辑等值，则它们在语义是"不可分辨"的.

一个公式p所代表的"语义对象"是一个真值函数 $f_p: \{v_0\}\to\{t,f\}$.

实际上 $f_p: \{t,f\}^n\to\{t,f\}$, $p\in L(X_n)$

推论4 $\models p\leftrightarrow q$ 当且仅当 $f_p\equiv f_q$

性质5.
说明逻辑等值是一种等价关系 记为$R_\leftrightarrow$

1° $\models p\leftrightarrow p$; 自反

2° $\models p\leftrightarrow q \Rightarrow \models q\leftrightarrow p$; 对称

3° $\models p\leftrightarrow q$ 且 $\models q\leftrightarrow r \Rightarrow \models p\leftrightarrow r$; (用真值表证明) 传递

4° $\models p\leftrightarrow q \Leftrightarrow \models \neg p\leftrightarrow\neg q$.

由$R_\leftrightarrow$可得$L(X)$的一个划分，使得每个子集是一个等价类。每个等价类有唯一的真值函数 语义上是"同一的"；不同等价类中公式语义上不"同一".

考虑$L(X_n)$，$X_n=\{x_1,x_2,x_3\cdots x_n\}$. 易知，不同的n元真值函数，共有$2^{2^n}$个(练习)

因此 $L(X_n)$有2^{2^n}个等价类，所有重言式在一个等价类，所有矛盾式在一个等价类里.

"范式".

定义6(范式) 命题变元和命题变元的否定称为文字；文字的析取式 $l_1\vee l_2\vee\cdots\vee l_k$ 称为基本析取式或子句，子句的合取式称为合取范式，设l_{ij}是文字，则合取范式形如 $(l_{11}\vee\cdots\vee l_{1k_1})\wedge\cdots\wedge(l_{m1}\vee\cdots\vee l_{mk_m})$

析取范式则为：$(l_{11}\wedge\cdots\wedge l_{1k_1})\vee\cdots\vee(l_{m1}\wedge\cdots\wedge l_{mk_m})$

定义7 若q是一个合取(析取)范式且$\models p\leftrightarrow q$，则称q为p的一个合取(析取)范式.

下列步骤可求p的范式：1° 消去→和↔(用¬,∨的定义)

2° ¬深入(用双否律, DeMorgan律).

3° 整理(用交换律, …)

例：$(x_1\wedge(x_2\to x_3))\to x_2$ 的范式.

No.
Date

解：$\neg(x_1 \wedge (x_2 \to x_3)) \vee x_2$　　$\vee$定义

$(\neg x_1 \vee \neg(x_2 \to x_3)) \vee x_2$　　DeMorgan律

$(\neg x_1 \vee \neg(\neg x_2 \vee x_3)) \vee x_2$　　$\vee$定义

$\neg x_1 \vee (x_2 \wedge \neg x_3) \vee x_2$　　Demorgan律 双否律

析取范式 $(\neg x_1 \vee x_2) \vee (x_2 \wedge \neg x_3)$　　交换律、结合律

$(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_2)$　　分配律

合取范式 $\Leftarrow (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$　　幂等律

范式可以不唯一．比如，上例中公式有其他范式：$\neg x_1 \vee x_2$（练习）

$(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$

定义8（主范式）一个合取（析取）范式p是q的主合取（析取）范式，如果q中每个命题变元在p的每个基本析取（合取）式中都按下标由小到大的次序出现且仅出现一次．如 就是例题的主范式

定理（主范式存在、唯一性）每个非矛盾（非重言）式有唯一的主析取（合取）范式．（证明练习）

定理的证明同时给出了找主范式的方法

习题1-8　P_{55} 1(1°)　P_{59} 1(3°)

.7.1 可靠性

$\Gamma \vdash p \Rightarrow \Gamma \vDash p$

引理　若p是L的公理，则$\vdash p$．

证：对每一种公理模式，用真值表验证．考虑L(1)

x_1 … x_n	p	q	$q \to p$	$p \to (q \to p)$
	t	t	t	t
	t	f	t	t
	f	t	f	t
	f	f	t	t

L(2)、L(3)类似（练习）

定理（可靠性、语义一致性）$\Gamma \vdash p \Rightarrow \Gamma \vDash p$

证：设$\Gamma \vdash p$，则存在~~一个~~p的一个从Γ的推导$p_1, \cdots, p_n$ ($p_n = p$)，施归纳于n．

No.

Date

证明$\Gamma \vDash P_n$.

(1) $n=1$ 序列仅由p组成，故p是公理或$p\in\Gamma$，若$p\in\Gamma$，显然有$\Gamma\vDash p$.

若p是公理，由引理$\vDash p$，由语义单调性有$\Gamma\vDash p$.

(2) $n>1$ 分三种情况 ① P_n是公理 ⎫ 同上

② $P_n\in\Gamma$ ⎭

③ P_n是由P_i和$P_j(=P_i\to P_k)$用MP推出. 依归纳假设.

对P_i, P_j有：$\Gamma\vDash P_i$且$\Gamma\vDash P_j$ $(\Gamma\vDash P_i\to P_n)$ 由语义MP，得$\Gamma\vDash P_n$. 依归纳假设. 结论对一切n成立. 故$\Gamma\vdash p\Rightarrow\Gamma\vDash p$.

推理(无矛盾性，语义一致性) 不存在$p\in L(X)$使$\vdash p$且$\vdash \neg p$.

证：反证. 假设有p. 使$\vdash p$且$\vdash \neg p$. 则依可靠性定理有$\vDash p$且$\vDash \neg p$. 这是不可能的

No.
Date

No.
Date

第二章 一阶逻辑

{ 语法：一阶谓词演算
  语义：一阶语义

2.1 引言

L, L(X)：原子命题＋联结词

例：所有人会死　　x_1　　$\forall x(p(x)\to q(x))$

　　苏格拉底是人　　x_2　　$p(s)$

　　苏格拉底会死　　x_3　　~~$\{x_1, x_2\}\vdash x_3$~~　$q(s)$

$\{\forall x(p(x)\to q(x)), p(s)\}\vdash_K q(s)$

$\vDash q(s)$

。新的语法范畴：

1° 个体：如"苏格拉底"．　　s

2° 个体的函数：如："苏格拉底的父亲"，"…的父亲"．　　$f(x)$　[x代表个…

3° 个体的集合：如"人"，可以用谓词表示（一元）．

4° 个体的性质：如"…会死"，也可以用谓词表示（一元）．

5° 个体间的关系：如"…与…是朋友"，可以用谓词表示（二元）

6° 量词：如"所有"　∀（作用于个体）．"存在"　∃　　解释为"关系"

归约为四类：个体（常元，变元）；函数（函词）；谓词；量词（∀，∃）．

2.2 一阶谓词演算K的构成

I. 一阶语言

I1 字母表

I1a 逻辑符号

(i) 个体变元　　$x_1, x_2, \cdots$　　// 可数无穷多个 //

(ii) 联结词　　$\neg, \to$

(iii) 量词　　$\forall$　　// 全称量词 //　　（另一个（∃）由定义引入）

I1b 非逻辑符号

(iv) 个体常元　　$a_1, a_2, \cdots$　　// 可数无穷多个 //

(v) 函数符号　　$f_1^1, f_2^1, \cdots$　　// 一元函数符号，可数无穷多个 //

　　$f_1^2, f_2^2, \cdots$　　// 二元… //

　　$f_1^3, f_2^3, \cdots$　　// 三元… //

No.
Date

vi) 谓词符号

$P_1^0, P_2^0, \cdots$ //0元谓词符号// 确定的命题
$P_1^1, P_2^1, \cdots$ //一元谓词符号// 个体性质
$P_1^2, P_2^2, \cdots$ //二元谓词符号// 两个体间关系

} 可数无穷多个

I1c. 辅助符号 ( )

I2. 形成规则

I2a. 项(terms) //解释为个体//

(i) 个体变元和个体常元是项;

(ii) 若f是n元函数符号, $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是项, 则 $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 也是项

(iii) 只有经过有限次应用上述规则生成的是项

I2b. 公式 //解释为命题//

(i) 若P是n(≥0)元谓词符号, 而 $t_1, \cdots, t_n$ 是项, 则 $P(t_1, \cdots, t_n)$ 是公式 //原子公式//

(ii) 若p, q是公式, 则¬p和p→q是公式 //复合公式//

(iii) 若p是公式, x是个体变元, 则∀x p是公式; //量化公式//

(iv) 只有经过有限次应用以上规则生成的是公式.

[谓词和函数什么区别? 谓词将个体映射为真值; 函数将个体映射为个体. 两者组合时谓词在函数之外]

II 公理模式

K1) p→(q→p) //p, q是K公式//

K2) (p→(q→r))→((p→q)→(p→r))

K3) (¬p→¬q)→(q→p)

K4) ∀x p(x)→p(t) 项t对p(x)中的x自由.

K5) ∀x(p→q)→(p→∀x q) x不在p中自由出现

) 推理规则

MP) 从p, p→q推出q

UG) 从p推出∀x p

() 定义

No.
Date

(i) $p \wedge q =_{df} \neg(p \to \neg q)$
(ii) $p \vee q =_{df} \neg p \to q$
(iii) $p \leftrightarrow q =_{df} (p \to q) \wedge (q \to p)$
(iv) $\exists x\, p =_{df} \neg \forall x \neg p$.

○ 术语

(1) 子公式：若公式p在公式q中出现，则p是q的一个子公式.

例：$\forall x_1(P_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 P_2^2(x_2, x_3))$ 所含子公式：

① 自身 ② $P_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 P_2^2(x_2, x_3)$ ③ $P_1^2(x_1, x_2)$ ④ $\forall x_2 P_2^2(x_2, x_3)$

⑤ $P_2^2(x_2, x_3)$.

(2) 个体变元的自由出现与约束出现

1° $\forall x p$ 中x的所有出现都是约束出现. 称p为对$\forall x$的"辖域"

2° x在公式p中的一个出现x^0是约束出现，当且仅当存在p的一个子公式q，x^0在q中约束出现.

3° x在p中的一个出现是自由出现，当且仅当该出现不是约束出现.

例(续)

x_1约束出现二次，无自由出现；

x_2自由出现一次，约束出现两次；

x_3自由出现一次，无约束出现.

(3) 闭项：不含个体变元的项. 如 $f_1^2(a_1, x_1)$ 不是闭项

(4) 闭公式(语句)：所有个体变元在其中都没有自由出现的公式. 例如：$P_1^1(f_1^1(a_1))$,
$\forall x_1 P_1^1(f_1^1(x_1))$, $\forall x_2 P_1^2(x_2, a_1)$.

(5) 项t对p(x)中x自由. p(x)表示个体变元x可能在公式p中自由出现. 若x在p(x)中有自由出现，用t处处同时替换x在p(x)中的每一个自由出现，所得结果记为p(t). 若t中个体变元在p(t)中都是自由出现，则称项t对p(x)中x自由.

例： $p(x_1) = \forall x_2 P_1^1(x_1)$

① $t = x_2$ $\forall x_2 P_1^1(x_2) = p(t)$ t对$p(x_1)$中x_1不自由

No.
Date

) $t=x_1$　　t对 $p(x_1)$ 中 x_1 自由.

) $t=x_3$　— —— — —

) $t=f_1^1(a_1)$　$\forall x_2 p_1^1(f_1^1(a_1))=p(t)$　　t对 $p(x_1)$ 中 x_1 自由.

) $t=f_1^1(x_1)$　　t对 $p(x_1)$ 中 x_1 自由.

) $t=f_1^1(x_3)$　　自由

) $t=f_1^1(x_2)$　　不自由

1° 闭项对任何 $p(x)$ 中 x 自由.

2° x 对 $p(x)$ 中 x 自由.

3° x 在 $p(x)$ 中不自由出现，则对任何项 t，t对 $p(x)$ 中 x 自由.

思考题 2-1　(K4) 和 (K5) 的约束条件有何意义？举例说明.

习题 P_{81}　1; 2; 3

2.3 K的形式推导.

上节给出的系统记为K. 它的语言记为 $K(Y)$. Y是个体变元集合.

定义 对任何 $\Gamma \subseteq K(Y)$，$p \in K(Y)$，称p从Γ形式可推，记 $\Gamma \vdash_K p$，如果存在 p的一个从Γ的推导 $p_1, p_2, \cdots, p_n = p$，使得对所有 k ($1 \le k \le n$)：

1° p_k 是K的公理

2° $p_k \in \Gamma$

3° 存在 p_i 和 $p_j = p_i \to p_k$ 使 $i, j < k$ 或

4° 存在 p_i ($i<k$) 使 $p_k = \forall x p_i$

定义 若 $\Gamma \vdash_K p$，且 $\Gamma = \Phi$，则称p在K中形式可证，记为 $\vdash_K p$. p又称为K的一条内定理.

例 证明 $\{\forall x(p \to q), \forall x \neg q\} \vdash_K \forall x \neg p$.

(1) $\forall x(p \to q)$　前提

(2) $\forall x(p \to q) \to (p \to q)$　(K4)　取 $t=x$　"脱帽"

(3) $p \to q$　MP (1)(2)

(4) $\forall x \neg q$　前提

(5) $\forall x \neg q \to \neg q$　K4

(6) $\neg q$　MP(4)(5)

0594539182 郭1

No.
Date

(7) $(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$ 换位律

(8) $\neg q\to\neg p$ MP(3)(7)

(9) $\neg p$ MP(6)(8)

(10) $\forall x\neg p$ UG(9) "戴帽"

定理(K与L的关系) 设$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in L(X)$, $q_1,q_2,\cdots,q_n\in K(Y)$. 则$\vdash_L p(x_1,x_2,\cdots,x_n)\Rightarrow\vdash_K p(q_1,q_2,\cdots,q_n)$

证：设$p_1(x_1,\cdots,x_n)\cdots p_m(x_1,\cdots,x_n)(=p(x_1,x_2,\cdots,x_n))$是公式$p(x_1,\cdots$ 在L中的一个证明，则易知$p_1(q_1,q_2,\cdots,q_n)\cdots p_m(q_1,q_2,\cdots,q_n)$是公式$p(q_1,q_2,\cdots,q_n)$在K中的一个证明.

(L中一个内定理，将命题变元替换，得K中一个内定理)

(K是L的一个"扩张")

定理(K的性质)

1°(单调性) 若$\Gamma\subseteq\Gamma'$且$\Gamma\vdash_K p$，则$\Gamma'\vdash_K p$.

2°(紧致性) 若$\Gamma\vdash_K p$，则存在有限$\Delta\subseteq\Gamma$使$\Delta\vdash_K p$.

3°(平凡性) 若Γ不相容，则对任何$p\in K(Y)$，有$\Gamma\vdash_K p$.

定理(K演绎定理)

1° 若$\Gamma\vdash_K p\to q$，则$\Gamma\cup\{p\}\vdash_K q$.

2° 若$\Gamma\cup\{p\}\vdash_K q$，且推导中的概括变元不在p中自由出现，则$\Gamma\vdash_K p\to q$.

UG: $p\vdash\forall x p$中x即为概括变元

证明(作练习)

思考题：K演绎定理的限制条件有何意义？

定理(K反证律) 若$\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash_K q$且$\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash_K\neg q$，且所用概括变元不在p中自由出现，则$\Gamma\vdash_K p$.

定理(K归谬律) 若$\Gamma\cup\{p\}\vdash_K q$且$\Gamma\cup\{p\}\vdash_K\neg q$且概括变元不在p中自由出现，$\Gamma\vdash_K\neg p$.

定理($\exists_1$规则) 若t对$p(x)$中x自由，则$\vdash p(t)\to\exists x p(x)$

例($\exists_2$规则) 设$\Gamma\cup\{p\}\vdash q$，且概括变元不在p中自由出现，若x不在q中自

No.
Date

由出现，则 $\Gamma \cup \{\exists x p\} \vdash q$.

证：设 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$ 且概括变元不在 p 中自由出现. 依K演绎定理，得 $\Gamma \vdash p \to q$.

于是从 Γ 可推：

(1) $(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$ L内定理

(2) $p\to q$ 已知

(3) $\neg q\to\neg p$ (MP(1)(2))

(4) $\forall x(\neg q\to\neg p)$ UG(3)

(5) $\forall x(\neg q\to\neg p)\to(\neg q\to\forall x\neg p)$ (K5)(?注意用K5要看条件是否满足)

(6) $\neg q\to\forall x\neg p$ (MP(4)(5))

(7) $(\neg q\to\forall x\neg p)\to(\neg\forall x\neg p\to q)$ L内定理

(8) $\neg\forall x\neg p\to q$ MP(6)(7)

(9) $\exists x p\to q$ ∃定义

~~因此~~因此，有 $\Gamma\vdash\exists x p\to q$，再依K演绎定理得 $\Gamma\cup\{\exists x p\}\vdash q$.

习题 2-2 P88：2，3(2°)

2.4 可证等价和前束范式

2.4.1 可证等价

定义1（可证等价）若 $\Gamma\vdash_K p\leftrightarrow q$，则称 p 与 q 在 Γ 下可证等价；若 $\Gamma=\Phi$，则 p 与 q 可证等价.

命题2 设 $p, q, r\in K(Y)$，则

（自反性）$\vdash p\leftrightarrow p$

（对称性）$\vdash p\leftrightarrow q$ 当且仅当 $\vdash q\leftrightarrow p$；

（传递性）$\vdash p\leftrightarrow q$ 且 $\vdash q\leftrightarrow r$ 则 $\vdash p\leftrightarrow r$；

$\vdash p\leftrightarrow q$ 当且仅当 $\vdash\neg p\leftrightarrow\neg q$.

思考题2-3 依可证等价，K(Y)的一个等价类中的公式有哪些语法上的差别？

命题3 $\Gamma\vdash p\leftrightarrow q$ 当且仅当 $\Gamma\vdash p\to q$ 且 $\Gamma\vdash q\to p$.

定理（子公式的等价可替换性）设 q 是 p 的一个子公式，用 $q'\in K(Y)$ 替换 p 中的 q（的某一次出现）的结果记为 p'. 则若 $\Gamma\vdash q\leftrightarrow q'$，则 $\Gamma\vdash p\leftrightarrow p'$

No.
Date

例：$\Gamma\vdash s\leftrightarrow s'\Rightarrow\Gamma\vdash(r\to s)\leftrightarrow(r\to s')$

（可以通过替换证明一个公式）

证明：施归纳于p的结构

(1) p是原子公式，则 $q=p$ 且 $q'=p'$ 结论显然成立。

(2) 假设结论对p的所有子公式成立，待证结论对p成立。

分别考虑p的组成情况。

(2.1) $p=\neg r$，故q必然是r的一个子公式（否则 $q=p$，平凡）。$p'=\neg r'$，由归纳假设 $\Gamma\vdash q\leftrightarrow q'\Rightarrow\Gamma\vdash r\leftrightarrow r'$，由命题2，得 $\Gamma\vdash\underbrace{\neg r}_{p}\leftrightarrow\underbrace{\neg r'}_{p'}$，即 $\Gamma\vdash p\leftrightarrow p'$。

(2.2) $p=r\to s$，类似证明（练习）

(2.3) $p=\forall x r$，只需 $p'=\forall x r'$，依归纳假设得 $\Gamma\vdash r\leftrightarrow r'$，由命题3，这等价于 ~~$\Gamma\vdash r\leftrightarrow r'$~~ $\Gamma\vdash r\to r'$ 且 $\Gamma\vdash r'\to r$。下面是一个 $\Gamma\cup\{\forall x r\}\vdash\forall x r'$ 的证明：

(1) $\forall x r$ 前提

(2) $\forall x r\to r$ (K4)

(3) r MP(1)(2)

(4) $r\to((r\leftrightarrow r')\to r')$ L内定理

(5) $(r\leftrightarrow r')\to r'$ MP(3)(4)

(6) $r\leftrightarrow r'$ 归纳假设

(7) $r\to r'$ $\leftrightarrow$定义，重言式 $p\wedge q\to p$，MP.（6→7要好几步）

(8) r' MP(3)(7)

(9) $\forall x r'$ UG(8) 概括变元x不在 $\forall x r$ 中自由出现

由K演绎定理有 $\Gamma\vdash\forall x r\to\forall x r'$，同理可得：$\Gamma\vdash\forall x r'\to\forall x r$，由命题3，结论成立。依归纳法原理，结论对任何 $p\in K(Y)$ 成立。

定理（对偶律）设 $p\in K(Y)$ 只出现原子公式及 $\neg,\wedge,\vee,\forall,\exists$，将p中所有原子公式替换为其否定式，$\vee$与$\wedge$互换，$\forall$与$\exists$互换，所得结果记为 p^*，称为p的对偶式，则 $\vdash p^*\leftrightarrow\neg p$。

No.
Date

如 $\forall x(P_1^1(x_1)\wedge\neg P_1^2(x_1,x_2))=p$

$\exists x(\neg P_1^1(x_1)\vee P_1^2(x_1,x_2))=p^*$

$\vdash p^*\leftrightarrow\neg p$. 即 $\neg\forall x(P_1^1(x_1)\wedge\neg P_1^2(x_1,x_2))$

习题2-3 P89: 4(1°) P95: 2(1°)

2.4.2 前束范式

定义(前束范式) 前束范式是任何形为 $Q_1x_1\cdots Q_nx_n\,p$ 的公式 其中 $Q_i(i=1,\cdots,n)$ 代表 $\forall$ 或 $\exists$, p 中不出现任何量词,称为原公式的母式.

定理 令 Q^* 为 Q 的对偶量词.

$\vdash\forall x\,p(x)\leftrightarrow\forall y\,p(y)$ "改名"

1° 若 y 在 $p(x)$ 中不出现且 x 不在 $p(y)$ 中出现,则 $\vdash Qx\,p(x)\leftrightarrow Qy\,p(y)$

2° 若 x 不在 p 中自由出现,则 $\vdash(p\to Qx\,q)\leftrightarrow Qx(p\to q)$

3° $\vdash\neg Qx\,p\leftrightarrow Q^*x\neg p$ ¬深入

4° $\vdash(\forall x\,p\wedge\forall x\,q)\leftrightarrow\forall x(p\wedge q)$

5° $\vdash(\exists x\,p\vee\exists x\,q)\leftrightarrow\exists x(p\vee q)$

6° 若 x 不在 p 中自由出现,则

$\vdash(p\vee\forall x\,q)\leftrightarrow\forall x(p\vee q)$

$\vdash(p\wedge\exists x\,q)\leftrightarrow\exists x(p\wedge q)$

证明(略)

化范式的步骤.

(1) 改名, 1°

(2) 量词外移 2°, 4°~6°

(3) ¬深入, 3°

(4) 整理

习题2-4 p100 1(4°)

2.5 一阶语义

定义(一阶结构) 设 $K(Y)$ 是任意给定的一阶语言, $K(Y)$ 的一阶结构是一个三元组 $M=(\mathbb{D},\mathbb{F},\mathbb{P})$, 其中 $\mathbb{D}$ 是一个非空集,称为 M 的论域, $\mathbb{D}$ 中元素称为个体. $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{D}$ 上函数的集合, $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{D}$ 上关系

No.
Date

的非空集，使

(i) 对 $K(Y)$ 中每一个个体常元，$\mathbb{D}$ 中有一个个体 a^M.

(ii) 对 $K(Y)$ 中每一个 $n(\geq 0)$ 元函数符号 f，$\mathbb{F}$ 中有一个 n 元函数 $f^M: \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$

(iii) 对 $K(Y)$ 中每一个 $n(>0)$ 元谓词符号 p，$\mathbb{P}$ 中有一个 n 元关系 $P^M \subseteq \mathbb{D}^n$

定义（个体变元的指派）对任意给 $K(Y)$ 及其一阶结构 $M=(\mathbb{D}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$，$K(Y)$ 的一个（相对于 M 的）个体变元指派是一个映射 $V: Y \to \mathbb{D}$.

定义（一阶解释）任何一阶语言 $K(Y)$ 的一个一阶解释是一个复合映射 $I=(M, V, \nu)$，其中 $M=(\mathbb{D}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 是 $K(Y)$ 的一个一阶结构，V 是 $K(Y)$ 的一个个体变元指派，~~ν 是 $K(Y)$ 的一个个体变元指派~~ ν 是（标准）赋值，使得：

1° 对任何 $x \in Y$，$I(x) = V(x)$；

2° 对任何个体常元 a，$I(a) = a^M$；

3° 对任何函数符号 f，$I(f) = f^M$；　每个项解释为一个个体

4° 对任何项 $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$　$I(f(t_1, t_2, \cdots, t_n)) = f^M(I(t_1), \cdots, I(t_n))$

5° 对任何谓词符号 p，$I(p) = P^M$；

6° 对任何原子公式 $p(t_1, t_2, \cdots, t_n)$　// 每个公式解释为一个真值 //

$$I(p(t_1, t_2, \cdots, t_n)) = \begin{cases} t & \text{if } (I(t_1), \cdots, I(t_n)) \in P^M \subseteq \mathbb{D}^n \\ f & \text{otherwise} \end{cases}$$

7° 对任何公式 p，

$$I(\neg p) = \begin{cases} t & \text{if } (I(p)) = f; \\ f & \text{otherwise} \end{cases}$$

8° 对任何公式 p, q，

$$I(p \to q) = \begin{cases} f & \text{if } I(p) = t \text{ and } I(q) = f \\ t & \text{otherwise} \end{cases}$$

9° 对任何公式 p 和个体变元 x.

$$I(\forall x p) = \begin{cases} t & \text{if 对所有 } d \in \mathbb{D}: I_d^x(p) = t. \\ f & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $I_d^x = (M, V_d^x, \nu)$，$V_d^x(y) = \begin{cases} d & y = x \\ V(y) & y \neq x \end{cases}$　　$I = (M, V, \nu)$

No.
Date

定义(M可满足) 设 $I=(M,V,\vartheta)$ 是 $K(Y)$ 的一个解释, $p\in K(Y)$. 若 $I(p)=t$, 则称 p 在 I 之下为真, 又称 p 在 M 中可满足. 又称 M 满足 p.

例: 给定 $I=(M_N,V,\vartheta)$ 使 $M_N=(N,\Phi,\{>\})$, $V(x)=1$, $C^{M_N}=0$, $(P_1^2)^{M_N}=>$. $I(P_1^2(x,c))=\begin{cases} t & \text{iff } (I(x),I(c))\in(P_1^2)^{M_N} \\ f, & \text{iff } (1,0)\in > \end{cases}$

otherwise iff and only if 当且仅当

$=t$

$I(\forall x P_1^2(x,c))=f$ [$\forall x$ 不能局限于题目中 V, 要取遍所有 V]

$\therefore P_1^2(x,c)$ 在 I 下是真, 在 M_N 中可满足

定义(M有效) 设 M 为任何一阶结构, $p\in K(Y)$. 若对一切 V, p 在 $I=(M,V,\vartheta)$ 下是真, 则 p 在 M 中有效, 或 p 是 M-有效的, 又称 M 是 p 的一个模型, 记为 $M\models p$.

例(续) $P_1^2(x,c)$ 和 $\forall x P_1^2(x,c)$ 都不是 M_N 有效的.

$\exists x P_1^2(x,c)$ 是 M_N 有效的.

定义(逻辑有效) 设 $p\in K(Y)$, 若对一切一阶结构 M, $M\models p$, 称 p 为逻辑有效, 记为 $\models p$.

例(续) 上面三个都不是

$P_1^2(x,c)\vee\neg P_1^2(x,c)$ [即 $P_1^2(x,c)\rightarrow P_1^2(x,c)$]

$\forall x(P_1^2(x,c)\vee\neg P_1^2(x,c))$

⋮

思考题 2-4 "真"在一阶逻辑中有哪几个层次?

记号. 令 $M\models\Gamma$ 表示对所有 $p\in\Gamma$, 有 $M\models p$. 称 M 为 Γ 的一个模型.

定义(语义后承) 设 $\Gamma\subseteq K(Y)$. $p\in K(Y)$. 若对于一切一阶结构 M 有 $M\models\Gamma\Rightarrow M\models p$. 则称 p 是 Γ 的一个语义后承(逻辑推论). 记 $\Gamma\models p$. 当 $\Gamma=\Phi$ 时记为 $\models p$.

思考题 2-5 下列判断是否成立? 若 $\Gamma\models p$, 则对一切解释 I, 若对所有 $q\in\Gamma$, 有 $I(q)=t$, 则 $I(p)=t$.

No.
Date

记号 若 $p(x_1,\cdots,x_n)\in K(Y_n)$，$Y_n=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，令 $\forall p$ 表示 $\forall x_1\cdots\forall x_n\, p(x_1,\cdots)$
称为 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 的全称闭式.

定理 任给一阶结构 M.
1° $M\models p$ iff $M\models\forall x p$. ~~iff $M\models\forall p$~~.　(语义UG)
2° 若 $M\models p$ 且 $M\models p\to q$ 则 $M\models q$.　(语义MP)
3° 若 $\Gamma\subseteq\Gamma'$ 且 $\Gamma\models p$，则 $\Gamma'\models p$.　(语义单调性)
证：习题2-5
命题 设 p 为一闭式，$I=(M,V,\vartheta)$，若 $I(p)=t$ ($I(p)=f$) 则对于一切 $I'=(M,V,\vartheta)$，有 $I'(p)=t$ ($I'(p)=f$).
推论 任给闭式 $p\in K(Y)$. $K(Y)$ 的一阶结构 M，有 $M\models p$ 或 $M\models\neg p$.
证 (练习)
习题2-6　P117 1(1°)

2.6　K的可靠性和完全性
$\Gamma\vdash p\Leftrightarrow\Gamma\models p$　$\Rightarrow$ 可靠性　$\Leftarrow$ 完全性

2.6.1　K的可靠性
引理　K的公理都是逻辑有效的.
证：　(K1) ~ (K3) 显然.
(K4) 要证当项 u 对 $p(x)$ 中 x 自由时，有 $\models\forall x p(x)\to p(u)$
即若 $M=(D,F,R)$ 是任意一阶结构，则 $M\models\forall x p(x)\to p(u)$
又等价于对一切 $I=(M,V,\vartheta)$，有 $I(\forall x p(x))=t\Rightarrow I(p(u))=t$
设 I 满足 $I(\forall x p(x))=t$. 则依定义，对一切 $d\in D$，有
$I_d^x(p(x))=t$. 再设 $I(u)=d'\in D$，于是有
$I(p(u))=I(p)(I(u))$
不严格 $=I(p)(I_{d'}^x(x))$ ⟶ 不严格
$=I_{d'}^x(p(x))$
$=t$

No.
Date

(K5) 类似

定理(K可靠性) $\Gamma \vdash p \Rightarrow \Gamma \vDash p$.

证：设$\Gamma \vdash p$.其一推导$p_1, \cdots, p_n(=p)$，施归纳于n

(1) n=1 ① $p \in \Gamma$ 显然

② p是公理. 由引理 $\vDash p$. ∴$\Gamma \vDash p$.

(2) n>1 有四种情形 ① $p \in \Gamma$

② p是公理 } 同(1)

③ 存在$i, j < n$ 使$p_j = p_i \to p_n$ 依归纳假设有:
$\Gamma \vDash p_i$ 且 $\Gamma \vDash p_i \to p_n$
由语义MP 有$\Gamma \vDash p_n$

④ 存在$i < n$ 使$p_n = \forall x p_i$. 依归纳假设, 有$\Gamma \vDash p_i$.
由上节引理, 得$\Gamma \vDash \forall x p_i$.

依归纳法原理, 定理对一切n成立.

推论(K相容性) 对一切$p \in K(Y)$, $\vdash p$与$\vdash \neg p$不同时成立.

证：思考题2-7

推论 若Γ有模型,则Γ相容.

证：思考题2-8

2.6.2 K完全性

定理(K完全性) $\Gamma \vDash p \Rightarrow \Gamma \vdash p$

证 用反证法： $\Gamma \nvdash p \Rightarrow \Gamma \nvDash p$ (将证明大大简化)

1° 假设$\Gamma \nvdash p$ 于是$\Gamma \cup \{\neg \forall p\}$相容：($\forall p$ 即 $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n p$)
否则, 依反证律得$\Gamma \vdash \forall p$, 于是$\Gamma \vdash p$, 矛盾 p中所有变元

2° 将$\Gamma \cup \{\neg \forall p\}$扩张为极大相容集$\Gamma^*$, 并由$\Gamma^*$构造$\Gamma \cup \{\neg \forall p\}$的一个模型M.

3° 因此, $M \vDash \neg \forall p$, 即$M \nvDash \forall p$. 得$M \nvDash p$.

理 相容集有可数模型 (证明2°的一个方法) // 有可数的模型 //

:(I) 将Γ扩充成极大相容集. 分三步
任意相容集

(一) 扩充 $K(Y)$ 为 $K^+(Y)$。取可数无穷多个新的个体常元 $B=\{b_0, b_1, \cdots\}$ 使 $B\cap C=\Phi$ （C 为 $K(Y)$ 的个体常元集）。K 的项集 T 相应地扩充为 T^+，$K(Y)$ 的公式集扩充为 $K^+(Y)$。

(二) 扩充 Γ 为相容 Γ'，将 $K^+(Y)$ 中恰含一个自由变元的公式（可数个）排成不重复的序列 S: $p_0(x_{i_0}), p_1(x_{i_1}), \cdots$ 其中 $x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots$ 可以重复。从 B 中取一个不重复的序列 $b_{j_0}, b_{j_1}, \cdots$ 使 b_{j_n} 不在 S 的前 n 个公式中出现。令

$$r_n = p_n(b_{j_n}) \to \forall x_{i_n} p_n(x_{i_n}) \qquad n=0,1,2,\cdots$$

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{r_0, r_1, \cdots\}$$

可证 Γ' 相容。

(三) 扩充 Γ' 为极大相容 Γ^*，将 $K^+(Y)$ 中的所有闭公式排成不重复的序列 $p_0^*, p_1^*, \cdots$

令 $\Gamma_0=\Gamma'$ $\quad \Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n & \text{if } \Gamma_n \vdash_{K^+} p_n^*; \\ \Gamma_n \cup \{\neg p_n^*\} & \text{otherwise} \end{cases}$

$$\Gamma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$$

则 Γ^* 极大相容。

(四) 其次，利用 Γ^* 构造 Γ 的一个可数模型，又分三步。

(四) 构造 $K^+(Y)$ 的一个一阶结构 $M=(\Phi, F, P)$。令 $\Phi =_{df} \{u \mid u\in T^+$ 且 u 是闭项$\}$

对 $K^+(Y)$ 的每一个体常元 $d\in B\cup C$，$d^M=d\in\Phi$；对 $K^+(Y)$ 的每一个函数符号 f，取 $f^M: \Phi^n\to\Phi$，满足 $f^M(t_1,\cdots,t_n) =_{df} f(t_1, \cdots t_n)$

所有 f^M 的集合为 F，对 $K^+(Y)$ 所有闭项 t 有 $t^M=t$。定义 P^M 如下：对所有 $t_1,\cdots,t_n\in\Phi$，当 $\Gamma^* \vdash_{K^+} \underset{K(Y)}{P}(t_1,\cdots,t_n)$ 时，令 $(t_1,\cdots,t_n)\in P^M$ $\in\Phi$

当 $\Gamma^* \vdash_{K^+} \neg P(t_1,\cdots,t_n)$ 时，令 $(t_1,\cdots,t_n)\notin P^M$。

所有 P^M 的集合为 P。

(五) 证明对 $K^+(Y)$ 所有闭公式 q，有 $\Gamma^* \vdash_{K^+} q \Leftrightarrow M\models q$。

习题2-7 $\qquad$ p 的全称封闭

(六) 证明 M 是 Γ 的一个模型。设 $p\in\Gamma\subseteq\Gamma^*$，则 $\Gamma^*\vdash_{K^+} p$，于是 $\Gamma^*\vdash\forall p$。由(五)得 $M\models\forall p$。由上节定理得 $M\models p$。由 p 任意性有 $M\models\Gamma$。

No.
Date

~~习题~~ 习题2-8 P117 3(4°)

2.7 一阶逻辑的判定问题

1° 任给符号串是不是K的公理？ 能判定

2° 任给公式p、q、r是否从p、q用MP规则可推出？ 能判定

3° 任给公式p、q，是否q从p用UG规则可推出？ 能判定

4° 任给公式序列是否K的一个形式证明？ 能判定

5° 任给公式p是否K的内定理？ 不能判定；半可判定

思考题2-9 $\vdash_K p$，Yes

交叉地进行$\vdash p$和$\vdash \neg p$的判定，如何？ $\nvdash_K p$，不终止

第3章 一阶理论

3.1 自然数的形式定义问题

1. Peano Postulates (1889)

1° 0是自然数

2° 对任何自然数x，存在唯一的x'，称为x的"后继"

3° 0不是任何自然数的后继

4° 任何两个不同的自然数有不同的后继

5° 任何集合，若它含0和它的每一个元素的后继，则它包含所有自然数

2. Frege定义 (1884)

1° 0是不等于自身的事物的集合

2° 1是仅由0组成的集合

3° 2是仅由0和1组成的集合

4° 3是仅由0、1和2组成的集合

......

. von Neumann的表述

1° $0 =_{df} \{\}$

2° $x' =_{df} x \cup \{x\}$

验证Freg：$0 = \{\}$.

$1 = 0 \cup \{0\} = \{\} \cup \{\{\}\} = \{\{\}\} = \{0\}$

$2 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{\{0\}\} = \{0, \{0\}\} = \{0, 1\}$

No.
Date

4. Peano公设的形式化(尝试)

引入特殊符号: 0 (个体常元), 函数符号 $'$ (后继), 一元谓词符号 N, 给出一个公式集 Γ_N, 使得在它的每一个模型 M_N 中, 0, $'$, N 必须/必然分别解释为自然数 0, 后继函数和自然数(集合)

(P1) $N(0)$

(P2) $\forall x(N(x) \to \exists! y(y=x' \wedge N(y)))$ $\exists!$ 存在唯一

(P3) $\forall x \neg(0=x')$ 即0和后继$'$是隐定义的

(P4) $\forall x \forall y(x'=y' \to x=y)$

(P5) $P(0) \wedge \forall x(P(x) \to P(x')) \to \forall x P(x)$ P为任意谓词

$\exists! x P(x) =_{df} \exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \leftrightarrow (y=x)))$

问题: = 没有定义

3.2 带等词的谓词演算

K^+的语言 $K^+(Y)$ 比 $K(Y)$ 多一个谓词符号"$\approx$", 在K上增加三条"等词公设".

(E1) $u \approx u$

(E2) $u_k \approx u \to f_i^n(u_1 \cdots u_k \cdots u_n) \approx f_i^n(u_1 \cdots u \cdots u_n)$

(E3) $u_k \approx u \to (P_i^n(u_1 \cdots u_k \cdots u_n) \to P_i^n(u_1 \cdots u \cdots u_n))$

例1. 取 $K^+(Y)$ 不含函数符号和个体常元, 除$\approx$外不含其它谓词符号, 考虑它的一个一阶结构 $M=(\mathbb{N}, \Phi, \mathbb{P})$ 使 $\approx^M$ 为 $>$. 显然, (E1)不是M有效的, $M \not\models (E1)$

定理1 任给一阶结构 $M=(D, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, 若 $\approx^M$ 为D上的相等, 则所有等词公设都是M有效的.

证: 习题

定理的逆: 在K^+的任何模型M中, $\approx^M$是否一定是D上的相等? 未必

例2 取 $K^+(Y)$ 同例1, 取它的一阶结构 M' 使 $\approx^{M'}$ 为同奇偶. 显然 $M' \models (E1)$

E2也是; (E3) 在这个 $K^+(Y)$ 中表现为:

$u_k \approx u \to (u_1 \approx u_k \to u_1 \approx u)$

⋮

$u_k \approx u \to (u_k \approx u_n \to u \approx u_n)$ $\therefore M' \models (E3)$

No.
Date

所以，等词公设不"强迫"任何K^+模型一定把$\approx$解释为相等.
思考题3-2 L是否"强迫"$\rightarrow$解释为实质蕴涵？为什么？
习题3-2 P135 2.
在上述观察下，$\approx^M$可以是什么？
定理（$\approx$等价性）若$M=(D,F,P)$是一个K^+模型，则$\approx^M$是D上等价关系.
证：只需证明在语法中有下列性质：对任何u,v,w：
$1°$ $\vdash_{K^+} u\approx u$
$2°$ $\vdash_{K^+} u\approx v\rightarrow v\approx u$
$3°$ $\vdash_{K^+} v\approx u\rightarrow(u\approx w\rightarrow v\approx w)$
对$1°$ 由E1 显然
对$2°$ 不使用UG-按演绎定理，只需证明$\{v\approx u\}\vdash_{K^+} u\approx v$
(1) $v\approx u\rightarrow(v\approx v\rightarrow u\approx v)$ (E3) $P_1^2(x_1,v)$取为$x_1\approx v$
(2) $v\approx u$ （前提）
(3) $v\approx v\rightarrow u\approx v$ MP(1)(2)
(4) $v\approx v$ (E1)
(5) $u\approx v$ MP(3)(4)
对$3°$ 类似（练习）
定理（等项可替换性）
$1°$ $\vdash_{K^+} u\approx v\rightarrow t(u)\approx t(v)$ 其中项u是项t的"子项"，项$t(v)$是项$t(u)$中用v替换u的结果
$2°$ $\vdash_{K^+} u\approx v\rightarrow(p(u)\leftrightarrow p(v))$，其中$p(x)$是任意$K^+$公式，$u,v$对$p(x)$中$x$自由
证：练习
K^+太弱？是否可能加强K^+（增加公设）使它能"强迫"$\approx$解释为相等？
不能
定义（正规模型）设$\Gamma\subseteq K^+(Y)$，$M=(D,F,P)$是Γ的一个K^+模型，若$\approx^M$为D上的相等，则称M为Γ的一个正规模型.

No.
Date

定理（正规模型存在性）若Γ有K^+模型，则Γ一定有正规K^+模型。

证（思路）：设$M=(D,F,P)$为Γ的一个K^+模型，考虑M关于≈的商结构 $M^{\approx}=(D^{\approx},F^{\approx},P^{\approx})$，其中$D^{\approx}$是由D中关于$\approx^M$的等价类为个体组成的集合$\{[x] \mid x\in D\}$，$[x]=_{df}\{y\in D \mid y\approx^M x\}$。于是，D中所有等价个体$y\in[x]$被压缩成$D^{\approx}$中一个个体。相应地，F中所有函数的定义域和值域也从D变换为$D^{\approx}$，P中所有关系的定义域从D变换为$D^{\approx}$。可以证明：$M^{\approx}$是K^+ Γ的模型，同时它是正规的。

定理（非正规模型的必然性）设E^*为E的任何相容扩张，则E^*有非正规模型（证明见课本）

习题3-3　P138　1.

3.3 形式算术K_N

K^+扩张

初等数论的应用谓词演算

(1) 形式语言$K_N(Y)$

○逻辑符号：＜同K＞

○非逻辑符号：

个体常元：$\bar{0}$

一元函数符号：$'$

二元函数符号：$+$，$\times$

谓词符号：≈

○形成规则：＜同K^+＞

(2) 推理设施

(2.1) 公理

○逻辑公理（模式）：＜同K＞

○非逻辑公理/公设：等词公设＜同K^+＞

(N1)：$\neg(x'\approx\bar{0})$

(N2) $v' \approx u' \to v \approx u$

(N3) $u \# \overline{0} \approx u$

(N4) $v \# u' \approx (v \# u)'$ 加法的递归定义

(N5) $v \otimes \overline{0} \approx \overline{0}$

(N6) $v \otimes u' = (v \otimes u) \# v$ 乘法的递归定义

(N7) $p(\overline{0}) \to ((\forall x\, p(x) \to p(x')) \to \forall x\, p(x))$ 归纳公设

思考题3-3：K_N中为何没有Peano公设1,2？

(2.2) 推理规则：<同K>

(3) 定义 <同K>

构造K_N的主要目的是形式化数论的一个片断，即用K_N刻画该片断中的概念、命题、推理等。这个片断是一个正规K^+模型 $N=(|N|, F, P)$，$|N|$为自然数集；F包含自然数的后继函数，加法函数和乘法函数，P包含自然数的相等关系，并且

$\overline{0}^N$为$0\in|N|$，$\#^N$为$|N|$上的$+$，$\otimes^N$为$|N|$上的$\times$，$'^N$为$|N|$上的后继（可理解为 $+1$）

定理 上述N是K_N的模型

证：(E1)~(E3)、(N1~N7)是N有效的。

N称为K_N的标准模型

引入简写：$\#$ $\otimes$ 分别简写为$+$，$\times$。并约定

$\overline{0}', \overline{0}'', \cdots \overline{0}^{'\cdots'}_{n个}$

分别简写为$\overline{1}, \overline{2}, \ldots \overline{n}$，称为$K_N$的"数字"，公式$\neg(v \approx u)$简写为$v \not\approx u$.

例，数字$\overline{n+m}$中加法是自然数里的（语义的）加法，所以有

$\overline{4} = \overline{3+1} = \overline{2+2}$

$\overline{n} + \overline{m}$中加法是语法的，代表$\#$。公式$\overline{m} + \overline{n} \approx \overline{m+n}$

$\overline{3} + \overline{1}$

定理1

$\vdash_{K_N} \overline{m} + \overline{n} \approx \overline{m+n}$

2° $\vdash_{K_N} \overline{m}\times\overline{n} \approx \overline{m\times n}$

3° $\vdash_{K_N} \overline{0}+u\approx u$

4° $\vdash_{K_N} v'+u \approx (v+u)'$

5° $\vdash_{K_N} v+u\approx u+v$

6° $\vdash_{K_N} (w+u)+v \approx w+(u+v)$

证1° 施归纳于n

(i) $n=0$ 待证公式为 $\overline{m}+\overline{0}=\overline{m}$ 是(N3)的一个实例(N3中u为任意项)
结论成立

(ii) $n>0$ K_N中有推导

(1) $\overline{m}+\overline{n-1}' \approx (\overline{m}+\overline{n-1})'$ (N4)

(2) $\overline{m}+\overline{n-1}\approx\overline{m+n-1}$ 归纳假设

(3) $\overline{m}+\overline{n-1}\approx\overline{m+n-1}\to(\overline{m}+\overline{n-1})' \approx \overline{m+n-1}'$ (E2)对'

(4) $(\overline{m}+\overline{n-1})'\approx \overline{m+(n-1)}'$ MP(2)(3)

(5) $\overline{m}+\overline{n-1}' \approx \overline{m+(n-1)}'$ $\approx$传递性(1)(4)

(6) $\overline{m}+\overline{n}\approx\overline{m+n}$ 简写约定

依归纳法原理，结论对一切n成立.

证3°

(1) $\overline{0}+\overline{0}\approx\overline{0}$ (N3)

(2) $(\overline{0}+x)'\approx\overline{0}+x'$ (N4)

(3) $\overline{0}+x\approx x\to(\overline{0}+x)'\approx x'$ (E2)

(4) $(\overline{0}+x)'\approx\overline{0}+x'\to((\overline{0}+x\approx x\to(\overline{0}+x)'\approx x')\to(\overline{0}+x\approx x\to(\overline{0}+x')\approx x'))$ 等项替换定理2

(5) $\overline{0}+x\approx x\to\overline{0}+x'\approx x'$ MP(3) MP(2)(4)

(6) $\forall x(\overline{0}+x\approx x\to\overline{0}+x'\approx x')$ UG(5)

(7) $(\overline{0}+\overline{0}\approx\overline{0})\to(\forall x(\overline{0}+x\approx x\to\overline{0}+x'\approx x')\to\forall x(\overline{0}+x\approx x))$

(8) $\forall x(\overline{0}+x\approx x)$ MP(6) MP(1)(7)

(9) $\overline{0}+x\approx x$ MP(8) K4

定理2

1° $\vdash_{K_N} u_1+u_2\approx u_2\to u_1\approx\bar{0}$

2° $\vdash_{K_N} u_1+u_2\approx\bar{0}\to u_1\approx\bar{0}$

3° $\vdash_{K_N} u\not\approx\bar{0}\to\bar{1}\le u$ $u_1\le u_2$ 定义为 $\exists x(x+u_1\approx u_2)$

4° $\vdash_{K_N}(u\not\approx\bar{0}\wedge\cdots\wedge u\not\approx\overline{n-1})\to\bar{n}\le u$

5° $\vdash_{K_N}\neg(x\le\bar{n})\to\bar{n}\le x$，$n>0$

定理3 如果 $m=n$，则 $\vdash_{K_N}\bar{m}\approx\bar{n}$；如果 $m\ne n$，则 $\vdash_{K_N}\bar{m}\not\approx\bar{n}$.

思考题3-5 定理3表明|是否：自然数上的相等关系在 K_N 中得到了"完全的形式化"？是否与"相等不能被完全形式化"的结论矛盾？

习题3-4 P157 1-4.

$$K\xrightarrow[\approx(E)]{}K^+\xrightarrow[\bar{0},\,',\,+,\,\times\,(N)]{}K_N$$

$\{R\}\ P\ \{Q\}$

$\uparrow$ $=$pc programme

描述输入的扩展的一阶公式.

$R(x_1\cdots x_n,\ y_1\cdots y_n)\underset{P}{\Rightarrow}Q(x_1\cdots x_n,\ y_1\cdots y_n)$

Dijkstra：{ 不用 goto

循环的正误. 循环不变式 (先)(后)循环句.

3.4 可表示函数与递归函数

约定："k"元函数指 $f:\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$

"k"元关系：$R\subseteq\mathbb{N}^k$.

定义1：(可表示函数) k元函数f在 K_N 中可表示，如果存在含k+1个自由变元的公式 $p(x_1\cdots x_k\ x_{k+1})$ 使得：对任意对 $p(x_1\cdots x_{k+1})$ 中的 x_{k+1} 自由的项u及 $n_1\ n_2\cdots n_{k+1}\in\mathbb{N}$ 有

(i) $f(n_1\cdots n_k)=n_{k+1}\Rightarrow\vdash_{K_N}p(\bar{n}_1,\bar{n}_2\cdots\bar{n}_k,\overline{n_{k+1}})$

(ii) $f(n_1\cdots n_k)\ne n_{k+1}\Rightarrow\vdash_{K_N}\neg p(\bar{n}_1,\cdots\bar{n}_k,\overline{n_{k+1}})$

体现：f的计算 $\Rightarrow$ K_N 推理(关于p的).

(iii) $p(\bar{n}_1,\cdots\bar{n}_k,u)\to u\approx\overline{f(n_1\cdots n_k)}$

No.
Date

定义2（可表示关系）k元关系R在K_N中可表示，如果存在含k个自由变元的公式
$p(x_1 \cdots x_k)$使对任意$n_1 \cdots n_k \in N$有
(i) $(n_1 \cdots n_k) \in R \Rightarrow \vdash_{K_N} p(\overline{n_1}, \cdots \overline{n_k})$
(ii) $(n_1 \cdots n_k) \notin R \Rightarrow \vdash_{K_N} \neg p(\overline{n_1} \cdots \overline{n_k})$
哪些函数和关系是K_N可表示的？
第一，是否每一个K_N公式都可用来表示一个数论函数？否
例如：$x \approx x \wedge y \approx y$不能表示任何一元函数
思考：Why？
第二，同一个K_N公式是否可用于表示两个不同的k元函数？否
第三，是否每个数论函数是可用K_N表示的？否
△全体递归函数是K_N可表示的.
可计算函数就是递归函数$\Leftarrow K_N$可表示$\Leftarrow$图灵机
习题3-5 P_{165} 2. P_{170} 4.
定义3（基本函数）以下三种函数称为基本函数
1° 一元零函数Z. $Z(n)=0$;
2° 一元后继函数S，$S(n)=n+1$;
3° k元投影函数P_i^k，$P_i^k(n_1 \cdots n_k)=n_i$.（$i=1, \cdots k$）
规则I.
定义4（复合规则）一个i元函数g和i个k元函数$f_1, f_2 \cdots f_i$的复合是一个k元函数.
$l(n_1 \cdots n_k) =_{df} g(f_1(n_1 \cdots n_k) \cdots f_i(n_1 \cdots n_k))$
规则II
定义5（递归规则）由k元函数g和k+2元函数f使用递归规则生成的k+1元函数l定义如下：
$$\begin{cases} l(n_1 \cdots n_k, 0) =_{df} g(n_1 \cdots n_k) \\ l(n_1 \cdots n_k, n_{k+1}) =_{df} f(n_1 \cdots n_k, n, l(n_1 \cdots n_k, n)) \end{cases}$$
有限时间机械步骤可算出.

No.
Date

规则III

定义6（μ算子）设k+1元函数满足"根存在条件"，对任意$n_1 \cdots n_k$存在x使
$g(n_1 \cdots n_k, x) = 0$。应用μ算子于g生成的函数f定义为：$f(n_1 \cdots n_k) = \min\{x \mid g(n_1 \cdots n_k, x) = 0\}$

定义7（递归函数）三个基本函数以及由它们经有限次应用三条规则生成的函数称为（一般）递归函数，不用μ算子生成的称为原始递归函数，不要求根存在条件的应用μ算子生成的称为部分递归函数。

例："和函数"、"积函数"是递归的。符号函数 $sg(n) = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$ 是递归的。

$sg(0) = 0 = \underline{Z(0)}$ 递归中的g函数

$sg(n+1) = 1 = \underbrace{SZP_1^2(n, sg(n))}_{\text{递归中的f函数}} \rightarrow$ 投影：保证递归的形式

定义8（递归关系、递归集）若k元~~关系~~关系R的特征函数 $C_R(n_1 \cdots n_k) = \begin{cases} 1 & (n_1 \cdots n_k) \in R \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ 是递归函数，则R为递归关系，一元递归关系称为递归集。

定理：所有递归函数及递归关系是K_N可表示的。

定理：所有K_N可表示的函数（关系）是递归函数（关系）

Gödel 编码：将所有公式和公式序列映射为自然数（唯一）。

K_N符号u的G数g(u)规定：

u	(	)	,	¬	→	∀	≈	0	$x_i\,(i=1,2,\cdots)$
g(u)	1	3	5	7	9	11	13	15	15+2i

符号串$u_0 u_1 \cdots u_k$的G数

$g(u_0 u_1 \cdots u_k) =_{df} 2^{g(u_0)} 3^{g(u_1)} \cdots \underbrace{P_{k+1}}_{\text{第k+1个素数}}{}^{g(u_k)}$

至少有一个因子是2。∴符号串的编码都是偶数

符号串序列的G数

$g(S_0, S_1 \cdots S_n) =_{df} 2^{g(S_0)} 3^{g(S_1)} \cdots P_{n+1}{}^{g(S_n)}$

No.
Date

特点：

①符号与符号串的G数不同.

②不同的符号串有不同的Gödel数，不同的符号串序列有不同的G数.

③符号串的G数与符号串序列的G数不同（指数的奇偶不同）

命题：下列集合递归的：

1° $\{g(u) \mid u$是K_N的项$\} = A$

$$C_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$ x是某个项的G数

可判：$\forall$符号串是否是K_N的项？ ⇔ 可用该函数计算

可推一个项是否是K_N的项.

2° $\{g(p) \mid p$是K_N公式$\}$

3° $\{g(S) \mid S$是K_N的公式序列$\}$

4° $\{g(p) \mid p$是$K(i)$型公理$\}$ $i = 1, 2, \cdots 5$

5° $\{g(p) \mid p$是$E(i)$型公理$\}$ $i = 1, 2, 3$

6° $\{g(p) \mid p$是$N(i)$型公理$\}$ $i = 1, 2, \cdots, 7$

7° $\{(n_1, n_2, n_3) \mid n_1 = g(p);\ n_2 = g(p \to q);\ n_3 = g(q)\}$

MP规则推导的判断可用递归来表示

$$C_A(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} 0 & \text{MP不可推} \\ 1 & \text{MP可推} \end{cases}$$

8° $\{(n_1, n_2) \mid n_1 = g(p),\ n_2 = g(\forall x p)\}$ "UG的"

9° $\{(n_1, n_2) \mid n_1 = g(p),\ n_2 = g(S),\ S$是$p$在$K_N$中的一个证明$\}$

可以编程来证明！

自然语言的处理：

所有人会死 ⇒ $\forall x\,(p(x) \to d(x))$

$f(A, B)$ A is B's father $M(A, B)$ 类似

$f(John, Bill)$ $M(Ann, Mary)$

$f(Bill, Mary)$ $M(Alice, John)$

... ...

No.

Date

$a(X, Y) \leftarrow f(X, Y)$

$a(X, Y) \leftarrow M(X, Y)$

$a(X, Y) \leftarrow f(X, Z), a(Z, Y)$

$a(X, Y) \leftarrow M(X, Z)\ a(Z, Y)$

No.
Date

二十世纪的二十三个根本问题
⇒ ~~数学的完备性~~

3.5 数学(分支)的形式化与Hilbert方案

~~微积分⇐极限论⇐实数论⇐…⇐集合论⇐~~基本命题出现悖论

~~finity⇐(about finity)~~

数学分支A：若有一个应用逻辑演算(K的扩张)K_A，使得A中的真命题(非纯逻辑)

(数学定理)的集合恰好等于K_A的内定理集合，则称K_A为A的一个完全的形式化。

二种标准的作法：① 假设A可以被视为一个一阶结构M_A，使得A中真命题的集合恰等于M_A中全体有效闭式的集合。$Th(M_A)=\{p \mid p$是闭式且$M_A \models p\}$

$Th(M_A)$特点：对任何闭式p，$p\in Th(M_A)$和$\neg p \in Th(M_A)$中有且仅有一个成立，与数学的特点一致。

构造一个K_A使得$Th(K_A)=Th(M_A)$ → 若完备，则完全把握M_A

$Th(M_A)=df \{p \mid p$是闭式且$\vdash_{K_A} p\}$　K_A的演绎闭包

K_N可表示

可表示函数 iii 为什么没有否定形式？递归函数 {编码 {符号(表)、符号串、符号序列}、命题}

*eg.

$p\to(q\to r)$ 和 $(p\to q)\to r$　中缀表示法，需要( )

⇒ 前缀表 → $p\to qr$ 和 $p\to pqr$

** 公式是符号串，而符号串未必是公式

eg → $P_1^1(x_1)$ 2f_1^1 (→$P_1^1(x_1)$) 经分析可知是否是公式

项 → 自然数集　　　　x是某项的哥德尔数
$x=g(u)$　u是K_N项

命题：1° $\{\underbrace{g(u)}_{=A} \mid u$是$K_N$项$\}$是递归的

No.
Date

$C_A^{(x)}$（特征函数）是递归函数 $=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$

……

9° $\{(n_1, n_2) \mid n_1 = g(p)\ n_2 = g(s)\ \ s$ 是 p 的一个 K_N 证明$\} = B$
是递归的.

C_B 能判断 S 是否是 p 的一个 K_N 证明.

* 编码："powerful ~~tool~~" 数学 ⇒ 逻辑
递归函数 ~~编码~~ 逻辑

一个一阶结构 M 是一个逻辑演算 K^* 的模型, 若 M 是 K^* 的公理和公设集合的模型.

引理1：对任何逻辑演算 K^* 和它的一阶结构 M，有 $Th(K^*) \subseteq Th(M)$ 当且仅当 $M \models K^*$.　　⇒ 则 K^* 不相容

证：设 $Th(K^*) \subseteq Th(M)$ 则 K^* 的所有公理,公设都是 M 有效的. 于是 K^* 的任何内定理也是 M 有效的，M 是 K^* 的一个模型. 反之.假设 $M \models K^*$，则 K^* 的所有公理公设,内定理都是 M 有效的.

定义1（完备）一个公式集 Γ 是完备的,若 Γ 是相容的并且对任何闭式 p，$\Gamma \vdash p$ 或 $\Gamma \vdash \neg p$（极大）

K_A 不能做到完备性

证：由闭式语义特征，对任何闭式 p，有 $p \in Th(M)$ 和 $\neg p \in Th(M)$.
由 $Th(M) \subseteq Th(K^*)$ 得 $p \in Th(K^*)$ 或 $\neg p \in Th(K^*)$. 再由引理1，M 是 K^* 的模型，于是 K^* 相容.

对任何数学分支 A，假设 A 可视为一阶结构 M_A 并可完全形式化为 K_A 使 $Th(K_A) = Th(M_A)$ 则由引理1，M_A 是 K_A 的一模型. 由引理2. K_A 是完备的. 由于 $Th(M_A)$ 是 A 中全体真命题. 恰为 K_A 全部内定理. 因此都在 K_A 中得到证明.

进一步意义如下：

No.
Date

定理3：若K^*完备且$M \models K^*$，则$Th(K^*) = Th(M)$.

证(练习) ∵K^*完备，K^*：M有效.

定义2(基本等价) 两个一阶结构M_1与M_2基本等价，若$Th(M_1) = Th(M_2)$.

推论4 若K^*完备，则K^*的任意二个模型基本等价.

证：依定理3 $Th(M_1) = Th(K^*) = Th(M_2)$

等词不解释相等 ⟶ 等词不解释相等

⇓

但不成立．前提不成立.

Hilbert方案

(1) 各个数学分支形式化重构为形式公理系统(逻辑演算)

(2) 建立符合有穷主义的逻辑系统，作为研究的工具

(3) 用这种工具研究数学形式系统的性质，包括相容性.

数字化：K_N中公式$\varphi(x)$表示项x有性质φ，项表示对象，自指要求公式以自身为对象，用G编码将公式表示成项，公式序列也变成项

No.
Date

No.
Date

W定义

$(n_1,n_2)\in W$ iff n_1是一元公式$q(z)$的G数且
n_2是闭式$q(\overline{n_1})$的一个K_N证明的G数.

$(n_1,n_2)\notin W$ iff n_2不是n_1代表的一元公式$q(z)$的$\overline{n_1}$实例$q(\overline{n_1})$的一个K_N证明的G数

$\forall n_2\ (n_1,n_2)\notin W$ iff 所有自然数不是n_1代表的--------一个K_N证明的(
iff $q(\overline{n_1})$在K_N中不可证.

W是K_N可表示的. 设K_N公式w表示W. 记$p(x)=\forall y\neg w(x,y)$.
令$p(x)$的G数为m. 则$p(x)$的$\overline{m}$实例

$$p(\overline{m})=\forall y\neg w(\overline{m},y)$$

表示命题是 $\forall y\ (m,y)\notin W$. 即$p(\overline{m})$在K_N中不可证.

3.7 Gödel第一不完备性定理证明

引理1 W是递归的

证:(1) $\{g(u)\mid u$是K_N项$\}$是递归的

......

(9) $\{(n_1,n_2)\mid n_1=g(p(x)),\ n_2=g(S);\ S$是$\vdash_{K_N}p(\overline{n_1})$的一个证明序列

推论2 W是K_N可表示

往证:若K_N相容,则$p(\overline{m})$是K_N的一个不可判定命题

定义(ω相容) Γ是ω相容的,如果对任何只含自由变元x的K_N公式$p(x)$.
下列二条不同时成立:

1° 对所有$n\in\mathbb{N}$, $\Gamma\vdash p(\overline{n})$;

2° $\Gamma\vdash\neg\forall x p(x)$

命题 若Γ是ω相容的.则Γ是相容的.

证:若Γ不相容,则对一切q有$\Gamma\vdash q$. 故Γ不是ω相容的.

定理(Gödel第一不完备性定理)若K_N是ω相容的,则K_N是不完备的.

证:1° 设$\vdash_{K_N}p(\overline{m})$. 即$\vdash_{K_N}\forall y\neg w(\overline{m},y)$ 由(K4)和(mp)对任何$n\in\mathbb{N}$有
$\vdash_{K_N}\neg w(\overline{m},\overline{n})$. 另一方面,设$p(\overline{m})$在$K_N$中的一个证明的G数为n.

No.
Date

则$(m,n)\in W$，$m=g(p(x))$。因为W_{K_N}表示为w，故有$\vdash_{K_N} w(\bar{m},\bar{n})$。因此$K_N$不相容，也不是$\omega$相容的。矛盾。所以若$K_N$ ω相容，则$\nvdash_{K_N} p(\bar{m})$

2° 设$\vdash_{K_N} \neg p(\bar{m})$。即$\vdash_{K_N} \neg\forall y \neg w(\bar{m},y)$　　(I)

另一方面，由1°知$\nvdash_{K_N} p(\bar{m})$。依W及$p(\bar{m})$定义，这意味着

对一切$n\in\mathbb{N}$，$(m,n)\notin W$　　(II)

如若不然，则存在$n\in\mathbb{N}$，$(m,n)\in W$。故依W定义，m代表的一元公式$p(x)$的一元实例$p(\bar{m})$有一个由n代表的K_N证明。即有$\vdash_{K_N} p(\bar{m})$矛盾。

由W的K_N可表示性和(II)得

对一切$n\in\mathbb{N}$，$\vdash_{K_N} \neg w(\bar{m},\bar{n})$。　　(III)

综合(I)和(III)得K_N不是ω相容的，矛盾。故若K_N ω相容，则$\nvdash_{K_N} \neg p(\bar{m})$。综合$1^\circ$、$2^\circ$得：$K_N$ ω相容，则K_N不完备。

3.8 讨论

- Rosser 证明不需要引入ω相容
- 第一不完备性定理实际上适用于所有比K_N"强"的系统。

定理（Gödel-Rosser定理）K_N的任何递归相容扩充K_N^*是不完备的。
Γ^*是Γ的递归相容扩充，如果(1) Γ的内定理都是Γ^*的内定理，特别Γ的公设都是Γ^*的内定理 (2) Γ^*是相容的 (3) Γ^*的公设集是递归的。

第一不完备性定理实际上说明，下列四点不能同时成立：(1)系统足够丰富（包含K_N）(2)相容 (3)完备 (4)公设集递归

- 第二不完备性定理：如果K_N相容，则这一性质在K_N中不可证。