中国科学技术大学期末考试题

考试科目：随机过程（B）　　　　　　　　　　　　得分：______

学生所在系：______________ 姓名：__________ 学号：___________

（2018年1月9日，半开卷）

一、**(20分) 判断是非与填空：**

(1)（每空2分）设 $X=\{X_n,\geq 0\}$ 为一不可约、有限（N个）状态的马氏链，且其转移概率矩阵 P 为双随机的（行和与列和均为1），则：

$a.$ X 的平稳分布不一定存在（　　）；　　$b.$ X 的平稳分布存在但不必唯一(　　)；

$c.$ X 的平稳分布为 $(\frac{1}{N},\frac{1}{N},\ldots,\frac{1}{N})$（　　）；　$d.$ X 的极限分布为：$(\frac{1}{N},\frac{1}{N},\ldots,\frac{1}{N})$（　　）。

(2)（每空3分）设公路上某观察站红、黄、蓝三种颜色的汽车到达数分别是强度为2、3和5（辆/分钟）的泊松过程。则：

$a.$ 第一辆车到达的平均时间为(　　　)；　$b.$ 红车首先到达的概率为（　　　）；

$c.$ 在第一辆红车到达之前恰好到达 k 辆非红车的概率为（　　　）。

(3)（3分）有关某种商品的销售状况共有24个季度的连续数据（1—畅销，0—滞销）：

$$1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,$$
$$1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,$$

若该商品销售状况满足齐次马氏链，则据以上数据可估计出该马氏链的转移概率矩阵 P 为（　　　）。

二、**(15 分)** 设到达某计数器的脉冲数 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是一速率为 λ 的泊松过程，每个脉冲被记录的概率均为 p，且各脉冲是否被记录是相互独立的。现以 $N_1(t)$ 表示被记录的脉冲数，试求 $N_1(t)$ 的矩母函数 $g_{N_1(t)}(v)$ 以及 $EN_1(t)$, $Var[N_1(t)]$ 和 $Cov(N_1(s),N_1(t))$。

三、**(20分)** 设马氏链 $\{X_n,n\geq 0\}$ 的转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

(1) 设 $X_0=3$，试求：$\pi_i(1)=P\{X_1=i\},\ \pi_i(2)=P\{X_2=i\},\ (i=1,2,3)$，并求：$E(X_1)$ 和 $E(X_2)$；

（2）试求该马氏链的极限分布：$\pi_j=\lim\limits_{n\to\infty}p_{i,j}^{(n)}$，$(i,j=1,2,3)$；

（3）当初始分布 $\pi_i(0)\ (i=1,2,3)$ 为什么分布时，该马氏链为严格平稳过程？并求此时的 $E(X_n)$。

四、（15 分）把一些球逐个随机地放到 a 个格子中去，若 n 个球放进了 k 个格子，则称系统在时刻 n 的状态为 k。试用一马氏链 $\{X_n,n\ge 0\}$ 描述此系统，并且

（1）写出该马氏链的转移概率矩阵 P，并讨论其状态分类；

（2）证明过程由状态 $k\ (0\le k\le a-1)$ 出发，必然进入状态 a；

（3）试求放满 a 个格子的平均时间（假定 $X_0=0$）。

五、（15 分） 设有随机过程 $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta)$，其中 Θ 服从均匀分布 $U(0,2\pi)$，A 服从瑞利分布：

$$A\sim f(x)=\tfrac{x}{\sigma^2}\exp(-\tfrac{x^2}{2\sigma^2}),(x>0)$$

且 A 与 Θ 独立，

（1）证明 $\{X(t),\ t\in R\}$ 为宽平稳过程；

（2）试求 $\{X(t),\ t\in R\}$ 的功率谱密度函数 $S(\omega)$。

六、（15 分）在下列四个关于 ω 的函数中：

$$S_1(\omega)=\frac{\omega^2+9}{(\omega^2+4)(\omega+1)^2},\quad S_2(\omega)=\frac{\omega^2+64}{\omega^4+29\omega^2+100},$$

$$S_3(\omega)=\frac{\omega^2-4}{\omega^4+4\omega^2+3},\quad S_4(\omega)=\frac{\omega^2\cos\omega}{\omega^4+1}$$

（1）哪一个可以作为一个平稳过程 $\{X(t),\ t\in \mathrm{R}\}$（均值为 0）的功率谱密度函数？并求其所对应的协方差函数 $R(\tau)$；

（2）该平稳过程的均值是否具有遍历性？为什么？

（完）