# 《随机过程》习题解答

## 习题 1

1. 令 $\{X(t), t \in T\}$ 为二阶矩存在的随机过程, 试证它是宽平稳的当且仅当 $E[X(s)]$ 与 $E[X(s)X(s+t)]$ 都不依赖于 $s$.

**证** 由宽平稳过程的定义知,$\{X(t), t \in T\}$ 宽平稳当且仅当下列两条件同时成立:

(1)$\mu_X(s) = E[X(s)]$ 在 $s \in T$ 上是常数;

(2)$R_X(t,s) = Cov[X(t), X(s)]$ 只与 $t-s$ 有关.

注意到

$$Cov[X(t), X(s)] = E[X(t)X(s)] - E[X(t)]E[X(s)],$$

因此, 条件 (1) 和 (2) 与下列两条件等价:

(3)$\mu_X(s) = E[X(s)]$ 在 $s \in T$ 上是常数;

(4)$E[X(t)X(s)]$ 只与 $t-s$ 有关.

这就证明了 $\{X(t), t \in T\}$ 宽平稳当且仅当 $E[X(s)]$ 与 $E[X(s)X(s+t)]$ 都不依赖于 $s$.■

2. 记 $U_1, \cdots, U_n$ 为在 $(0,1)$ 中均匀分布的 $n$ 个独立随机变量. 对 $0 < t, x < 1$, 定义

$$I(t,x) = \begin{cases} 1, & x \le t, \\ 0, & x > t, \end{cases}$$

并记 $X(t) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} I(t, U_k), 0 \le t \le 1$, 这是 $U_1, \cdots, U_n$ 的经验分布函数. 试求随机过程 $\{X(t), 0 \le t \le 1\}$ 的均值和自协方差函数.

**解** 由题设知,$\{X(t), 0 \le t \le 1\}$ 的均值函数为

$$\begin{aligned} \mu_X(t) = E[X(t)] &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[I(t,U_k)] \\ &= E[I(t,U_1)], \quad 0 \le t \le 1, \end{aligned} \tag{1}$$

自协方差函数为

$$\begin{aligned} R_X(t,s) &= Cov[X(t), X(s)]] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} Cov[I(t,U_k), I(s,U_l)] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Cov[I(t,U_k), I(s,U_k)] \\ &= \frac{1}{n} Cov[I(t,U_1), I(s,U_1)], \quad 0 \le t \le 1, \end{aligned} \tag{2}$$

而

$$E[I(t,U_1)] = P(U_1 \le t) = t, \quad 0 \le t \le 1, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}E[I(t,U_1)I(s,U_1)] &= P(U_1 \le t, U_1 \le s)\\ &= P(U_1 \le \min\{t,s\}) = \min\{t,s\}, \quad 0 \le t,s \le 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Cov[I(t,U_1),I(s,U_1)] &= E[I(t,U_1)I(s,U_1)] - E[I(t,U_1)]E[I(s,U_1)]\\ &= \min\{t,s\} - ts, \quad 0 \le t,s \le 1,\end{aligned} \tag{4}$$

将 (3) 和 (4) 代入 (1) 和 (2) 中得

$$\mu_X(t) = t, \quad 0 \le t \le 1,$$
$$R_X(t,s) = \frac{1}{n}[\min\{t,s\} - ts], \quad 0 \le t,s \le 1.$$

■

3. 令 $Z_1, Z_2$ 为独立同分布的正态随机变量, 均值为 0, 方差为 $\sigma^2$,$\lambda$ 为实数. 定义 $X(t) = Z_1\cos(\lambda t) + Z_2\sin(\lambda t)$. 试求 $\{X(t), t \in (-\infty,+\infty)\}$ 的均值函数和自协方差函数. 它是宽平稳的吗?

**解** 由题设可知, $\{X(t), t \in (-\infty,+\infty)\}$ 的均值函数为

$$\mu_X(t) = E(Z_1)\cos(\lambda t) + E(Z_2)\sin(\lambda t) = 0, \quad t \in (-\infty,+\infty),$$

自协方差函数为

$$\begin{aligned}R_X(t,s) =& Cov[Z_1\cos(\lambda t) + Z_2\sin(\lambda t), Z_1\cos(\lambda s) + Z_2\sin(\lambda s)]\\ =& Cov(Z_1,Z_1)\cos(\lambda t)\cos(\lambda s) + Cov(Z_1,Z_2)\cos(\lambda t)\sin(\lambda s)\\ &+ Cov(Z_2,Z_1)\sin(\lambda t)\cos(\lambda s) + Cov(Z_2,Z_2)\sin(\lambda t)\sin(\lambda s)\\ =& \sigma^2\cos(\lambda t)\cos(\lambda s) + \sigma^2\sin(\lambda t)\sin(\lambda s)\\ =& \sigma^2\cos[\lambda(t-s)], \quad t,s \in (-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

故 $\{X(t), t \in (-\infty,+\infty)\}$ 是宽平稳的.■

4.Poisson 过程 $\{X(t), t \ge 0\}$ 满足 (i)$X(0) = 0$;(ii) 对 $t > s$,$X(t) - X(s)$ 服从均值为 $\lambda(t-s)$ 的 Poisson 分布;(iii) 过程是有独立增量的. 试求其均值函数和自协方差函数. 它是宽平稳的吗?

**解** $\{X(t), t \ge 0\}$ 的均值函数为

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] = E[X(t) - X(0)]\\ &= \lambda t, \quad t > 0,\end{aligned}$$

$\{X(t), t \ge 0\}$ 的方差函数为

$$\begin{aligned}Var[X(t)] &= Var[X(t) - X(0)]\\ &= \lambda t, \quad t > 0,\end{aligned}$$

对 $s > t > 0$, 有

$$E[X(t)X(s)] = E\{[X(t) - X(0)][(X(s) - X(t)) + (X(t) - X(0))]\}$$

$$
\begin{aligned}
&=E\{[X(t)-X(0)]^2\}+E\{[X(t)-X(0)][X(s)-X(t)]\}\\
&=Var[X(t)-X(0)]+\{E[X(t)-X(0)]\}^2\\
&\quad +E[X(t)-X(0)]E[X(s)-X(t)]\\
&=\lambda t+(\lambda t)^2+\lambda t\cdot\lambda(s-t)\\
&=\lambda t(\lambda s+1),
\end{aligned}
$$

因此, $\{X(t),t\geq 0\}$ 的自协方差函数为

$$
\begin{aligned}
R_X(t,s)&=E[X(t)X(s)]-E[X(t)]E[X(s)]\\
&=\lambda t,\quad s\geq t>0,
\end{aligned}
$$

自相关函数为

$$
\begin{aligned}
r_X(t,s)&=\frac{R_X(t,s)}{[R_X(t,t)R_X(s,s)]^{1/2}}\\
&=\sqrt{\frac{t}{s}},\quad s\geq t>0.
\end{aligned}
$$

■

5.$\{X(t),t\geq 0\}$ 为第四题中的 Poisson 过程. 记 $Y(t)=X(t+1)-X(t)$, 试求过程 $\{Y(t),t\geq 0\}$ 的均值函数和自协方差函数, 并研究其平稳性.

**解** $\{Y(t),t\geq 0\}$ 的均值函数为

$$
\begin{aligned}
\mu_Y(t)&=E[X(t+1)]-E[X(t)]=\mu_X(t+1)-\mu_X(t)\\
&=\lambda,\quad t\geq 0,
\end{aligned}
$$

自协方差函数为

$$
\begin{aligned}
R_Y(t,s)=&Cov[X(t+1)-X(t),X(s+1)-X(s)]\\
=&Cov[X(t+1),X(s+1)]-Cov[X(t+1),X(s)]\\
&-Cov[X(t),X(s+1)]+Cov[X(t),X(s)]\\
=&\lambda(\min\{t,s\}+1)-\lambda\min\{t+1,s\}-\lambda\min\{t,s+1\}+\lambda\min\{t,s\},\\
=&\begin{cases}
0, & 当 0\leq t<s-1,\\
\lambda(t-s+1), & 当 s-1\leq t<s,\\
\lambda(s-t+1), & 当 s\leq t<s+1,\\
0, & 当 t\geq s+1,
\end{cases}\quad t,s\geq 0.
\end{aligned}
$$

这说明了 $\{Y(t),t\geq 0\}$ 是宽平稳的.■

6. 令 $Z_1$ 和 $Z_2$ 是独立同分布的随机变量, $P(Z_1=-1)=P(Z_1=1)=\frac{1}{2}$. 记 $X(t)=Z_1\cos(\lambda t)+Z_2\sin(\lambda t),t\in R$, 试证 $\{X(t),t\in R\}$ 是宽平稳的, 它是严平稳的吗?

**证明** 由题设知,$\{X(t),t\in R\}$ 的均值函数为

$$
\mu_X(t)=E(Z_1)\cos(\lambda t)+E(Z_2)\sin(\lambda t)=0,\quad t\in R, \tag{1}
$$

自协方差函数为

$$\begin{aligned}R_X(t,s)=&Cov(Z_1\cos(\lambda t)+Z_2\sin(\lambda t),Z_1\cos(\lambda s)+Z_2\sin(\lambda s))\\=&Var(Z_1)\cos(\lambda t)\cos(\lambda s)+Var(Z_2)\sin(\lambda t)\sin(\lambda s)\\=&\cos(\lambda t)\cos(\lambda s)+\sin(\lambda t)\sin(\lambda s)\\=&\cos(\lambda(t-s)),\quad t,s\in R.\end{aligned}\tag{2}$$

由 (1) 和 (2) 即知,$\{X(t),t\in R\}$ 是宽平稳的. 进而, 由题设可知, 随机变量 $X(t)$ 的矩母函数为

$$\begin{aligned}g_{X(t)}(u)=&E(e^{uX(t)})=E\{\exp[u(Z_1\cos(\lambda t)+Z_2\sin(\lambda t))]\}\\=&E\{\exp[uZ_1\cos(\lambda t)]\}\cdot E\{\exp[uZ_2\sin(\lambda t)]\}\\=&\frac{1}{4}\{\exp[-u\cos(\lambda t)]+\exp[u\cos(\lambda t)]\}\\&\cdot\{\exp[-u\sin(\lambda t)]+\exp[u\sin(\lambda t)]\},\quad u\in R,\end{aligned}$$

这说明了 $X(t)$ 的分布与 $t(\in R)$ 有关, 因此 $\{X(t),t\in R\}$ 不是严平稳的. ■

7. 试证: 若 $Z_0,Z_1,Z_2,\cdots$ 为独立同分布随机变量序列, 定义 $X(n)=Z_0+Z_1+\cdots+Z_n$,$n=0,1,2,\cdots$, 则 $\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$ 是独立增量过程.

**证明** 注意到对任意 $n$ 及任意 $t_1,\cdots,t_n\in\{0,1,2,\cdots\}$, $t_1<t_2<\cdots<t_n$, 有

$$\begin{cases}X(t_2)-X(t_1)=Z_{t_1+1}+\cdots+Z_{t_2},\\X(t_3)-X(t_2)=Z_{t_2+1}+\cdots+Z_{t_3},\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\X(t_n)-X(t_{n-1})=Z_{t_{n-1}+1}+\cdots+Z_{t_n}.\end{cases}\tag{1}$$

而由题设知, $Z_{t_1+1},\cdots,Z_{t_n}$ 互相独立, 因此 $(Z_{t_1+1},\cdots,Z_{t_2}),(Z_{t_2+1},\cdots,Z_{t_3}),\cdots,(Z_{t_{n-1}+1},\cdots,Z_{t_n})$ 互相独立, 故由 (1) 知,$X(t_2)-X(t_1),X(t_3)-X(t_2),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$ 互相独立. 这就证明了 $\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$ 是独立增量过程.■

8. 若 $X_1,X_2,\cdots$ 是一列独立随机变量, 还要添加什么条件才能确保 $\{X_1,X_2,\cdots\}$ 是严平稳的随机过程?

**解** 若 $\{X_1,X_2,\cdots\}$ 严平稳, 则对任意正整数 $m$ 和 $n$, $X_m$ 和 $X_n$ 的分布都相同, 从而 $X_1,X_2,\cdots$ 是一列同分布的随机变量. 而当 $X_1,X_2,\cdots$ 是一列独立同分布的随机变量时, 对任意正整数 $k$ 及 $n_1,\cdots,n_k$,$k$ 维随机向量 $(X_{n_1},\cdots,X_{n_k})$ 的分布函数为 (记 $X_1,X_2,\cdots$ 共同的分布函数为 $F(x)$)

$$\begin{aligned}F_{(X_{n_1},\cdots,X_{n_k})}(x_1,\cdots,x_k)=&F_{X_{n_1}}(x_1)\cdots F_{X_{n_k}}(x_n)\\=&F(x_1)\cdots F(x_k),\quad -\infty<x_1,\cdots,x_k<+\infty,\end{aligned}$$

这说明了 $(X_{n_1},\cdots,X_{n_k})$ 的分布函数与 $n_1,\cdots,n_k$ 无关, 故 $\{X_1,X_2,\cdots\}$ 严平稳. ■

9. 令 $X$ 和 $Y$ 是从单位圆内的均匀分布中随机选取一点所得的横坐标和纵坐标. 试计算条件概率

$$P\left(X^2+Y^2\geq\frac{3}{4}\mid X>Y\right).$$

**解** 注意到 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}P(X>Y) &= \iint\limits_{x>y} f(x,y)dxdy\\ &= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1, x>y} dxdy\\ &= \frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X^+Y^2\ge \tfrac{3}{4}, X>Y) &= \iint\limits_{x^2+y^2\ge\frac{3}{4}, x>y} f(x,y)dxdy\\ &= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\frac{3}{4}\le x^2+y^2\le 1, x>y} dxdy\\ &= \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]=\frac{7}{32},\end{aligned}$$

故所求条件概率为

$$P\left(X^2+Y^2\ge\frac{3}{4}\mid X>Y\right)=\frac{P(X^2+Y^2\ge\frac{3}{4}, X>Y)}{P(X>Y)}=\frac{7}{16}.$$

■

10. 离子依参数为 $\lambda$ 的 Poisson 分布进入计数器, 两离子到达的时间间隔 $T_1, T_2, \cdots$ 是独立的参数为 $\lambda$ 的指数分布随机变量. 记 $S$ 是 $[0,1]$ 时段中的离子总数, 时间区间 $I\subset[0,1]$, 其长度记为 $\mid I\mid$. 试证明 $P(T_1\in I, S=1)=P(T_1\in I, T_1+T_2>1)$, 并由此计算 $P(T_1\in I\mid S=1)=\mid I\mid$.

**解证** 由题设可知, 第 $i$ 个离子在 $T_1+\cdots+T_i$ 时刻进入计数器,$i=1,2,\cdots$, 而 $S$ 是 $[0,1]$ 时段内进入计数器的离子总数, 因此

$$\{T_1\in I, S=1\}=\{T_1\in I, T_1+T_2>1\},$$

故

$$P(T_1\in I, S=1)=P(T_1\in I, T_1+T_2>1). \tag{1}$$

而 $(T_1,T_2)$ 的联合密度函数为

$$f_{(T_1,T_2)}(t_1,t_2)=f_{T_1}(t_1)f_{T_2}(t_2)=\lambda^2e^{-\lambda(t_1+t_2)}, \quad t_1,t_2>0,$$

因而

$$\begin{aligned}P(T_1\in I, T_1+T_2>1) &= \iint\limits_{t_1\in I, t_1+t_2>1} f_{(T_1,T_2)}(t_1,t_2)dt_1dt_2\\ &=\lambda^2\iint\limits_{t_1,t_2>0, t_1\in I, t_1+t_2>1} e^{-\lambda(t_1+t_2)}dt_1dt_2.\end{aligned} \tag{2}$$

作变换

$$u=t_1, \quad v=t_1+t_2,$$

则可将 (2) 中积分表为

$$\begin{aligned}P(T_1 \in I, T_1+T_2>1) =&\lambda^2 \iint\limits_{u\in I, v>1} e^{-\lambda v} du dv \\ =&\lambda^2 \int\limits_{u\in I} du \int_1^{+\infty} e^{-\lambda v} dv \\ =&\lambda \mid I \mid e^{-\lambda}. \end{aligned} \tag{3}$$

而

$$P(S=1)=\lambda e^{-\lambda},$$

由此及 (1) 和 (3) 可得

$$P(T_1\in I \mid S=1)=\frac{P(T_1 \in I, S=1)}{P(S=1)} =\mid I \mid .$$

■

12. 气体分子的速度 $V$ 有三个垂直分量 $V_x, V_y, V_z$, 它们的联合密度函数依 Maxwell-Boltzman 定律为

$$f_{V_x,V_y,V_z}(v_x,v_y,v_z)=\frac{1}{(2\pi kT)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2kT}\right\}, \quad -\infty < v_x,v_y,v_z<+\infty,$$

其中 $K$ 是 Boltzman 常数,$T$ 是绝对温度, 给定分子的总动能为 $e$. 试求 $x$ 方向的动量的绝对值的期望值.

**解** 由于 $V_x, V_y, V_z$ 的联合密度函数为

$$\begin{aligned}f_{V_x,V_y,V_z}(v_x,v_y,v_z) =&\frac{1}{(2\pi kT)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2kT}\right\} \\ =&\frac{1}{(2\pi kT)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{v_x^2}{2kT}\right\}\cdot\frac{1}{(2\pi kT)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{v_y^2}{2kT}\right\} \\ &\cdot\frac{1}{(2\pi kT)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{v_z^2}{2kT}\right\}, \quad -\infty<v_x,v_y,v_z<+\infty,\end{aligned}$$

因此,$V_x, V_y, V_z$ 互相独立, 且 $V_x, V_y, V_z$ 都服从正态分布 $N(0, kT)$. 故气体分子的总动能为

$$e=\frac{1}{2}mE(V_x^2+V_y^2+V_z^2)=\frac{3}{2}mkT,$$

由此可得

$$m=\frac{2e}{3kT},. \tag{1}$$

而气体 $x$ 方向的动量的绝对值的期望值为

$$\begin{aligned}mE(\mid V_x \mid) =&\frac{m}{(2\pi kT)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mid v_x \mid \exp\left\{-\frac{v_x^2}{2kT}\right\} dv_x \\ =&\frac{m}{(2\pi kT)^{1/2}}\left[-\int_{-\infty}^{0} v_x \exp\left\{-\frac{v_x^2}{2kT}\right\} dv_x\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^{+\infty} v_x \exp\left\{-\frac{v_x^2}{2kT}\right\} dv_x\Big] \\
=&\frac{2m}{(2\pi kT)^{1/2}}\int_0^{+\infty} v_x \exp\left\{-\frac{v_x^2}{2kT}\right\} dv_x \\
=&\frac{m}{(2\pi kT)^{1/2}}\int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{v_x^2}{2kT}\right\} d(v_x^2) \\
=&m\left(\frac{2kT}{\pi}\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

由此及 (1) 可得

$$
mE(|\ V_x\ |) = \frac{2e}{3}\left(\frac{2}{\pi kT}\right)^{1/2}.
$$

■

13. 若随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布, 分布是参数为 $\lambda$ 的指数分布. 试证 $T = \sum\limits_{i=1}^n X_i$ 服从参数为 $(n, \lambda)$ 的 $\Gamma$ 分布, 其密度为

$$
f(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.
$$

**证明** 注意到 $T = \sum\limits_{i=1}^n X_i$ 的矩母函数为

$$
g_T(t) = [g_{X_1}(t)]^n, \tag{1}
$$

其中 $g_{X_1}(t)$ 为 $X_1$ 的矩母函数. 由于 $X_1$ 服从参数为 $\lambda$ 的指数分布, 因此

$$
g_{X_1}(t) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-t)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda,
$$

将其代入 (1) 中得

$$
g_T(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n, \quad t < \lambda. \tag{2}
$$

又参数为 $(n, \lambda)$ 的 $\Gamma$ 分布的矩母函数为

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-(\lambda-t)x} dx \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\frac{(n-1)!}{(\lambda-t)^n} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n, \quad t < \lambda.
\end{aligned}
$$

由此及 (2) 即知 $T = \sum\limits_{i=1}^n X_i$ 服从参数为 $(n, \lambda)$ 的 $\Gamma$ 分布.■

14. 设 $X_1$ 和 $X_2$ 分别为相互独立的均值为 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的 Poisson 随机变量. 试求 $X_1 + X_2$ 的分布, 并计算给定 $X_1 + X_2 = n$ 时,$X_1$ 的条件分布.

**解** 注意到若 $X \sim P(\lambda)$, 则 $X$ 的矩母函数为

$$\begin{aligned}g_X(t) =& E(e^{tX}) = \sum_{i=0}^{+\infty} e^{it}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\\ =& e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^t)^i}{i!} = \exp\{\lambda(e^t-1)\}, \quad t \in (-\infty, +\infty),\end{aligned}$$

因此, $X_1 + X_2$ 的矩母函数为

$$\begin{aligned}g_{X_1+X_2}(t) =& g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)\\ =& \exp\{\lambda_1(e^t-1)\}\exp\{\lambda_2(e^t-1)\}\\ =& \exp\{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)\}, \quad t \in (-\infty, +\infty),\end{aligned}$$

这说明了 $X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$. 故

$$P(X_1 + X_2 = n) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1}$$

进而有

$$\begin{aligned}P(X_1 + X_2 = n, X_1 = m) =& P(X_1 = m, X_2 = n-m) = P(X_1 = m)P(X_2 = n-m)\\ =& \frac{\lambda_1^m}{m!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-m}}{(n-m)!}e^{-\lambda_2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \cdots, m \le n,\end{aligned}$$

由此及 (1) 可得

$$\begin{aligned}P(X_1 = m \mid X_1 + X_2 = n) =& \frac{P(X_1 = m, X_1 + X_2 = n)}{P(X_1 + X_2 = n)}\\ =& \binom{n}{m}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^m\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-m},\\ & m, n = 0, 1, 2, \cdots, m \le n.\end{aligned}$$

■

15. 若 $X_1, X_2, \cdots$ 独立且有相同的以 $\lambda$ 为参数的指数分布, $N$ 与 $X_1, X_2, \cdots$ 独立, $N$ 服从几何分布

$$P(N = n) = \beta(1-\beta)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots, 0 < \beta < 1.$$

试求随机和 $\sum_{i=1}^{N} X_i$ 的分布.

**解** 由题设可知, 已知 $N = n$ 时, $X_1, X_2, \cdots$ 独立且有相同的以 $\lambda$ 为参数的指数分布, 因此由指数分布的可加性知, 已知 $N = n$ 时, $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 服从以 $(n, \lambda)$ 为参数的 $\Gamma$ 分布

$$f_{Y|N}(y \mid n) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0.$$

故随机和 $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ 的分布为

$$f_Y(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{Y|N}(y \mid n)P(N = n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda\beta e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\lambda(1-\beta)t]^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \lambda\beta e^{-\lambda t} e^{\lambda(1-\beta)t} \\
&= \lambda\beta e^{-\lambda\beta t}, \quad t \geq 0.
\end{aligned}
$$

这说明了 $Y$ 服从参数为 $\lambda\beta$ 的指数分布.■

16. 若 $X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, $P(X_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$,$N$ 与 $X_i, i = 1, 2, \cdots$ 独立且服从参数为 $\beta$ 的几何分布, $0 < \beta < 1$. 试求随机和 $Y = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ 的均值, 方差和三、四阶矩.

**解 1** 由题设可知, 对任意正整数 $n$, 有

$$
\begin{aligned}
E(Y \mid N = n) =& E(\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N = n) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i \mid N = n) \\
=& E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = nE(X_1) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Y^2 \mid N = n) =& E[(\sum_{i=1}^{N} X_i)^2 \mid N = n] = E[(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2 \mid N = n] \\
=& E[(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i X_j) \\
=& \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = n,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Y^3 \mid N = n) =& E[(\sum_{i=1}^{N} X_i)^3 \mid N = n] = E[(\sum_{i=1}^{n} X_i)^3 \mid N = n] \\
=& E[(\sum_{i=1}^{n} X_i)^3] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_i X_j X_k) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Y^4 \mid N = n) =& E[(\sum_{i=1}^{N} X_i)^4 \mid N = n] = E[(\sum_{i=1}^{n} X_i)^4 \mid N = n] \\
=& E[(\sum_{i=1}^{n} X_i)^4] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} E(X_i X_j X_k X_l) \\
=& \sum_{i=1}^{n} E(X_i^4) + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} E(X_i^2 E(X_j^2) = n^2,
\end{aligned}
$$

故 $Y$ 的均值为

$$
E(Y) = E[E(Y \mid N)] = 0,
$$

二阶矩为

$$
E(Y^2) = E[E(Y^2 \mid N)] = E(N)
$$

$$=\beta\sum_{n=1}^{\infty}n(1-\beta)^{n-1}=\frac{1}{\beta},$$

三阶矩为

$$E(Y^3)=E[E(Y^3\mid N)]=0,$$

四阶矩为

$$\begin{aligned}E(Y^4)=&E[E(Y^4\mid N)]=E(N^2)\\=&\beta\sum_{n=1}^{\infty}n^2(1-\beta)^{n-1}=\frac{1}{\beta}.\end{aligned}$$

**解 2** 由题设可知, 对任意正整数 $n$, 有

$$\begin{aligned}E(e^{tY}\mid N=n)=&E(\exp\{t\sum_{i=1}^{N}X_i\}\mid N=n)=E(\exp\{t\sum_{i=1}^{n}X_i\}\mid N=n)\\=&E(\exp\{t\sum_{i=1}^{n}X_i\})=[E(e^{tX_1})]^n\\=&\left[\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{t})\right]^n,\end{aligned}$$

因此

$$E(e^{tY}\mid N)=\left[\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{t})\right]^N,$$

由此可得 $Y$ 的矩母函数为

$$\begin{aligned}g_Y(t)=&E(e^{tY})=E[E(e^{tY}\mid N)]\\=&\beta\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{t})\right]^n(1-\beta)^{n-1}\\=&\frac{\beta(e^{-t}+e^{t})}{2-(1-\beta)(e^{-t}+e^{t})}.\end{aligned}$$

故 $Y$ 的均值为

$$E(Y)=\frac{dg_Y(t)}{dt}\mid_{t=0}=0,$$

二阶矩为

$$E(Y^2)=\frac{d^2g_Y(t)}{dt^2}\mid_{t=0}=\frac{1}{\beta},$$

三阶矩为

$$E(Y^3)=\frac{d^3g_Y(t)}{dt^3}\mid_{t=0}=0,$$

四阶矩为

$$E(Y^4)=\frac{d^4g_Y(t)}{dt^4}\mid_{t=0}=\frac{1}{\beta}.$$

■

17. 随机变量 $N$ 服从参数为 $\lambda$ 的 Poisson 分布. 给定 $N=n$, 随机变量 $M$ 服从以 $n$ 和 $p$ 为参数的二项分布. 试求 $M$ 的无条件概率分布.

**解** 由题设可知

$$P(M=m \mid N=n)=\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m},\quad m=0,1,2,\cdots,n, n=0,1,2,\cdots,$$

$$P(N=n)=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!},\quad n=0,1,2,\cdots,$$

故 $M$ 的无条件概率分布为

$$\begin{aligned}
P(M=m) &= \sum_{n=m}^{\infty} P(M=m \mid N=n)P(N=n) \\
&= p^m e^{-\lambda}\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}\frac{(1-p)^{n-m}\lambda^n}{n!} \\
&= \frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda}}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda]^n}{n!} \\
&= \frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda p}}{m!},\quad m=0,1,2,\cdots.
\end{aligned}$$

这说明了 $Y$ 服从参数为 $\lambda p$ 的 Poisson 分布.■

## 习题 2

1. 设 $\{N(t):t\geq 0\}$ 是一强度为 $\lambda$ 的 Poisson 过程, 对 $0\leq s<t$, 试求条件概率 $P(N(s)=k\mid N(t)=n)$.

**解** 由题设可知

$$P(N(t)=n)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},\quad n=0,1,2,\cdots,t>0.$$

$$\begin{aligned}P(N(s)=k,N(t)=n)&=P(N(s)=k,N(t)-N(s)=n-k)\\&=P(N(s)=k)P(N(t)-N(s)=n-k)\\&=\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}\cdot\frac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(t-s)}\\&=\frac{\lambda^n s^k(t-s)^{n-k}}{k!(n-k)!}e^{-\lambda t},\\&\qquad k=0,1,\cdots,n,n=0,1,2,\cdots,0\leq s<t.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}P(N(s)=k\mid N(t)=n)&=\frac{P(N(s)=k,N(t)=n)}{P(N(t)=n)}\\&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k},\\&\qquad k=0,1,\cdots,n,n=0,1,2,\cdots,0\leq s<t.\end{aligned}$$

这说明了,$N(s)\mid N(t)=n\sim B(n,\frac{s}{t})$,$0\leq s<t$.■

2. 设 $\{N(t):t\geq 0\}$ 是一强度为 $\lambda$ 的 Poisson 过程, 对 $t>0,s\geq s$, 试计算 $E[N(t)N(t+s)]$.

**解** 由题设可知

$$\begin{aligned}E[N(t)N(t+s)]&=E\{N(t)[(N(t+s)-N(t))+N(t)]\}\\&=E[N(t)(N(t+s)-N(t))]+E[N(t)^2]\\&=E[N(t)]E[N(t+s)-N(t)]+Var[N(t)]+[E(N(t))]^2\\&=\lambda t\cdot\lambda s+\lambda t+(\lambda t)^2\\&=\lambda t[\lambda(t+s)+1].\end{aligned}$$

■

3. 电报依平均速率为每小时 3 个的 Poisson 过程达到电报局, 试问

(i) 从早上 8 时到中午没收到电报的概率;

(ii) 下午第一份电报达到时间的分布是什么?

**解** 从早上 8 时开始计时, 以小时为计时单位, 则

(i) 所求概率为

$$P(N(4)=0)=e^{-3\cdot 4}\approx 6.1442\times 10^{-6}.$$

(ii) 记下午第一份电报达到时间为 $T_1$, 则

$$P(T_1>t)=P(N(t)=N(4))=e^{-3(t-4)},\quad t>4.$$

由此可得 $T_1$ 的分布函数为

$$F_{T_1}(t)=1-P(T_1>t)=1-e^{-3(t-4)},\quad t>4,$$

密度函数为

$$f_{T_1}(t)=\frac{dF_{T_1}(t)}{dt}=3e^{-3(t-4)},\quad t>4.$$

这说明了 $T_1-4$ 服从参数为 3 的指数分布. ■

4.$\{N(t):t\geq 0\}$ 为一 $\lambda=2$ 的 Poisson 过程, 试求

(i)$P(N(1)\leq 2)$;

(ii)$P(N(1)=1\text{且}N(2)=3)$;

(iii)$P(N(1)\geq 2\mid N(1)\geq 1)$.

**解** (i)

$$\begin{aligned}P(N(1)\leq 2)&=P(N(1)=0)+P(N(1)=1)+P(N(1)=2)\\&=e^{-2}+\frac{2^1}{1!}e^{-2}+\frac{2^2}{2!}e^{-2}\\&\approx 0.6767.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}P(N(1)=1\text{且}N(2)=3)&=P(N(1)=1,N(2)-N(1)=2)\\&=P(N(1)=1)P(N(2)-N(1)=2)\\&=\frac{2^1}{1!}e^{-2}\cdot\frac{[2(2-1)]^2}{2!}e^{-2(2-1)}\\&\approx 0.0733.\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}P(N(1)\geq 2\mid N(1)\geq 1)&=\frac{P(N(1)\geq 2,N(1)\geq 1)}{P(N(1)\geq 1)}\\&=\frac{P(N(1)\geq 2)}{P(N(1)\geq 1)}=\frac{1-P(N(1)=0)-P(N(1)=1)}{1-P(N(1)=0)}\\&=1-\frac{P(N(1)=1)}{1-P(N(1)=0)}=1-\frac{\frac{2^1}{1!}e^{-2}}{1-e^{-2}}\\&\approx 0.6870.\end{aligned}$$

■

6. 一部 600 页的著作总共有 240 个印刷错误, 试利用 Poisson 过程近似求出某连续 3 页有 $k$ 个印刷错误的概率,$k=0,1,2,\cdots,240$.

**解** 所求概率为

$$P(N(m+3)-N(m)=k \mid N(600)=240),$$
$$k=0,1,2,\cdots,240, m=0,1,2,\cdots,597. \tag{1}$$

由于

$$\begin{aligned}
&P(N(m+3)-N(m)=k, N(600)=240)\\
=&\sum_{l=0}^{240-k} P(N(m)=l, N(m+3)-N(m)=k, N(600)-N(m+3)=240-k-l)\\
=&\sum_{l=0}^{240-k} P(N(m)=l)P(N(m+3)-N(m)=k)P(N(600)-N(m+3)=240-k-l)\\
=&\sum_{l=0}^{240-k} \frac{(m\lambda)^l}{l!}e^{-m\lambda}\cdot\frac{(3\lambda)^k}{k!}e^{-3\lambda}\cdot\frac{[\lambda(597-m)]^{240-k-l}}{(240-k-l)!}e^{-\lambda(597-m)}\\
=&\lambda^{240}e^{-600\lambda}\frac{3^k}{k!}\sum_{l=0}^{240-k}\frac{m^l}{l!}\frac{(597-m)^{240-k-l}}{(240-k-l)!}\\
=&\lambda^{240}e^{-600\lambda}\frac{3^k 597^{240-k}}{k!(240-k)!}, \qquad k=0,1,2,\cdots,240, m=0,1,2,\cdot,597,
\end{aligned}$$

$$P(N(600)=240)=\frac{(600\lambda)^{240}}{240!}e^{-600\lambda},$$

因此, 由 (1) 可得

$$\begin{aligned}
&P(N(m+3)-N(m)=k \mid N(600)=240)\\
&=\frac{P(N(m+3)-N(m)=k, N(600)=240)}{P(N(600)=240)}\\
&=\frac{240!}{k!(240-k)!}\left(\frac{3}{600}\right)^k\left(1-\frac{3}{600}\right)^{240-k},\\
&\qquad k=0,1,2,\cdots,240, m=0,1,2,\cdots,597.
\end{aligned} \tag{2}$$

利用以下事实:

$$\lim_{n\to\infty, np_n\to\lambda}\frac{n!}{k!(n-k)!}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\cdots \tag{3}$$

可将 (2) 中概率表为

$$\begin{aligned}
&P(N(m+3)-N(m)=k \mid N(600)=240)\\
\approx&\frac{(240\cdot 3/600)^k}{k!}e^{-240\cdot 3/600}=\frac{(6/5)^k}{k!}e^{-6/5},
\end{aligned}$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots, 240, m = 0, 1, 2, \cdots, 597. \tag{4}$$

根据 (2) 和 (4) 计算可得

| k | 精确值 | 近似值 | k | 精确值 | 近似值 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.3003 | 0.3012 | 6 | 0.0012 | 0.0012 |
| 1 | 0.3622 | 0.3614 | 7 | 0.0002 | 0.0002 |
| 2 | 0.2175 | 0.2169 | 8 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3 | 0.0867 | 0.0867 | 9 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4 | 0.0258 | 0.0260 | 10 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5 | 0.0061 | 0.0062 | 11 | 0.0000 | 0.0000 |

■

8. 令 $\{N_i(t) : t \geq 0\}, i = 1, \cdots, n$ 为 $n$ 个独立的分别有强度参数 $\lambda_i, i = 1, \cdots, n$ 的 Poisson 过程, 记 $T$ 为在全部 $n$ 个过程中至少发生了一件事件的时刻, 试求 $T$ 的分布.

**解** 由题意可知

$$\{T > t\} = \{N_i(t) = 0, i = 1, \cdots, n\}, \quad t > 0,$$

故

$$\begin{aligned} P(T > t) &= P(N_i(t) = 0, i = 1, \cdots, n) \\ &= P(N_1(t) = 0) \cdots P(N_n(t) = 0) \\ &= e^{-t\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i}, \quad t > 0, \end{aligned}$$

因而, $T$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - P(T > t) \\ &= 1 - e^{-t\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i}, \quad t > 0, \end{aligned}$$

密度函数为

$$f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \cdot e^{-t\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i}, \quad t > 0.$$

这说明了 $T$ 服从参数为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$ 的指数分布.■

8. 设 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是强度为 $\lambda$ 的 Poisson 过程. 给定 $N(t) = n$, 试求第 $r$ 个事件发生的时刻 $W_r$ 的条件密度函数 $f_{W_r|N(t)}(w_r \mid n), r = 1, \cdots, n$.

**解** 注意到

$$\{W_r \leq w_r\} = \{N(w_r) \geq r\}, \quad r = 1, \cdots, n,$$

因而有

$$P(W_r \leq w_r \mid N(t) = n) = P(N(w_r) \geq r \mid N(t) = n)$$

$$= \frac{P(N(w_r) \geq r, N(t) = n)}{P(N(t) = n)}, \quad w_r, t > 0. \tag{1}$$

而当 $0 < w_r < t$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&P(N(w_r) \geq r, N(t) = n) \\
=&\sum_{k=r}^{n} P(N(w_r) = k, N(t) = n) \\
=&\sum_{k=r}^{n} P(N(w_r) = k, N(t) - N(w_r) = n-k) \\
=&\sum_{k=r}^{n} P(N(w_r) = k) P(N(t) - N(w_r) = n-k) \\
=&\sum_{k=r}^{n} \frac{(\lambda w_r)^k}{k!} e^{-\lambda w_r} \cdot \frac{[\lambda(t-w_r)]^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(t-w_r)} \\
=&\lambda^n e^{-\lambda t} \sum_{k=r}^{n} \frac{w_r^k (t-w_r)^{n-k}}{k!(n-k)!}, \quad r = 1, \cdots, n.
\end{aligned} \tag{2}$$

又

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{3}$$

将 (2) 和 (3) 代入 (1) 中可得

$$\begin{aligned}
P(W_r \leq w_r \mid N(t) = n) = \frac{1}{t^n} \sum_{k=r}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} w_r^k (t-w_r)^{n-k}, \\
0 < w_r < t, r = 1, \cdots, n.
\end{aligned} \tag{4}$$

而

$$\begin{aligned}
\int_0^{w_r} u^{r-1}(t-u)^{n-r} du =& \frac{1}{r} \int_0^{w_r} (t-u)^{n-r} d(u^r) \\
=& \frac{1}{r} w_r^r (t-w_r)^{n-r} + \frac{n-r}{r} \int_0^{w_r} u^r (t-u)^{n-r-1} du \\
=& \cdots\cdots \\
=& (r-1)!(n-r)! \sum_{k=r}^{n} \frac{w_r^r (t-w_r)^{n-r}}{k!(n-k)!}, \\
& 0 < w_r < t, r = 1, \cdots, n,
\end{aligned}$$

将其代入 (4) 中得

$$\begin{aligned}
P(W_r \leq w_r \mid N(t) = n) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!t^n} \int_0^{w_r} u^{r-1}(t-u)^{n-r} du, \\
0 < w_r < t, r = 1, \cdots, n.
\end{aligned}$$

这说明了, 定 $N(t) = n$,$W_r$ 的条件密度函数为

$$f_{W_r|N(t)}(w_r \mid n) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!t^n} w_r^{r-1} (t-w_r)^{n-r}, \quad 0 < w_r < t, r = 1, \cdots, n.$$

■

9. 考虑参数为 $\lambda$ 的 Poisson 过程 $\{N(t):t\geq 0\}$, 若每一事件独立地以概率 $p$ 被观察到, 并将观察到的过程记为 $\{N_1(t):t\geq 0\}$. 试问 $\{N_1(t):t\geq 0\}$ 是什么过程? $\{N(t)-N_1(t):t\geq 0\}$ 呢?$\{N_1(t):t\geq 0\}$ 与 $\{N(t)-N_1(t):t\geq 0\}$ 是否独立?

**解** 由题设易知

(i)$N_1(0)=0$;

(ii)$\{N_1(t):t\geq 0\}$ 是一独立增量过程.

往证

(iii) 对 $0\leq s<t$, $N_1(t)-N_1(s)$ 服从参数为 $\lambda p(t-s)$ 的 Poisso 分布. 从而, 由 (i)$-$(iii) 可知, $\{N_1(t):t\geq 0\}$ 是一参数为 $\lambda p$ 的 Poisso 过程. 其实, 对 $0\leq s<t$, 有

$$P(N_1(t)-N_1(s)=m\mid N(t)-N(s)=n)=\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m},$$
$$m=0,1,\cdots,n,n=0,1,2,\cdots. \qquad (1)$$

而由 $\{N(t):t\geq 0\}$ 是参数为 $\lambda$ 的 Poisson 过程可知, 对 $0\leq s<t$, 有

$$P(N(t)-N(s)=n)=\frac{[\lambda(t-s)]^n}{n!}e^{-\lambda(t-s)},\quad n=0,1,2,\cdots. \qquad (2)$$

故由 (1) 和 (2) 可得

$$\begin{aligned}
&P(N_1(t)-N_1(s)=m)\\
=&\sum_{n=m}^{\infty}P(N_1(t)-N_1(s)=m\mid N(t)-N(s)=n)P(N(t)-N(s)=n)\\
=&\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}\cdot\frac{[\lambda(t-s)]^n}{n!}e^{-\lambda(t-s)}\\
=&\frac{p^m}{m!}e^{-\lambda(t-s)}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(1-p)^{n-m}[\lambda(t-s)]^n}{(n-m)!}\\
=&\frac{[\lambda p(t-s)]^m}{m!}e^{-\lambda p(t-s)},\quad m=0,1,\cdots,
\end{aligned}$$

这即说明了, 对 $0\leq s<t$, $N_1(t)-N_1(s)$ 服从参数为 $\lambda p(t-s)$ 的 Poisso 分布.

注意到若 $n$ 个随机事件 $A_1,\cdots,A_n$ 独立, 则 $n$ 个随机事件 $\bar{A}_1,\cdots,\bar{A}_n$ 也独立, 其中 $\bar{A}_i$ 等于 $A_i$ 或等于 $A_i$ 的对立事件,$i=1,\cdots,n$, 因而,$\{N_1(t):t\geq 0\}$ 与 $\{N(t)-N_1(t):t\geq 0\}$ 独立. 由 $N_1(t)$ 和 $N(t)-N_1(t)$ 的对称性可知, $\{N(t)-N_1(t):t\geq 0\}$ 是一参数为 $\lambda(1-p)$ 的 Poisso 过程.■

10. 公路上到达某加油站的卡车服从参数为 $\lambda_1$ 的 Poisson 过程 $\{N_1(t):t\geq 0\}$, 而到达的小汽车服从参数为 $\lambda_2$ 的 Poisson 过程 $\{N_2(t):t\geq 0\}$, 且 $\{N_1(t):t\geq 0\}$ 与 $\{N_2(t):t\geq 0\}$ 独立. 试问 $\{N(t):t\geq 0\}\hat{=}\{N_1(t)+N_2(t):t\geq 0\}$ 是什么过程? 并计算在总车流数 $\{N(t):t\geq 0\}$ 中, 卡车首先到达的概率.

**解** 首先, 由题设易知,$N(0)=0$.

其次, 由于 $\{N_1(t):t\geq 0\}$ 与 $\{N_2(t):t\geq 0\}$ 独立, 因此, 对任意 $0\leq t_1<\cdots<t_n$,$n$ 维随机向量 $(N_1(t_1),\cdots,N_1(t_n))$ 与 $(N_2(t_1),\cdots,N_2(t_n))$ 独立, 从而, $n-1$ 维随机向量 $(N_1(t_2)-N_1(t_1),\cdots,N_1(t_n)-N_1(t_{n-1}))$ 与 $(N_2(t_2)-N_2(t_1),\cdots,N_2(t_n)-N_2(t_{n-1}))$ 独立, 而 $N_1(t_2)-N_1(t_1),\cdots,N_1(t_n)-N_1(t_{n-1})$ 独立, $N_2(t_2)-N_2(t_1),\cdots,N_2(t_n)-N_2(t_{n-1})$ 独立, 故 $N_1(t_2)-N_1(t_1),\cdots,N_1(t_n)-N_1(t_{n-1}),N_2(t_2)-N_2(t_1),\cdots,N_2(t_n)-N_2(t_{n-1})$ 独立, 因而,$N(t_2)-N(t_1),\cdots,N(t_n)-N(t_{n-1})$ 独立. 这说明了,$\{N(t):t\geq 0\}$ 是一独立增量过程.

最后, 对任意 $0\leq s<t$, 由于 $N_1(t)-N_1(s)$ 服从参数为 $\lambda_1(t-s)$ 的 Poisson 分布, $N_2(t)-N_2(s)$ 服从参数为 $\lambda_2(t-s)$ 的 Poisson 分布, 且 $N_1(t)-N_1(s)$ 与 $N_2(t)-N_2(s)$ 独立, 因此,$N(t)-N(s)$ 服从参数为 $(\lambda_1+\lambda_2)(t-s)$ 的 Poisson 分布. 故 $\{N(t):t\geq 0\}$ 是一参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 过程.

以 $U_1$ 和 $V_1$ 分别表示在过程 $\{N_1(t):t\geq 0\}$ 和 $\{N_2(t):t\geq 0\}$ 中第一辆车达到的时刻, 则 $U_1$ 和 $V_1$ 独立, 分别服从参数为 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的指数分布. 所求卡车首先到达的概率为

$$\begin{aligned}
P(U_1<V_1)&=\lambda_1\lambda_2\iint\limits_{u,v>0,u<v}e^{-(\lambda_1u+\lambda_2v)}dudv\\
&=\lambda_1\lambda_2\int_0^{+\infty}e^{-\lambda_1u}du\int_u^{+\infty}e^{-\lambda_2v}dv\\
&=\lambda_1\int_0^{+\infty}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)u}du\\
&=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}.
\end{aligned}$$

■

11. 冲击模型 (Shock Model) 记 $N(t)$ 为某系统到时刻 $t$ 受到的冲击次数, 这是参数为 $\lambda$ 的 Poisson 过程. 设第 $k$ 次冲击对系统的损害大小 $Y_k$ 服从参数为 $\mu$ 的指数分布,$Y_k,k=1,2,\cdots$ 独立同分布. 记 $X(t)$ 为系统所受到的总损害, 当损害超过一定的极限 $\alpha$ 时, 系统就不能运行, 寿命终止. 记 $T$ 为系统寿命. 试求该系统的平均寿命 $E(T)$, 并对所得结果作出直观解释.

**解** 注意到

$$\{T>t\}=\{X(t)\leq\alpha\},\quad t>0,$$

因而

$$\begin{aligned}
P(T>t)=P(X(t)\leq\alpha)&=P(\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k\leq\alpha)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}P(\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k\leq\alpha,N(t)=n)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}P(\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k\leq\alpha\mid N(t)=n)P(N(t)=n)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}P(\sum_{k=1}^{n}Y_k\leq\alpha\mid N(t)=n)P(N(t)=n)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{n} Y_k \le \alpha) P(N(t) = n), \quad t > 0. \tag{1}$$

而由于 $Y_k, k = 1, 2, \cdots$ 独立同分布, $Y_1$ 服从参数为 $\mu$ 的指数分布, 因此,$S_n \hat{=} \sum_{k=1}^{n} Y_k$ 具有密度函数

$$f_{S_n}(s) = \frac{\mu^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\mu s}, \quad s > 0, n = 1, 2, \cdots,$$

故

$$P(\sum_{k=1}^{n} Y_k \le \alpha) = \frac{\mu^n}{(n-1)!} \int_0^{\alpha} s^{n-1} e^{-\mu s} ds, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{2}$$

又

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{3}$$

将 (2) 和 (3) 代入 (1) 中得

$$P(T > t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda \mu t)^n}{n!(n-1)!} \int_0^{\alpha} s^{n-1} e^{-\mu s} ds, \quad t > 0.$$

故

$$\begin{aligned}
E(T) &= \int_0^{+\infty} P(T > t) dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu\lambda)^n}{n!(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} dt \cdot \int_0^{\alpha} s^{n-1} e^{-\mu s} ds \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{(n-1)!} \int_0^{\alpha} s^{n-1} e^{-\mu s} ds \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\alpha} e^{-\mu s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{(n-1)!} s^{n-1} ds \\
&= \frac{\mu}{\lambda} \int_0^{\alpha} ds = \frac{\mu\alpha}{\lambda}.
\end{aligned}$$

这说明了, 若 $\lambda$ 越大 (即系统所受冲击越频繁),$\mu$ 越小 (即每次冲击所造成的平均损害越大), $\alpha$ 越小 (即系统所能承受的损害极限越小), 则系统的平均寿命越短. 这是符合常识的.■

12. 令 $\{N(t) : t \ge 0\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次 Poisson 过程,$X_1, X_2, \cdots$ 为事件间的时间间隔.

(i)$X_1, X_2, \cdots$ 是否独立?

(ii)$X_1, X_2, \cdots$ 是否同分布?

(iii) 试求 $(X_1, X_2)$ 的分布.

**解** 注意到

$$\{W_k \le t\} = \{N(t) \ge k\}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

因此,$(W_1,W_2)$ 的联合分布函数为

$$\begin{aligned}F_{(W_1,W_2)}(t_1,t_2)&=P(W_1\le t_1,W_2\le t_2)\\&=P(N(t_1)\ge 1,N(t_2)\ge 2)\\&=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}P(N(t_1)=l,N(t_2)=k),\quad 0\le t_1<t_2.\end{aligned}\tag{1}$$

而对 $1\le l\le k, 0\le t_1<t_2$, 有

$$\begin{aligned}P(N(t_1)=l,N(t_2)=k)&=P(N(t_1)=l,N(t_2)-N(t_1)=k-l)\\&=P(N(t_1)=l)P(N(t_2)-N(t_1)=k-l)\\&=\frac{m(t_1)^l}{l!}e^{-m(t_1)}\cdot\frac{[m(t_2)-m(t_1)]^{k-l}}{(k-l)!}e^{-[m(t_2)-m(t_1)]}\\&=\frac{m(t_1)^l[m(t_2)-m(t_1)]^{k-l}}{l!(k-l)!}e^{-m(t_2)},\end{aligned}$$

将其代入 (1) 中得

$$\begin{aligned}F_{(W_1,W_2)}(t_1,t_2)&=e^{-m(t_2)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l}m(t_1)^l[m(t_2)-m(t_1)]^{k-l}\\&=e^{-m(t_2)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\left\{\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}m(t_1)^l[m(t_2)-m(t_1)]^{k-l}-[m(t_2)-m(t_1)]^k\right\}\\&=e^{-m(t_2)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\left\{m(t_2)^k-[m(t_2)-m(t_1)]^k\right\}\\&=e^{-m(t_2)}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m(t_2)^k-[m(t_2)-m(t_1)]^k}{k!}-m(t_1)\right\}\\&=e^{-m(t_2)}\left\{e^{m(t_2)}-e^{m(t_2)-m(t_1)}-m(t_1)\right\}\\&=1-e^{-m(t_1)}-m(t_1)e^{-m(t_2)},\quad 0\le t_1<t_2.\end{aligned}\tag{2}$$

故 $(W_1,W_2)$ 的联合密度函数为

$$\begin{aligned}f_{(W_1,W_2)}(t_1,t_2)&=\frac{\partial^2F_{(W_1,W_2)}(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}\\&=\lambda(t_1)\lambda(t_2)e^{-m(t_2)},\quad 0\le t_1<t_2.\end{aligned}\tag{3}$$

由于

$$W_1=X_1,\quad W_2=X_1+X_2,$$

因此从 $(W_1,W_2)$ 到 $(X_1,X_2)$ 的 Jacob 行列式为

$$\frac{\partial(W_1,W_2)}{\partial(X_1,X_2)}=1,$$

因而, 由 (3) 可得 $(X_1,X_2)$ 的联合密度函数为

$$f_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2)=\lambda(t_1)\lambda(t_1+t_2)e^{-m(t_1+t_2)},\quad t_1,t_2>0.\tag{4}$$

这说明了, 一般地, $X_1$ 与 $X_2$ 不独立, 且 $X_1$ 的密度函数为

$$\begin{aligned} f_{X_1}(t_1) &= \lambda(t_1)\int_0^{+\infty}\lambda(t_1+t_2)e^{-m(t_1+t_2)}dt_2 \\ &= \lambda(t_1)[e^{-m(t_1)}-e^{-m(+\infty)}], \quad t_1>0, \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $e^{-m(+\infty)}$ 由下式确定:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t_1)dt_1 = \int_0^{+\infty}\lambda(t_1)[e^{-m(t_1)}-e^{-m(+\infty)}]dt_1 \\ &= 1-[m(+\infty)+1]e^{-m(+\infty)}, \end{aligned}$$

即

$$e^{-m(+\infty)} = 0.$$

将其代入 (5) 中得

$$f_{X_1}(t_1) = \lambda(t_1)e^{-m(t_1)}, \quad t_1>0, \tag{6}$$

进而, 由 (4) 知, $X_2$ 的密度函数为

$$f_{X_2}(t_2) = \int_0^{+\infty}\lambda(t_1)\lambda(t_1+t_2)e^{-m(t_1+t_2)}dt_1, \quad t_2>0, \tag{7}$$

■

13. 考虑对所有 $t\ge 0$, 强度函数 $\lambda(t)$ 均大于 0 的非齐次 Poisson 过程 $\{N(t), t\ge 0\}$. 令 $m(t)=\int_0^t\lambda(u)du, t\ge 0$,$m(t)$ 的反函数记为 $l(t), t\ge 0$, 记 $N_1(t)=N(l(t)), t\ge 0$. 试证: $\{N_1(t), t\ge 0\}$ 是通常的 Poisson 过程, 并求其强度.

**解** 首先, $N_1(0)=N(l(0))=N(0)=0$. 其次, 由题设可知, $m(t)$ 是 $t\ge 0$ 的严增函数, 因此其反函数 $l(t)$ 也是 $t\ge 0$ 的严增函数. 从而, 对任意 $0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$, 有 $0\le l(t_1)<l(t_2)<\cdots<l(t_n)$, 故由

$$N_1(t_2)-N_1(t_1)=N(l(t_2))-N(l(t_1)),\cdots,N_1(t_n)-N_1(t_{n-1})=N(l(t_n))-N(l(t_{n-1}))$$

及 $\{N(t), t\ge 0\}$ 中增量的独立性可知, $\{N_1(t), t\ge 0\}$ 中增量也是独立的. 最后, 对任意 $0\le s<t$, 有

$$\begin{aligned} P(N_1(t)-N_1(s)=k) &= P(N(l(t))-N(l(s))=k) \\ &= \frac{[m(l(t))-m(l(s))]^k}{k!}e^{-[m(l(t))-m(l(s))]}, \quad k=0,1,2,\cdots. \end{aligned}$$

而

$$m(l(t))=t, \quad t\ge 0,$$

故

$$P(N_1(t)-N_1(s)=k)=\frac{(t-s)^k}{k!}e^{-(t-s)}, \quad k=0,1,2,\cdots.$$

综上所述,$\{N(t), t \geq 0\}$ 是一强度为 1 的 Poisson 过程.■

14. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一更新过程, 试判断下述命题的真伪:

(i)$\{N(t) < k\} = \{W_k > t\}$,

(ii)$\{N(t) \leq k\} = \{W_k \geq t\}$,

(iii)$\{N(t) > k\} = \{W_k < t\}$,

其中 $W_k$ 是第 $k$ 个事件的等待时间, $k = 1, 2, \cdots$.

**解** 由 $\{W_k \leq t\} = \{N(t) \geq k\}, k = 1, 2, \cdots, t \geq 0$ 可知

(i)$\{N(t) < k\} = \overline{\{N(t) \geq k\}} = \overline{\{W_k \leq t\}} = \{W_k > t\}$.

(ii)$\{N(t) \leq k\} = \{N(t) < k+1\} = \overline{\{N(t) \geq k+1\}} = \overline{\{W_{k+1} \leq t\}} = \{W_{k+1} > t\}$.

(iii)$\{N(t) > k\} = \{N(t) \geq k+1\} = \{W_{k+1} \leq t\}$. ■

## 习题 3

1. 对于 Markov 链 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$, 试证条件

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

等价于对所有非负整数 $n$ 和 $m$ 及所有状态 $i_0, \cdots, i_n, j_1, \cdots, j_m$, 有

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = j_1, \cdots, X_{n+m} = j_m \mid X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) \\ =&P(X_{n+1} = j_1, \cdots, X_{n+m} = j_m \mid X_n = i_n). \end{aligned} \tag{0}$$

**证明** 首先证明 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 为 Markov 链 $\Leftrightarrow$ 对任意非负整数 $n$ 和 $k \le n$, 任意 $\{n_1, \cdots, n_k\} \subset \{0, 1, \cdots, n-1\}$ 及任意状态 $i_{n_1}, \cdots, i_{n_k}, i, j$, 均有

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = j \mid X_{n_1} = i_{n_1}, \cdots, X_{n_k} = i_{n_k}, X_n = i) \\ =&P(X_{n+1} = j \mid X_n = i). \end{aligned} \tag{1}$$

其实,"(1)$\Rightarrow\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 为 Markov 链" 是显然的 (在 (1) 中取 $k = n$ 即可看出). 往证"$\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 为 Markov 链 $\Rightarrow$(1)". 由 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 为 Markov 链知, 对任意非负整数 $n$ 及任意状态 $i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}, i, j$, 均有

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i),$$

即

$$\frac{P(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i, X_{n+1} = j)}{P(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i)} = \frac{P(X_n = i, X_{n+1} = j)}{P(X_n = i)},$$

因而

$$\frac{P(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i, X_{n+1} = j)}{P(X_n = i, X_{n+1} = j)} = \frac{P(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i)}{P(X_n = i)}. \tag{2}$$

而

$$\begin{aligned} &P(X_{n_1} = i_{n_1}, \cdots, X_{n_k} = i_{n_k}, X_n = i, X_{n+1} = j) \\ =&\sum_{\substack{i_m \in \mathcal{X}, m = 0, 1, \cdots, n-1, \\ m \ne n_1, \cdots, n_k}} P(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i, X_{n+1} = j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(X_{n_1} = i_{n_1}, \cdots, X_{n_k} = i_{n_k}, X_n = i) \\ =&\sum_{\substack{i_m \in \mathcal{X}, m = 0, 1, \cdots, n-1, \\ m \ne n_1, \cdots, n_k}} P(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) \end{aligned}$$

因而由 (2) 可得

$$\frac{P(X_{n_1} = i_{n_1}, \cdots, X_{n_k} = i_{n_k}, X_n = i, X_{n+1} = j)}{P(X_n = i, X_{n+1} = j)} = \frac{P(X_{n_1} = i_{n_1}, \cdots, X_{n_k} = i_{n_k}, X_n = i)}{P(X_n = i)},$$

即

$$\frac{P(X_{n_1}=i_{n_1},\cdots,X_{n_k}=i_{n_k},X_n=i,X_{n+1}=j)}{P(X_{n_1}=i_{n_1},\cdots,X_{n_k}=i_{n_k},X_n=i)}=\frac{P(X_n=i,X_{n+1}=j)}{P(X_n=i)},$$

由此立得 (1).

其次, 证明 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 为 Markov 链 $\Leftrightarrow$(0). "(0)$\Rightarrow\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 为 Markov 链" 是显然的 (在 (0) 中取 $m=1$ 即可看出). 往证"$\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 为 Markov 链 $\Rightarrow$(0)". 由 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 为 Markov 链可得

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m\mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)\\
=&\frac{P(X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n,X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m)}{P(X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)}\\
=&\frac{P(X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n,X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m)}{P(X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n,X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m-1}=j_{m-1})}\\
&\cdot\frac{P(X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n,X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m-1}=j_{m-1})}{P(X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)}\\
=&P(X_{n+m}=j_m\mid X_{n+m-1}=j_{m-1})\\
&\cdot\frac{P(X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n,X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m-1}=j_{m-1})}{P(X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)}\\
=&\cdots\cdots\\
=&P(X_{n+m}=j_m\mid X_{n+m-1}=j_{m-1})\cdots P(X_{n+2}=j_2\mid X_{n+1}=j_1)P(X_{n+1}=j_1\mid X_n=i_n).
\end{aligned}\tag{3}$$

由已证 (1) 可得

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m\mid X_n=i_n)\\
=&\frac{P(X_n=i_n,X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m)}{P(X_n=i_n)}\\
=&\frac{P(X_n=i_n,X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m)}{P(X_n=i_n,X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m-1}=j_{m-1})}\\
&\cdot\frac{P(X_n=i_n,X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m-1}=j_{m-1})}{P(X_n=i_n)}\\
=&P(X_{n+m}=j_m\mid X_{n+m-1}=j_{m-1})\\
&\cdot\frac{P(X_n=i_n,X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m-1}=j_{m-1})}{P(X_n=i_n)}\\
=&\cdots\cdots\\
=&P(X_{n+m}=j_m\mid X_{n+m-1}=j_{m-1})\cdots P(X_{n+2}=j_2\mid X_{n+1}=j_1)P(X_{n+1}=j_1\mid X_n=i_n).
\end{aligned}\tag{4}$$

由 (3) 和 (4) 即得 (0).■

2. 考虑状态空间 $\mathcal{X}=\{0,1,2\}$ 上的一个 Markov 链 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$, 其转移概

率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2 & 0.7\\ 0.9 & 0.1 & 0\\ 0.1 & 0.8 & 0.1\end{pmatrix},$$

初始分布为 $p_0=0.3, p_1=0.4, p_2=0.3$, 试求概率 $P(X_0=0,X_1=1,X_2=2)$.

**解** 所求概率为

$$\begin{aligned}&P(X_0=0,X_1=1,X_2=2)\\ =&P(X_2=2\mid X_1=1)P(X_1=1\mid X_0=0)P(X_0=0)\\ =&P_{12}P_{01}p_0=0.\end{aligned}$$

■

3. 信号传送问题. 信号只有 $0,1$ 两种, 分为多个阶段传送. 在每一步上出错的概率为 $\alpha$. $X_0=0$ 是送出的信号, 而 $X_n$ 是在第 $n$ 步接收到的信号. 假定 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 为一 Markov 链, 其状态空间为 $\mathcal{X}=\{0,1\}$, 转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}P_{00} & P_{01}\\ P_{10} & P_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\alpha & \alpha\\ \alpha & 1-\alpha\end{pmatrix},\quad \alpha\in(0,1).$$

试求

(a)$n$ 步均不出错的概率 $P(X_1=0,\cdots,X_n=0\mid X_0=0), n=1,2,\cdots,$

(b)$n$ 步之后传送无误的概率 $P(X_n=0\mid X_0=0), n=1,2,\cdots.$

**解** (a) 所求概率为

$$\begin{aligned}&P(X_1=0,\cdots,X_n=0\mid X_0=0)\\ =&P(X_n=0\mid X_0=0,X_1=0,\cdots,X_{n-1}=0)P(X_1=0,\cdots,X_{n-1}=0\mid X_0=0)\\ =&P(X_n=0\mid X_{n-1}=0)P(X_1=0,\cdots,X_{n-1}=0\mid X_0=0)\\ =&\cdots\cdots\\ =&P(X_n=0\mid X_{n-1}=0)\cdots P(X_1=0\mid X_0=0)\\ =&(1-\alpha)^n,\quad n=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

(b) 所求概率为

$$P(X_n=0\mid X_0=0)=P_{00}^{(n)},\quad n=1,2,\cdots, \tag{1}$$

其中 $P_{ij}^{(n)}$ 为 $n$ 步转移概率矩阵

$$P^{(n)}=\begin{pmatrix}P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)}\\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)}\end{pmatrix}=P^n=\begin{pmatrix}1-\alpha & \alpha\\ \alpha & 1-\alpha\end{pmatrix}^n \tag{2}$$

的元素,$i,j=0,1$. 注意到

$$P=T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-2\alpha\end{pmatrix}T',$$

其中

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

为一正交阵, 因而由 (2) 得

$$\begin{aligned}P^{(n)}&=T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-2\alpha\end{pmatrix}^n T'=T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (1-2\alpha)^n\end{pmatrix}T'\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+(1-2\alpha)^n & 1-(1-2\alpha)^n\\ 1-(1-2\alpha)^n & 1+(1-2\alpha)^n\end{pmatrix},\quad n=1,2,\cdots.\end{aligned}\tag{3}$$

由此及 (1) 即得

$$P(X_n=0\mid X_0=0)=\frac{1}{2}[1+(1-2\alpha)^n],\quad n=1,2,\cdots.$$

■

4. A,B 两罐总共装着 $N$ 个球. 作如下实验: 在时刻 $n$ 先从 $N$ 个球中等概率地任取一球, 然后从 A,B 两罐中任选一罐, 选中 A 罐的概率为 $p$, 选中 B 罐的概率为 $q$, $p+q=1$, 之后再将选出的球放入选好的罐中. 设 $X_n$ 为时刻 $n$ 时 A 罐中的球数, 试求此 Markov 链 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots,\}$ 的转移概率矩阵.

**解证** 由题设知,$\{X_n,n=0,1,2,\cdots,\}$ 的状态空间为 $\mathcal{X}=\{0,1,2,\cdots,N\}$. 以 $I_n$ 表示在时刻 $n$ 从 $N$ 个球中等概率地取得一球的结果, 约定

$$I_n=\begin{cases}0, & \text{在时刻 } n \text{ 从 B 罐中取出一球},\\ -1, & \text{在时刻 } n \text{ 从 A 罐中取出一球}.\end{cases}$$

由题设可知, 给定 $X_k=i_k,k\in\mathcal{X},k=0,1,\cdots,n-1$ 时,$I_n$ 的条件分布为

$$\begin{cases}P(I_n=0\mid X_k=i_k,k=0,1,\cdots,n-1)=P(I_n=0\mid X_{n-1}=i_{n-1})=1-\frac{i_{n-1}}{N},\\ P(I_n=-1\mid X_k=i_k,k=0,1,\cdots,n-1)=P(I_n=-1\mid X_{n-1}=i_{n-1})=\frac{i_{n-1}}{N}.\end{cases}\tag{1}$$

再以 $J_n$ 表示在时刻 $n$ 从 A,B 两罐中任选一罐所得的结果, 约定

$$J_n=\begin{cases}1, & \text{在时刻 } n \text{ 选中 A 罐},\\ 0, & \text{在时刻 } n \text{ 选中 B 罐}.\end{cases}$$

由题设可知,$\{X_n,n=0,1,2,\cdots,I_n=1,2,\cdots\}$ 与 $\{J_n,n=1,2,\cdots\}$ 独立, 且 $J_n$ 的分布为

$$\begin{cases}P(J_n=1)=p,\\ P(J_n=0)=q.\end{cases}\tag{2}$$

此外, 有

$$X_n=X_{n-1}+I_n+J_n,\quad n=1,2,\cdots.\tag{3}$$

下面往证 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots,\}$ 为一 Markov 链. 其实, 由 (1) 和 (2) 可知, 对任意正整数 $n$ 及任意状态 $i_0,\cdots,i_{n+1}\in\mathcal{X}$, 有

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)\\
=&P(X_n+I_{n+1}+J_{n+1}=i_{n+1}\mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)\\
=&P(I_{n+1}+J_{n+1}=i_{n+1}-i_n\mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)\\
=&P(I_{n+1}+J_{n+1}=i_{n+1}-i_n,I_{n+1}=0\mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)\\
&+P(I_{n+1}+J_{n+1}=i_{n+1}-i_n,I_{n+1}=-1\mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)\\
=&P(J_{n+1}=i_{n+1}-i_n,I_{n+1}=0\mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)\\
&+P(J_{n+1}=i_{n+1}-i_n+1,I_{n+1}=-1\mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)\\
=&P(J_{n+1}=i_{n+1}-i_n\mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n,I_{n+1}=0)\\
&\cdot P(I_{n+1}=0\mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)\\
&+P(J_{n+1}=i_{n+1}-i_n+1\mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n,I_{n+1}=-1)\\
&\cdot P(I_{n+1}=-1\mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)\\
=&P(J_{n+1}=i_{n+1}-i_n)(1-\frac{i_n}{N})+P(J_{n+1}=i_{n+1}-i_n+1)\frac{i_n}{N}\\
=&\begin{cases} p(1-\frac{i_n}{N}), & i_{n+1}-i_n=1,\\ q(1-\frac{i_n}{N})+p\frac{i_n}{N}, & i_{n+1}-i_n=0,\\ q\frac{i_n}{N}, & i_{n+1}-i_n=-1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
\end{aligned}\tag{4}$$

同理可得

$$P(X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_n=i_n)=\begin{cases} p(1-\frac{i_n}{N}), & i_{n+1}-i_n=1,\\ q(1-\frac{i_n}{N})+p\frac{i_n}{N}, & i_{n+1}-i_n=0,\\ q\frac{i_n}{N}, & i_{n+1}-i_n=-1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{5}$$

由此及 (4) 可得

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)\\
=&P(X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_n=i_n)\\
=&\begin{cases} p(1-\frac{i_n}{N}), & i_{n+1}-i_n=1,\\ q(1-\frac{i_n}{N})+p\frac{i_n}{N}, & i_{n+1}-i_n=0,\\ q\frac{i_n}{N}, & i_{n+1}-i_n=-1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
\end{aligned}\tag{6}$$

这说明了,$\{X_n, n=0,1,2,\cdots,\}$ 为一 Markov 链, 且其转移概率矩阵为

$$P=\frac{1}{N}\begin{pmatrix} qN & pN & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & q(N-1)+p & p(N-1) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q & q(N-2)+2p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2q+p(N-2) & 2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q(N-1) & q+p(N-1) & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & qN & pN \end{pmatrix}.$$

■

5. 重复掷币一直到连续出现两次正面为止. 假定出现正面的概率是 $p$, 出现反面的概率是 $q$, $p+q=1$. 试引入以连续出现次数为状态空间的 Markov 链, 并求平均需要掷多少次实验才会停止.

**解** 以 $I_n$ 表示第 $n$ 次掷币的结果, 约定

$$I_n=\begin{cases} 1, & \text{第 } n \text{ 次掷币出现正面}, \\ 0, & \text{第 } n \text{ 次掷币出现反面}, \end{cases} \quad n=1,2,\cdots, \tag{1}$$

则 $\{I_n, n=1,2,\cdots\}$ 为一独立同分布随机变量序列, $P(I_1=1)=p$,$P(I_1=0)=q$. 令二维随机向量

$$X_n=(I_n, I_{n+1}), \quad n=1,2,\cdots, \tag{2}$$

即 $X_n$ 表示相邻第 $n$ 和 $n+1$ 次掷币的结果,$n=1,2,\cdots$. 往证 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 是一状态空间为 $\mathcal{X}=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ 的 Markov 链. 为此, 注意到对任意正整数 $n$ 及任意状态 $i_k=(i_{k1},i_{k2})\in\mathcal{X}, k=1,\cdots,n$, 有

$$\begin{aligned} & P(X_k=(i_{k1},i_{k2}), k=1,\cdots,n) \\ =& P(I_k=i_{k1}, k=1,\cdots,n, I_{n+1}=i_{n2}) \\ =& \prod_{k=1}^{n} P(I_k=i_{k1})\cdot P(I_{n+1}=i_{n2}) \\ =& \prod_{k=1}^{n}(p^{i_{k1}}q^{1-i_{k1}})\cdot p^{i_{n2}}q^{1-i_{n2}} \\ =& \begin{cases} p^{\sum\limits_{k=1}^{n} i_{k1}+i_{n2}} q^{n+1-(\sum\limits_{k=1}^{n} i_{k1}+i_{n2})}, & i_{k2}=i_{k+1,1}, k=1,\cdots,n-1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

因而, 对任意正整数 $n$ 及任意状态 $i_k=(i_{k1},i_{k2})\in\mathcal{X}, k=1,\cdots,n+1$, 有

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1}=(i_{n+1,1},i_{n+1,2}) \mid X_k=(i_{k1},i_{k2}), k=1,\cdots,n) \\ =& \frac{P(X_k=(i_{k1},i_{k2}), k=1,\cdots,n+1)}{P(X_k=(i_{k1},i_{k2}), k=1,\cdots,n)} \\ =& \begin{cases} p^{i_{n+1,2}}q^{1-i_{n+1,2}}, & i_{k2}=i_{k+1,1}, k=1,\cdots,n, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

同理可知, 对任意正整数 $n$ 及任意状态 $i_k=(i_{k1},i_{k2})\in\mathcal{X}, k=n,n+1$, 有

$$\begin{aligned}&P(X_{n+1}=(i_{n+1,1},i_{n+1,2})\mid X_n=(i_{n1},i_{n2}))\\=&\begin{cases}p^{i_{n+1,2}}q^{1-i_{n+1,2}}, & i_{n2}=i_{n+1,1},\\0, & \text{其他}.\end{cases}\end{aligned}$$

由此及 (4) 可知, 对任意正整数 $n$ 及任意状态 $i_k=(i_{k1},i_{k2})\in\mathcal{X}, k=1,\cdots,n+1$, 有

$$\begin{aligned}&P(X_{n+1}=(i_{n+1,1},i_{n+1,2})\mid X_k=(i_{k1},i_{k2}),k=1,\cdots,n)\\=&P(X_{n+1}=(i_{n+1,1},i_{n+1,2})\mid X_n=(i_{n1},i_{n2}))\\=&\begin{cases}p^{i_{n+1,2}}q^{1-i_{n+1,2}}, & i_{k2}=i_{k+1,1},k=1,\cdots,n,\\0, & \text{其他}.\end{cases}\end{aligned}$$

这说明了, $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$ 是一 markov 链, 且其转移概率矩阵为

$$P=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}q&p&0&0\\0&0&q&p\\q&p&0&0\\0&0&q&p\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}(0,0)\\(0,1)\\(1,0)\\(1,1)\end{array}. \tag{5}$$

而 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$ 的初始分布为

$$P(X_1=(0,0))=q^2,\quad P(X_1=(0,1))=P(X_1=(1,0))=pq,\quad P(X_1=(1,1))=p^2. \tag{6}$$

以 $T$ 表示在掷币过程中首次连续出现两次正面所需掷币的次数, 即

$$\{T=n\}=\{X_k\neq(1,1),k=1,\cdots,n-2,X_{n-1}=(1,1)\},\quad n=2,3,\cdots, \tag{7}$$

因而

$$P(T=2)=P(X_1=(1,1))=p^2, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}P(T=n)=&P(X_k\neq(1,1),k=1,\cdots,n-2,X_{n-1}=(1,1))\\=&\sum_{i_k\in\mathcal{X}-\{(1,1)\}}P(i_k=i_k,k=1,\cdots,n-2,X_n=(1,1))\\=&\sum_{i_k\in\mathcal{X}-\{(1,1)\}}P(X_1=i_1)P_{i_1i_2}\cdots P_{i_{n-3}i_{n-2}}P_{i_{n-2},(1,1)},n=3,4,\cdots.\end{aligned} \tag{9}$$

(9) 说明了, 当 $n=3,4,\cdots$ 时, $P(T=n)$ 是三维行向量

$$(q^2,pq,pq)\begin{pmatrix}q&p&0\\0&0&q\\q&p&0\end{pmatrix}^{n-3}\begin{pmatrix}q&p&0&0\\0&0&q&p\\q&p&0&0\end{pmatrix}$$

的最后一个元素. 而

$$(q^2, pq, pq)\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & p \\ q & p & 0 & 0 \end{pmatrix} = (q^2, pq, pq^2, p^2q),$$

因而

$$P(T=3) = p^2 q. \tag{10}$$

注意到矩阵

$$\begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & 0 & q \\ q & p & 0 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 分解为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & 0 & q \\ q & p & 0 \end{pmatrix} =& \frac{1}{pq(\lambda_2-\lambda_3)}\begin{pmatrix} p & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -q & q & q \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \\ & \cdot \begin{pmatrix} q(\lambda_2-\lambda_3) & 0 & q(\lambda_3-\lambda_2) \\ -q\lambda_3 & -p\lambda_3 & q(p+\lambda_3) \\ q\lambda_2 & p\lambda_2 & -q(p+\lambda_2) \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $\lambda_2 = \frac{q+\sqrt{q^2+4pq}}{2} \in (0,1)$,$\lambda_3 = \frac{q-\sqrt{q^2+4pq}}{2} \in (-1,0)$, 因而有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & 0 & q \\ q & p & 0 \end{pmatrix}^n =& \frac{1}{pq(\lambda_2-\lambda_3)}\begin{pmatrix} p & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -q & q & q \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} \\ & \cdot \begin{pmatrix} q(\lambda_2-\lambda_3) & 0 & q(\lambda_3-\lambda_2) \\ -q\lambda_3 & -p\lambda_3 & q(p+\lambda_3) \\ q\lambda_2 & p\lambda_2 & -q(p+\lambda_2) \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{\lambda_2-\lambda_3}\begin{pmatrix} q(\lambda_2^n-\lambda_3^n) & p(\lambda_2^n-\lambda_3^n) & pq(\lambda_2^{n-1}-\lambda_3^{n-1}) \\ q^2(\lambda_2^{n-1}-\lambda_3^{n-1}) & pq(\lambda_2^{n-1}-\lambda_3^{n-1}) & pq^2(\lambda_2^{n-2}-\lambda_3^{n-2}) \\ q(\lambda_2^n-\lambda_3^n) & p(\lambda_2^n-\lambda_3^n) & pq(\lambda_2^{n-1}-\lambda_3^{n-1}) \end{pmatrix}, \quad n=1,2,\cdots.\end{aligned} \tag{12}$$

故

$$\begin{aligned}&(q^2, pq, pq)\begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & 0 & q \\ q & p & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & p \\ q & p & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ =& \frac{q}{\lambda_2-\lambda_3}(q^2[pq(1+p)(\lambda_2^{n-2}-\lambda_3^{n-2}) + (1+pq)(\lambda_2^{n-1}-\lambda_3^{n-1})],\end{aligned}$$

$$pq[pq(1+p)(\lambda_2^{n-2}-\lambda_3^{n-2})+(1+pq)(\lambda_2^{n-1}-\lambda_3^{n-1})],$$
$$pq[\lambda_2^n-\lambda_3^n+pq(\lambda_2^{n-1}-\lambda_3^{n-1})],$$
$$p^2[\lambda_2^n-\lambda_3^n+pq(\lambda_2^{n-1}-\lambda_3^{n-1})]),\quad n=1,2,\cdots.$$

由上所述, 有

$$P(T=n)=\frac{p^2q}{\lambda_2-\lambda_3}[\lambda_2^{n-3}-\lambda_3^{n-3}+pq(\lambda_2^{n-4}-\lambda_3^{n-4})],\quad n=4,5,\cdots.\tag{13}$$

由 (8),(10) 和 (13) 可知, 为了在掷币过程中连续出现两次正面, 所需掷币的平均次数为

$$\begin{aligned}E(T)=&\sum_{n=2}^{\infty}nP(T=n)\\=&2p^2+3p^2q+\frac{p^2q}{\lambda_2-\lambda_3}\sum_{n=4}^{\infty}n[\lambda_2^{n-3}-\lambda_3^{n-3}+pq(\lambda_2^{n-4}-\lambda_3^{n-4})]\\=&\frac{1+p}{p^2},\end{aligned}$$

在上面的求和中, 用到了以下等式

$$\sum_{n=m}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{x^{m-1}[m-(m-1)x]}{(1-x)^2},\quad |x|<1,m=1,2,\cdots.$$

■

6. 迷宫问题. 将小鼠放入迷宫中作动物的学习实验, 如图 3.3 所示. 在迷宫的第 7 号小格内放有美味食物而第 8 号小格内则是电击捕鼠装置. 假定当家鼠位于某格时有 $k$ 个出口可以离去, 则它总是随机地选择一个, 概率为 $\frac{1}{k}$, 并假定每一次家鼠只能跑到相邻的小格去. 令 $X_n$ 为家鼠在时刻 $n$ 时所在小格的号数, $n=0,1,2,\cdots$. 试写出过程 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 的转移概率矩阵, 并求出家鼠在遭到电击前能找到食物的概率.

**解** 由题设可知,$\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 是一 Markov 链, 其转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0&\frac12&\frac12&0&0&0&0&0&0\\ \frac13&0&0&\frac13&0&0&0&\frac13&0\\ \frac13&0&0&\frac13&0&0&0&0&\frac13\\ 0&\frac14&\frac14&0&\frac14&\frac14&0&0&0\\ 0&0&0&\frac13&0&0&\frac13&\frac13&0\\ 0&0&0&\frac13&0&0&\frac13&0&\frac13\\ 0&0&0&0&\frac12&\frac12&0&0&0\\ 0&\frac12&0&0&\frac12&0&0&0&0\\ 0&0&\frac12&0&0&\frac12&0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\end{matrix}.\tag{1}$$

以 $f_{i7}^{(n)}$ 表示家鼠从 $X_0=i$ 出发经 $n$ 步未受电击首次找到食物的概率, 即

$$f_{i7}^{(n)}=P(X_n=7,X_k\neq7,8,k=1,\cdots,n-1\mid X_0=i),\quad n=1,2,\cdots,\tag{2}$$

则

$$f_{i7}^{(1)} = P_{i7}, \quad i = 0, 1, \cdots, 8,$$

即

$$\begin{cases} f_{07}^{(1)} = f_{27}^{(1)} = f_{37}^{(1)} = f_{57}^{(1)} = f_{67}^{(1)} = f_{77}^{(1)} = f_{87}^{(1)} = 0 \\ f_{17}^{(1)} = f_{47}^{(1)} = \frac{1}{3}. \end{cases} \tag{3}$$

而对 $n = 2, 3, \cdots$, $f_{i7}^{(n)}$ 是

$$P_{[7,8]} P_{(7,8)[7,8]}^{n-2} P_{(7,8)} \tag{4}$$

的状态 $i$ 所在行, 状态 7 所在列交叉位置上的元素,$i = 0, 1, \cdots, 8$, 其中 $P_{(7,8)}$ 表示从 $P$ 中删除状态 $7, 8$ 所在行得到的 $7 \times 9$ 矩阵, $P_{[7,8]}$ 表示从 $P$ 中删除状态 $7, 8$ 所在列得到的 $9 \times 7$ 矩阵, $P_{(7,8),[7,8]}$ 表示从 $P$ 中删除状态 $7, 8$ 所在行和列得到的 $7 \times 7$ 矩阵.

注意到

$$P_{[7,8]} P_{(7,8)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

因此由上所述得

$$\begin{cases} f_{07}^{(2)} = f_{37}^{(2)} = f_{67}^{(2)} = \frac{1}{6}, \\ f_{17}^{(2)} = f_{27}^{(2)} = f_{47}^{(2)} = f_{57}^{(2)} = f_{87}^{(2)} = 0, \\ f_{77}^{(2)} = \frac{1}{3}. \end{cases} \tag{5}$$

进而, 注意到 $P_{(7,8),[7,8]}$ 的 Jordan 分解为

$$P_{(7,8),[7,8]} = TJT^{-1}, \tag{6}$$

其中

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & -\lambda_4, \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$J = diag(0,0,0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4), \tag{8}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\lambda_1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{\lambda_1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{\lambda_1}{8} \\ \frac{\lambda_2}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{\lambda_2}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{\lambda_2}{8} \\ -\frac{\lambda_3}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{\lambda_3}{4} \\ \frac{\lambda_4}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{\lambda_4}{4} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

其中 $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$,$\lambda_{3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, 因此

$$P_{[7,8]}P^n_{(7,8),[7,8]}P_{(7,8)} = P_{[7,8]}TJ^nT^{-1}P_{(7,8)}$$

$$= \begin{pmatrix}
\frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_3^n+\lambda_4^n) & \frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}+\lambda_1\lambda_3^n+\lambda_2\lambda_4^n) & \frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}+\lambda_1\lambda_3^n+\lambda_2\lambda_4^n) & \frac{1}{6}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) \\
\frac{1}{18}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}+\lambda_3^{n-1}+\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_1\lambda_3^{n-1}+\lambda_2\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_1\lambda_3^{n-1}+\lambda_2\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{9}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}) \\
\frac{1}{18}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}+\lambda_3^{n-1}+\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_1\lambda_3^{n-1}+\lambda_2\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_1\lambda_3^{n-1}+\lambda_2\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{9}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}) \\
\frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) & \frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}) & \frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}) & \frac{1}{6}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) \\
\frac{1}{18}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}-\lambda_3^{n-1}-\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_2\lambda_3^{n-1}+\lambda_1\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_2\lambda_3^{n-1}+\lambda_1\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{9}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}) \\
\frac{1}{18}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}-\lambda_3^{n-1}-\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_2\lambda_3^{n-1}+\lambda_1\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_2\lambda_3^{n-1}+\lambda_1\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{9}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}) \\
\frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n-\lambda_3^n-\lambda_4^n) & \frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}+\lambda_2\lambda_3^n+\lambda_1\lambda_4^n) & \frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}+\lambda_2\lambda_3^n+\lambda_1\lambda_4^n) & \frac{1}{6}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) \\
\frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) & \frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}) & \frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}) & \frac{1}{6}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) \\
\frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) & \frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}) & \frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}) & \frac{1}{6}(\lambda_1^n+\lambda_2^n)
\end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{cc}
\frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}+\lambda_2\lambda_3^n+\lambda_1\lambda_4^n) & \frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}+\lambda_2\lambda_3^n+\lambda_1\lambda_4^n) \\
\frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_2\lambda_3^{n-1}+\lambda_1\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_2\lambda_3^{n-1}+\lambda_1\lambda_4^{n-1}) \\
\frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_2\lambda_3^{n-1}+\lambda_1\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_2\lambda_3^{n-1}+\lambda_1\lambda_4^{n-1}) \\
\frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}) & \frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}) \\
\frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_1\lambda_3^{n-1}+\lambda_2\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_1\lambda_3^{n-1}+\lambda_2\lambda_4^{n-1}) \\
\frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_1\lambda_3^{n-1}+\lambda_2\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_1\lambda_3^{n-1}+\lambda_2\lambda_4^{n-1}) \\
\frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}+\lambda_1\lambda_3^n+\lambda_2\lambda_4^n) & \frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}+\lambda_1\lambda_3^n+\lambda_2\lambda_4^n) \\
\frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}) & \frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}) \\
\frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}) & \frac{1}{8}(\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1})
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{ccc}
\frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n-\lambda_3^n-\lambda_4^n) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) \\
\frac{1}{18}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}-\lambda_3^{n-1}-\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{18}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}) & \frac{1}{18}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}) \\
\frac{1}{18}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}-\lambda_3^{n-1}-\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{18}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}) & \frac{1}{18}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}) \\
\frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) \\
\frac{1}{18}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}+\lambda_3^{n-1}+\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{18}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}) & \frac{1}{18}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}) \\
\frac{1}{18}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}+\lambda_3^{n-1}+\lambda_4^{n-1}) & \frac{1}{18}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}) & \frac{1}{18}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}) \\
\frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_3^n+\lambda_4^n) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) \\
\frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) \\
\frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) & \frac{1}{12}(\lambda_1^n+\lambda_2^n)
\end{array}\right), \qquad (10)
$$

因而由上所述得

$$
\begin{cases} f_{07}^{(n)}=f_{37}^{(n)}=f_{67}^{(n)}=f_{77}^{(n)}=f_{87}^{(n)}=\frac{1}{12}(\lambda_1^{n-2}+\lambda_2^{n-2}), \\ f_{17}^{(n)}=f_{27}^{(n)}=f_{47}^{(n)}=f_{57}^{(n)}=\frac{1}{18}(\lambda_1^{n-3}+\lambda_2^{n-3}), \end{cases} \qquad n=3,4,\cdots. \qquad (11)
$$

若以 $f_{i7}$ 表示家鼠从 $X_0=i$ 出发未受电击找到食物的概率, 则

$$
f_{i7}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{i7}^{(n)}, \quad i=0,1,\cdots,8. \qquad (12)
$$

由 (3),(5) 和 (11) 易求得

$$
\begin{cases} f_{07}=f_{37}=f_{67}=\frac{1}{2}, \\ f_{17}=f_{47}=f_{77}=\frac{2}{3}, \\ f_{27}=f_{57}=f_{87}=\frac{1}{3}. \end{cases} \qquad (13)
$$

■

7. 设 $Z_i, i=1,2,\cdots$ 是一串独立同分布的离散随机变量, 分布为 $P(Z_n=k)=p_k, k=0,1,2,\cdots, \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k=1$. 试证 $\{Z_n, n=1,2,\cdots,\}$ 是一 Markov 链, 并求其转移概率矩阵.

**解证** 由题设知,$\{Z_n, n=1,2,\cdots,\}$ 的状态空间为 $\mathcal{X}=\{0,1,2,\cdots\}$, 对任意正整数 $n$ 及任意 $i_1,\cdots,i_{n+1}\in\mathcal{X}$, 有

$$
P(Z_{n+1}=i_{n+1}\mid Z_1=i_1,\cdots,Z_n=i_n)=P(Z_{n+1}=i_{n+1})=p_{i_{n+1}}
$$

和

$$P(Z_{n+1}=i_{n+1}\mid Z_n=i_n)=P(Z_{n+1}=i_{n+1})=p_{i_{n+1}}.$$

因而

$$P(Z_{n+1}=i_{n+1}\mid Z_1=i_1,\cdots,Z_n=i_n)=P(Z_{n+1}=i_{n+1}\mid Z_n=i_n)=p_{i_{n+1}}.$$

这说明了 $\{Z_n,n=1,2,\cdots,\}$ 是一 Markov 链, 且其转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

■

8. 对第 7 题中的 $\{Z_i,i=1,2,\cdots\}$, 令 $X_n=\max\{Z_1,\cdots,Z_n\},n=1,2,\cdots$, 并约定 $X_0\equiv 0$. 试问 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 是否为 Markov 链? 若是, 则求其转移概率矩阵.

**解** 由题设知,$\{X_n,n=0,1,2,\cdots,\}$ 的状态空间为 $\mathcal{X}=\{0,1,2,\cdots\}$. 由于 $P(X_0=0)=1$, 因此,$X_0,Z_1,Z_2,\cdots$ 独立. 对任意 $i_1\in\mathcal{X}$, 有

$$P(X_1=i_1\mid X_0=0)=P(Z_1=i_1\mid X_0=0)=P(Z_1=i_1)=p_{i_1}. \tag{1}$$

进而, 对任意正整数 $n$ 及任意 $i_1,\cdots,i_{n+1}\in\mathcal{X}$, 有

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_0=0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)\\
=&\frac{P(X_0=0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n,X_{n+1}=i_{n+1})}{P(X_0=0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)}\\
=&\frac{P(X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n,X_{n+1}=i_{n+1})}{P(X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)}\\
=&\frac{P(Z_1=i_1,\max\{i_1,Z_2\}=i_2,\cdots,\max\{i_{n-1},Z_n\}=i_n,\max\{i_n,Z_{n+1}\}=i_{n+1})}{P(Z_1=i_1,\max\{i_1,Z_2\}=i_2,\cdots,\max\{i_{n-1},Z_n\}=i_n)}\\
=&P(\max\{i_n,Z_{n+1}\}=i_{n+1})\\
=&\begin{cases} 0, & i_n>i_{n+1},\\ P(Z_{n+1}\le i_{n+1}), & i_n=i_{n+1},\\ P(\max\{i_n,Z_{n+1}\}=i_{n+1}), & i_n<i_{n+1}\end{cases}\\
=&\begin{cases} 0, & i_n>i_{n+1},\\ P(Z_{n+1}\le i_{n+1}), & i_n=i_{n+1},\\ P(\max\{i_n,Z_{n+1}\}=i_{n+1},Z_{n+1}<i_n) & \\ +P(\max\{i_n,Z_{n+1}\}=i_{n+1},Z_{n+1}\ge i_n), & i_n<i_{n+1}\end{cases}\\
=&\begin{cases} 0, & i_n>i_{n+1},\\ P(Z_{n+1}\le i_{n+1}), & i_n=i_{n+1},\\ P(Z_{n+1}=i_{n+1}), & i_n<i_{n+1}\end{cases}
\end{aligned}$$

$$=\begin{cases} 0, & i_n > i_{n+1}, \\ \sum\limits_{k=0}^{i_{n+1}} p_k, & i_n = i_{n+1}, \\ p_{i_{n+1}}, & i_n < i_{n+1}. \end{cases} \tag{2}$$

同理可知, 对任意正整数 $n$ 及任意 $i_n, i_{n+1} \in \mathcal{X}$, 有

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n) = \begin{cases} 0, & i_n > i_{n+1}, \\ \sum\limits_{k=0}^{i_{n+1}} p_k, & i_n = i_{n+1}, \\ p_{i_{n+1}}, & i_n < i_{n+1}. \end{cases} \tag{3}$$

由此及 (2) 可得

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = 0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) \\ =& P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n). \end{aligned} \tag{4}$$

由此及 (1) 可知, $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 为一 Markov 链, 且其转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & p_0 + p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 + p_1 + p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_0 + p_1 + p_2 + p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

■

10. 对第 7 题中的 $Z_i, i = 1, 2, \cdots$, 若定义 $X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i, n = 1, 2, \cdots$, $X_0 \equiv 0$, 试证 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 为一 Markov 链, 并求其转移概率矩阵.

**解** 由题设可知, 对任意状态 $i_1 \in \mathcal{X}$, 有

$$P(X_1 = i_1 \mid X_0 = 0) = P(X_1 = i_1) = p_{i_1}. \tag{1}$$

进而, 对任意正整数 $n$ 及任意状态 $i_k, k = 1, \cdots, n+1$, 有

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = 0, X_k = i_k, k = 1, \cdots, n) \\ =& P(Z_{n+1} = i_{n+1} - i_n \mid X_k = i_k, k = 1, \cdots, n) \\ =& P(Z_{n+1} = i_{n+1} - i_n) \\ =& \begin{cases} p_{i_{n+1} - i_n}, & i_{n+1} - i_n = 0, 1, 2, \cdots, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

同理可知, 对任意正整数 $n$ 及任意状态 $i_n, i_{n+1}$, 有

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n) = P(Z_{n+1} = i_{n+1} - i_n) \\ =& \begin{cases} p_{i_{n+1} - i_n}, & i_{n+1} - i_n = 0, 1, 2, \cdots, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

由 (1),(2) 和 (3) 即知, $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 为一 Markov 链, 且其转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

■

11. 一 Markov 链有状态 0,1,2,3 和转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

试求 $f_{00}^{(n)}, n=1,2,\cdots$ 及 $f_{00}$.

**解** 首先,$f_{00}^{(1)}=P_{00}=0$. 其次, 对 $n\geq 2$, $f_{00}^{(n)}$ 是矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

的 $(1,1)-$ 元, $n=2,3,\cdots$. 而

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{n}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{n}} \end{pmatrix}, \quad n=2,3,\cdots,$$

因而

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{2^{n+2}} & 0 & 0 & \frac{5}{2^{n+2}} \\ \frac{1}{2^n} & 0 & 0 & \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2^{n+1}} & 0 & 0 & \frac{1}{2^{n+1}} \\ \frac{1}{2^{n+2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2^{n+2}} \end{pmatrix}, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

故

$$f_{00}^{(2)} = \frac{1}{4}, \quad f_{00}^{(3)} = \frac{1}{8}, \quad f_{00}^{(n)} = \frac{5}{2^n}, n = 4, 5, \cdots.$$

从而

$$f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{5}{2^n} = 1.$$

■

12. 在成败型的重复试验中, 每次试验结果为成功 (S) 或失败 (F). 同一结果相继出现称为一个游程 (Run), 比如结果 FSSFFFSF 中共有两个成功游程和三个失败游程. 设成功概率为 $p$, 失败概率为 $q = 1 - p$. 记 $X_n$ 为 $n$ 次试验后成功游程的长度 (若 $n$ 次试验失败则 $X_n = 0$),$n = 1, 2, \cdots$. 试证 $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 为一 Markov 链, 并确定其转移概率阵. 记 $T$ 为返回状态 0 的时间, 试求 $T$ 的分布及均值, 并由此对这一 Markov 链的状态进行分类.

**解证** 若以 $I_n$ 表示第 $n$ 次试验的结果, 约定

$$I_n = \begin{cases} 1, & \text{第 } n \text{ 次试验成功}, \\ 0, & \text{第 } n \text{ 次试验失败}, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \cdots, \tag{1}$$

则 $\{I_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 为一独立同分布随机变量序列,$P(I_n = 1) = p$, $P(I_n = 0) = q$,$n = 1, 2, \cdots$, 且

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} I_k, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{2}$$

往证 $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 是状态空间为 $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 的 Markov 链. 其实, 对任意正整数 $n$ 及任意状态 $i_1, \cdots, i_{n+1} \in \mathcal{X}$, 有

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) \\
=&P(I_{n+1} = i_{n+1} - i_n \mid X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) \\
=&P(I_{n+1} = i_{n+1} - i_n) \\
=&\begin{cases} p^{i_{n+1}-i_n} q^{1-(i_{n+1}-i_n)}, & i_{n+1} - i_n = 0, 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad i_k = 0, 1, \cdots, k, k = 1, \cdots, n+1.
\end{aligned}$$

这说明了 $P(X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)$ 只与 $i_n$ 和 $i_{n+1}$ 有关, 因而 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$ 为 Markov 链, 且其转移概率阵为

$$P=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & q & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array}\end{array}. \tag{3}$$

往求 $f_{00}^{(n)},n=1,2,\cdots$. 首先, 有

$$f_{00}^{(1)}=P_{00}=q. \tag{4}$$

其次,$f_{00}^{(n)}$ 是

$$\begin{aligned} P_{[0]}P_{(0)[0]}^{n-2}P_{(0)} &= \begin{pmatrix} pe_1 \\ P \end{pmatrix} P^{n-2}(0,P) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & pe_1P^{n-1} \\ 0 & P^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

的状态 0 所在行, 状态 0 所在列交叉位置上的元素 $0,n=2,3,\cdots$, 其中 $e_1=(1,0,0,\cdots)$, 即

$$f_{00}^{(n)}=0,\quad n=2,3,\cdots. \tag{5}$$

由 (4) 和 (5) 可得返回状态 0 的时间 $T$ 的分布为

$$\left\{\begin{array}{l} P(T=1\mid X_m=0)=f_{00}^{(1)}=q, \\ P(T=n\mid X_m=0)=f_{00}^{(n)}=0,\quad n=2,3,\cdots, \\ P(T=+\infty\mid X_m=0)=p, \end{array}\right. \qquad m=1,2,\cdots. \tag{6}$$

这说明了状态 0 是瞬过的, 且 $E(T\mid X_m=0)=+\infty$.■

16. 考虑一生长与灾害模型. 这类 Markov 链 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 有状态 $0,1,2,\cdots$. 当过程处于状态 $i$ 时既可能以概率 $p_i$ 转移到状态 $i+1$(生长), 也可能以概率 $q_i=1-p_i$ 落回状态 0(灾害),$i=1,2,\cdots$. 而从状态 0 又必然" 无中生有", 即 $P_{01}=1$.

(a) 试证所有状态为常返的条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}(p_1p_2\cdots p_n)=0$.

(b) 若此链是常返的, 试求其为零常返的条件.

**解证** (a) 注意到 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 的转移概率阵为

$$P=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ q_3 & 0 & 0 & 0 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array}\end{array}. \tag{1}$$

由此可知, 在状态空间 $\mathcal{X}=\{0,1,2,\cdots\}$ 中的任意两个状态 $i$ 和 $j(>i)$ 依以下方式互达:

$$i \stackrel{p_i}{\to} i+1 \stackrel{p_{i+1}}{\to} \cdots \stackrel{p_{j-1}}{\to} j \stackrel{q_j}{\to} 0 \stackrel{1}{\to} 1 \stackrel{p_1}{\to} \cdots \stackrel{p_{i-1}}{\to} i. \tag{2}$$

因而, 为了证明所有状态均常返 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(p_1p_2\cdots p_n)=0$, 只需证明状态 0 常返 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(p_1p_2\cdots p_n)=0$. 为此往求 $f_{00}^{(n)}, n=1,2,\cdots$. 首先, 有

$$f_{00}^{(1)}=P_{00}=0. \tag{3}$$

其次,$f_{00}^{(2)}$ 是

$$P_{[0]}P_{(0)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdots\\0&p_1&0&0&\cdots\\0&0&p_2&0&\cdots\\0&0&0&p_3&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1&0&p_1&0&0&\cdots\\q_2&0&0&p_2&0&\cdots\\q_3&0&0&0&p_3&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}q_1&0&p_1&0&0&\cdots\\p_1q_2&0&0&p_1p_2&0&\cdots\\p_2q_3&0&0&0&p_2p_3&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}$$

的状态 0 所在行, 状态 0 所在列交叉位置上的元素, 即

$$f_{00}^{(2)}=q_1. \tag{4}$$

最后, 对 $n=3,4,\cdots$, $f_{00}^{(n)}$ 是

$$P_{[0]}P_{(0)[0]}^{n-2}P_{(0)}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdots\\0&p_1&0&0&\cdots\\0&0&p_2&0&\cdots\\0&0&0&p_3&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&p_1&0&0&\cdots\\0&0&p_2&0&\cdots\\0&0&0&p_3&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}q_1&0&p_1&0&0&\cdots\\q_2&0&0&p_2&0&\cdots\\q_3&0&0&0&p_3&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}$$

的状态 0 所在行, 状态 0 所在列交叉位置上的元素,$n=3,4,\cdots$. 而

$$P_{(0)[0]}^{n}=\begin{pmatrix}0&p_1&0&0&\cdots\\0&0&p_2&0&\cdots\\0&0&0&p_3&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}^{n}$$

$$=\begin{pmatrix}\underbrace{0\cdots0}_{n\text{个}}&p_1\cdots p_n&0&0&0&\cdots\\\underbrace{0\cdots0}_{n\text{个}}&0&p_2\cdots p_{n+1}&0&0&\cdots\\\underbrace{0\cdots0}_{n\text{个}}&0&0&p_3\cdots p_{n+2}&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},\quad n=1,2,\cdots,$$

因此

$$
\begin{aligned}
&P_{[0]}P^n_{(0)[0]}P_{(0)}\\
=&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \underbrace{0\cdots0}_{n\text{个}} & p_1\cdots p_n & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \underbrace{0\cdots0}_{n\text{个}} & 0 & p_2\cdots p_{n+1} & 0 & 0 & \cdots \\ \underbrace{0\cdots0}_{n\text{个}} & 0 & 0 & p_3\cdots p_{n+2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\\
&\cdot\begin{pmatrix} q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ q_3 & 0 & 0 & 0 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix} \underbrace{0\cdots0}_{n\text{个}} & p_1\cdots p_n & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \underbrace{0\cdots0}_{n\text{个}} & 0 & p_1\cdots p_{n+1} & 0 & 0 & \cdots \\ \underbrace{0\cdots0}_{n\text{个}} & 0 & 0 & p_2\cdots p_{n+2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ q_3 & 0 & 0 & 0 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix} p_1\cdots p_nq_{n+1} & \underbrace{0\cdots0}_{n+1\text{个}} & p_1\cdots p_{n+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_1\cdots p_{n+1}q_{n+2} & \underbrace{0\cdots0}_{n+1\text{个}} & 0 & p_1\cdots p_{n+2} & 0 & 0 & \cdots \\ p_2\cdots p_{n+2}q_{n+3} & \underbrace{0\cdots0}_{n+1\text{个}} & 0 & 0 & p_2\cdots p_{n+3} & 0 & \cdots \\ p_3\cdots p_{n+3}q_{n+4} & \underbrace{0\cdots0}_{n+1\text{个}} & 0 & 0 & 0 & p_3\cdots p_{n+4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},\\
&\qquad\qquad n=1,2,\cdots,
\end{aligned}
$$

故由上所述得

$$f^{(n)}_{00}=p_1\cdots p_{n-2}q_{n-1},\quad n=3,4,\cdots. \tag{5}$$

由 (3),(4) 和 (5) 可得

$$
\begin{aligned}
f_{00}=&\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n)}_{00}=q_1+\sum_{n=3}^{+\infty}(p_1\cdots p_{n-2}q_{n-1})\\
=&1-p_1+\sum_{n=3}^{+\infty}[p_1\cdots p_{n-2}-p_1\cdots p_{n-1}]\\
=&1-\lim_{n\to\infty}(p_1\cdots p_n),
\end{aligned}\tag{6}
$$

由此即得状态 0 常返 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(p_1p_2\cdots p_n)=0$.

(b) 由 (a) 中 (3),(4) 和 (5) 可知状态 0 的平均常返时为

$$\begin{aligned}\mu_0=&\sum_{n=1}^{\infty}nf_{00}^{(n)}=2q_1+\sum_{n=3}^{+\infty}(np_1\cdots p_{n-2}q_{n-1})\\=&2(1-p_1)+\sum_{n=3}^{+\infty}n[p_1\cdots p_{n-2}-p_1\cdots p_{n-1}]\end{aligned}$$

21. 分支过程 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 中一个个体产生后代的分布为

$$\begin{aligned}P(Z_{ni}=0)=\frac{1}{8},P(Z_{ni}=1)=\frac{1}{2},P(Z_{ni}=2)=\frac{1}{4},P(Z_{ni}=3)=\frac{1}{8},\\ i=1,\cdots,X_n,n=0,1,2,\cdots,\end{aligned}\tag{0}$$

试求第 $n$ 代总数 $X_n$ 的均值和方差及群体消亡的概率.

**解** 由 (0) 可得第一代总数 $X_1$ 的生成函数为

$$\begin{aligned}\phi_1(s)=&E(s^{Z_{01}})=\sum_{k=0}^{3}s^kP(Z_{01}=k)\\=&\frac{1}{8}(1+4s+2s^2+s^3),\quad s\in(-\infty,+\infty),\end{aligned}$$

因而群体消亡的概率 $\pi$ 满足

$$\frac{1}{8}(1+4\pi+2\pi^2+\pi^3)=\pi,$$

即

$$(\pi-1)(\pi^2+3\pi-1)=0,$$

解之得 $\pi=\frac{\sqrt{13}-3}{2}$. 由 (0) 可得

$$\mu=E(Z_{01})=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{8}=\frac{11}{8},$$

$$E(Z_{01}^2)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{8}=\frac{21}{8},$$

$$\sigma^2=Var(Z_{01})=E(Z_{01}^2)-[E(Z_{01})]^2=\frac{47}{64},$$

因而,$X_n$ 的均值为

$$\mu_X(n)=E(X_n)=\mu^n=\left(\frac{11}{8}\right)^n,$$

方差为

$$\begin{aligned}R_X(n,n)=&Var(X_n)=\sigma^2\mu^{n-1}\frac{1-\mu^n}{1-\mu}\\=&\frac{47}{24}\left[\left(\frac{11}{8}\right)^{2n-1}-\left(\frac{11}{8}\right)^{n-1}\right],\quad n=0,1,2,\cdots.\end{aligned}$$

■

22. 若单一个体产生后代的分布为 $P(Z_{01}=0)=q$,$P(Z_{01}=1)=p$,$p+q=1$, 并假定过程开始时的祖先数 $X_0 \equiv 1$, 试求分支过程 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 的第 $n$ 代总数 $X_n$ 的分布.

**解** 由题设可知第一代总数 $X_1$ 的生成函数为

$$\phi_1(s)=E(s^{Z_{01}})=s^0P(Z_{01}=0)+s^1P(Z_{01}=1)=q+ps, \quad s\in(-\infty,+\infty),$$

第二代总数 $X_2$ 的生成函数为

$$\phi_2(s)=\phi_1(\phi_1(s))=q+p(q+ps)=1-p^2+p^2s, \quad s\in(-\infty,+\infty),$$

第三代总数 $X_3$ 的生成函数为

$$\phi_3(s)=\phi_2(\phi_1(s))=1-p^2+p^2(q+ps)=1-p^3+p^3s, \quad s\in(-\infty,+\infty),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

第 $n$ 代总数 $X_n$ 的生成函数为

$$\phi_n(s)=\phi_{n-1}(\phi_1(s))=1-p^n+p^ns, \quad s\in(-\infty,+\infty).$$

这说明了 $X_n$ 的分布为

$$P(X_n=0)=1-p^n, \quad P(X_n=1)=p^n, \quad n=0,1,2,\cdots.$$

■

23. 一时齐连续时间 Markov 链有 0 和 1 两个状态, 在状态 0 和 1 的逗留时间服从参数为 $\lambda>0$ 及 $\mu>0$ 的指数分布. 试求在时刻 0 从状态 0 起始,$t$ 时刻处于状态 0 的概率 $P_{00}(t)$.

**解** 以 $T_0$ 表示从 $X(0)=0$ 起始逗留状态 0 的时间, $T_{2n+1}$ 表示从 $T_{2n}=t_{2n}$ 起始逗留状态 1 的时间,$n=0,1,2,\cdots$, $T_{2n}$ 表示从 $T_{2n-1}=t_{2n-1}$ 起始逗留状态 0 的时间,$n=1,2,\cdots$. 由题设可知, 给定 $X(0)=0$ 时, $T_0$ 的条件密度函数为

$$f_{T_0|X(0)}(t_0 \mid 0)=\lambda e^{-\lambda t_0}, \quad t_0>0,$$

给定 $(X(0),T_0)=(0,t_0)$ 时, $T_1$ 的条件密度函数为

$$f_{T_1|(X(0),T_0)}(t_1 \mid (0,t_0))=\mu e^{-\mu t_1}, \quad t_1>0,$$

给定 $(X(0),T_0,T_1)=(0,t_0,t_1)$ 时, $T_2$ 的条件密度函数为

$$f_{T_2|(X(0),T_0,T_1)}(t_2 \mid (0,t_0,t_1))=\lambda e^{-\lambda t_2}, \quad t_2>0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

给定 $(X(0),T_0,T_1,T_2,\cdots,T_{2n})=(0,t_0,t_1,t_2,\cdots,t_{2n})$ 时, $T_{2n+1}$ 的条件密度函数为

$$f_{T_{2n+1}|(X(0),T_0,T_1,T_2,\cdots,T_{2n})}(t_{2n+1} \mid (0,t_0,t_1,t_2,\cdots,t_{2n}))=\mu e^{-\mu t_{2n+1}}, \quad t_{2n+1}>0,$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots,$$

给定 $(X(0), T_0, T_1, T_2, \cdots, T_{2n-1}) = (0, t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{2n-1})$ 时, $T_{2n}$ 的条件密度函数为

$$f_{T_{2n}|(X(0),T_0,T_1,T_2,\cdots,T_{2n-1})}(t_{2n} \mid (0, t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{2n-1})) = \lambda e^{-\lambda t_{2n}}, \quad t_{2n} > 0,$$
$$n = 1, 2, \cdots,$$

因而, 给定 $X(0) = 0$ 时, 随机向量 $(T_0, T_1, T_2, \cdots, T_{2n})$ 的条件密度函数为

$$\begin{aligned}
&f_{(T_0,T_1,T_2,\cdots,T_{2n})|X(0)}(t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{2n} \mid 0) \\
=&f_{T_0|X(0)}(t_0 \mid 0) f_{T_1|(X(0),T_0)}(t_1 \mid (0, t_0)) f_{T_2|(X(0),T_0,T_1)}(t_2 \mid (0, t_0, t_1)) \cdots \\
&\cdot f_{T_{2n}|(X(0),T_0,T_1,T_2,\cdots,T_{2n-1})}(t_{2n} \mid (0, t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{2n-1})) \\
=&\lambda^{n+1} \mu^n e^{-\lambda \sum\limits_{k=0}^{n} t_{2k}} e^{-\mu \sum\limits_{k=1}^{n} t_{2k-1}}, \quad t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{2n} > 0, n = 0, 1, 2, \cdots,
\end{aligned} \tag{1}$$

给定 $X(0) = 0$ 时, 随机向量 $(T_0, T_1, T_2, \cdots, T_{2n-1})$ 的条件密度函数为

$$\begin{aligned}
&f_{(T_0,T_1,T_2,\cdots,T_{2n-1})|X(0)}(t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{2n-1} \mid 0) \\
=&f_{T_0|X(0)}(t_0 \mid 0) f_{T_1|(X(0),T_0)}(t_1 \mid (0, t_0)) f_{T_2|(X(0),T_0,T_1)}(t_2 \mid (0, t_0, t_1)) \cdots \\
&\cdot f_{T_{2n-1}|(X(0),T_0,T_1,T_2,\cdots,T_{2n-2})}(t_{2n-1} \mid (0, t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{2n-2})) \\
=&\lambda^n \mu^n e^{-\lambda \sum\limits_{k=0}^{n-1} t_{2k}} e^{-\mu \sum\limits_{k=1}^{n} t_{2k-1}}, \quad t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{2n-1} > 0, n = 1, 2, \cdots.
\end{aligned} \tag{2}$$

(1) 和 (2) 表明了, 给定 $X(0) = 0$ 时,$T_0, T_1, T_2, \cdots$, 互相条件独立, 且

$$T_{2n} \mid X(0) = 0 \sim P(\lambda), \quad T_{2n+1} \mid X(0) = 0 \sim P(\mu), \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3}$$

其中 $P(\lambda)$ 表示参数为 $\lambda$ 的指数分布. 若记

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} T_k, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{4}$$

则从 $X(0) = 0$ 起始于时刻 $t$ 处处于状态 0 的事件为

$$\{X(0) = 0, X(t) = 0\} = \{W_0 > t\} + \sum_{n=1}^{+\infty} \{W_{2n} > t, W_{2n-1} \leq t\},$$

因此

$$\begin{aligned}
P_{00}(t) =&P(X(t) = 0 \mid X(0) = 0) \\
=&P(W_0 > t \mid X(0) = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(W_{2n} > t, W_{2n-1} \leq t \mid X(0) = 0) \\
=&P(W_0 > t \mid X(0) = 0) \\
&+ \sum_{n=1}^{+\infty} (P(W_{2n} > t \mid X(0) = 0) - P(W_{2n-1} > t \mid X(0) = 0)), \quad t > 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

若记

$$U_n=\sum_{k=0}^{n}T_{2k},\quad n=0,1,2,\cdots,\quad V_n=\sum_{k=1}^{n}T_{2k-1},\quad n=1,2,\cdots, \tag{6}$$

则由 (4) 得

$$W_{2n}=U_n+V_n,\quad W_{2n-1}=U_{n-1}+V_n,\quad n=1,2,\cdots, \tag{7}$$

而由 (3) 可知, 给定 $X(0)=0$ 时,$U_n$ 与 $V_n$ 条件独立, 且

$$f_{U_n|X(0)=0}(u\mid 0)=\frac{\lambda^{n+1}}{n!}u^ne^{-\lambda u},\quad u>0,n=0,1,2,\cdots, \tag{8}$$

$$f_{V_n|X(0)=0}(v\mid 0)=\frac{\mu^n}{(n-1)!}v^{n-1}e^{-\mu v},\quad v>0,n=1,2,\cdots. \tag{9}$$

故

$$\begin{aligned}
&P(W_{2n}>t\mid X(0)=0)\\
=&P(U_n+V_n>t\mid X(0)=0)\\
=&1-\frac{\lambda^{n+1}\mu^n}{n!(n-1)!}\iint\limits_{u,v>0,u+v\le t}u^nv^{n-1}e^{-(\lambda u+\mu v)}dudv\\
=&1-\frac{\lambda^{n+1}\mu^n}{n!(n-1)!}\int_0^t v^{n-1}e^{-\mu v}dv\int_0^{t-v}u^ne^{-\lambda u}du,\quad n=1,2,\cdots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P(W_{2n-1}>t\mid X(0)=0)\\
=&P(U_{n-1}+V_n>t\mid X(0)=0)\\
=&1-\frac{(\lambda\mu)^n}{[(n-1)!]^2}\iint\limits_{u,v>0,u+v\le t}(uv)^{n-1}e^{-(\lambda u+\mu v)}dudv\\
=&1-\frac{(\lambda\mu)^n}{[(n-1)!]^2}\int_0^t v^{n-1}e^{-\mu v}dv\int_0^{t-v}u^{n-1}e^{-\lambda u}du,\quad n=1,2,\cdots,
\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}
&P(W_{2n}>t\mid X(0)=0)-P(W_{2n-1}>t\mid X(0)=0)\\
=&\frac{(\lambda\mu)^n}{[(n-1)!]^2}\int_0^t v^{n-1}e^{-\mu v}dv\int_0^{t-v}u^{n-1}e^{-\lambda u}du\\
&-\frac{\lambda^{n+1}\mu^n}{n!(n-1)!}\int_0^t v^{n-1}e^{-\mu v}dv\int_0^{t-v}u^ne^{-\lambda u}du.
\end{aligned} \tag{10}$$

而

$$\begin{aligned}
\int_0^{t-v}u^ne^{-\lambda u}du=&-\frac{1}{\lambda}\int_0^{t-v}u^nde^{-\lambda u}\\
=&\frac{n}{\lambda}\int_0^{t-v}u^{n-1}e^{-\lambda u}du-\frac{1}{\lambda}(t-v)^ne^{-\lambda(t-v)},\quad n=1,2,\cdots,
\end{aligned}$$

因而由 (10) 得

$$\begin{aligned}&P(W_{2n}>t\mid X(0)=0)-P(W_{2n-1}>t\mid X(0)=0)\\=&\frac{(\lambda\mu)^n}{n!(n-1)!}\int_0^t v^{n-1}(t-v)^n e^{-[\mu v+\lambda(t-v)]}dv,\quad n=1,2,\cdots.\end{aligned}\tag{11}$$

将其代入 (5) 中得

$$P_{00}(t)=e^{-\lambda t}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\lambda\mu)^n}{n!(n-1)!}\int_0^t v^{n-1}(t-v)^n e^{-[\mu v+\lambda(t-v)]}dv,\quad t>0.\tag{12}$$

当 $\lambda=\mu$ 时, 由上式得

$$\begin{aligned}P_{00}(t)=&e^{-\lambda t}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2n}}{n!(n-1)!}\int_0^t v^{n-1}(t-v)^n dv\right)\\=&e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^{2n}}{(2n)!}=\frac{1+e^{-2\lambda t}}{2},\quad t>0.\end{aligned}\tag{13}$$

当 $\lambda\neq\mu$ 时, 由 (12) 得

24. 在第 23 题中, 定义 $N(t)$ 为过程在 $[0,t]$ 中改变状态的次数, 试求 $N(t)$ 的概率分布.

**解** 沿用上题题解中的记号有

$$\begin{aligned}P(N(t)=0)=&P(W_0>t\mid X(0)=0)\\=&P(T_0>t\mid X(0)=0)=e^{-\lambda t},\quad t>0,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}P(N(t)=1)=&P(W_0\le t,W_1>t\mid X(0)=0)\\=&P(W_1>t\mid X(0)=0)-P(W_0>t\mid X(0)=0)\\=&1-e^{-\lambda t}-\lambda\mu\int_0^t e^{-\mu v}dv\int_0^{t-v}e^{-\lambda u}du\\=&e^{-\mu t}-e^{-\lambda t}+\mu\int_0^t e^{-[\mu v+\lambda(t-v)]}dv\\=&\begin{cases}\lambda t e^{-\lambda t}, & \lambda=\mu,\\ \frac{\lambda}{\lambda-\mu}(e^{-\mu t}-e^{-\lambda t}), & \lambda\neq\mu,\end{cases}\quad t>0,\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}P(N(t)=2k)=&P(W_{2k-1}\le t,W_{2k}>t\mid X(0)=0)\\=&P(W_{2k}>t\mid X(0)=0)-P(W_{2k-1}>t\mid X(0)=0)\\=&\frac{(\lambda\mu)^k}{k!(k-1)!}\int_0^t v^{k-1}(t-v)^k e^{-[\mu v+\lambda(t-v)]}dv,\\&\qquad k=1,2,\cdots,\end{aligned}\tag{3}$$

$$P(N(t)=2k+1)=P(W_{2k}\le t,W_{2k+1}>t\mid X(0)=0)$$

$$
\begin{aligned}
&= P(W_{2k+1} > t \mid X(0) = 0) - P(W_{2k} > t \mid X(0) = 0) \\
&= \frac{\lambda^{k+1}\mu^k}{k!(k-1)!} \iint\limits_{u,v>0,u+v\le t} u^k v^{k-1} e^{-(\lambda u+\mu v)} du dv \\
&\quad - \frac{(\lambda\mu)^{k+1}}{(k!)^2} \iint\limits_{u,v>0,u+v\le t} (uv)^k e^{-(\lambda u+\mu v)} du dv \\
&= \frac{\lambda^{k+1}\mu^k}{k!(k-1)!} \int_0^t u^k e^{-\lambda u} du \int_0^{t-u} v^{k-1} e^{-\mu v} dv \\
&\quad - \frac{(\lambda\mu)^{k+1}}{(k!)^2} \int_0^t u^k e^{-\lambda u} du \int_0^{t-u} v^k e^{-\mu v} dv \\
&= \frac{\lambda^{k+1}\mu^k}{(k!)^2} \int_0^t u^k (t-u)^k e^{-[\lambda u+\mu(t-u)]} du, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad k = 1, 2, \cdots . \qquad (4)
\end{aligned}
$$

当 $\lambda = \mu$ 时, 由 (3) 和 (4) 可得

$$
\begin{aligned}
P(N(t) = 2k) &= P(W_{2k-1} \le t, W_{2k} > t \mid X(0) = 0) \\
&= \frac{(\lambda)^{2k}}{k!(k-1)!} e^{-\lambda t} \int_0^t v^{k-1}(t-v)^k dv \\
&= \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda t}, \quad k = 1, 2, \cdots , \qquad (5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(N(t) = 2k+1) &= P(W_{2k} \le t, W_{2k+1} > t \mid X(0) = 0) \\
&= \frac{\lambda^{2k+1}}{(k!)^2} e^{-\lambda t} \int_0^t u^k (t-u)^k \\
&= \frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-\lambda t}, \quad k = 1, 2, \cdots , \qquad (6)
\end{aligned}
$$

(1),(2),(5) 和 (6) 说明了, 当 $\lambda = \mu$ 时,$N(t)$ 服从参数为 $\lambda t$ 的 Poisson 分布, $t > 0$.■

## 习题 4

5. 设 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 是一独立同分布随机变量序列,$P(X_1=1)=p$, $P(X_1=-1)=q$,$p+q=1$. 令 $S_n=\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}, n=1,2,\cdots$. 试求序列 $\{S_n, n=1,2,\cdots\}$ 的自协方差函数和自相关函数, 并证明 $\{S_n, n=1,2,\cdots\}$ 不平稳.

**解证** 由题设可知

$$E(X_n)=1\cdot P(X_n=1)+(-1)\cdot P(X_n=-1)=p-q, \quad n=1,2,\cdots, \tag{1}$$

$$E(X_n^2)=1^2\cdot P(X_n=1)+(-1)^2\cdot P(X_n=-1)=p+q=1, \quad n=1,2,\cdots,$$

$$Var(X_n)=E(X_n^2)-[E(X_n)]^2=1-(p-q)^2, \quad n=1,2,\cdots. \tag{2}$$

因而, $\{S_n, n=1,2,\cdots\}$ 的均值函数为

$$m_S(n)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=\sqrt{n}(p-q), \quad n=1,2,\cdots, \tag{3}$$

自协方差函数为

$$\begin{aligned}R_S(m,n)=&Cov\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=1}^{m}E(X_k), \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{l=1}^{n}E(X_l)\right)=\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}Cov(X_k,X_l)\\ =&\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{k=1}^{\min\{m,n\}}Var(X_k)=\frac{\min\{m,n\}}{\sqrt{mn}}[1-(p-q)^2], \quad m,n=1,2,\cdots. \end{aligned}\tag{4}$$

由 (3) 可知, 欲使 $\{S_n, n=1,2,\cdots\}$ 平稳, 必须 $p=q=\frac{1}{2}$. 而当 $p=q=\frac{1}{2}$ 时, 由 (4) 得

$$R_S(m,n)=\frac{\min\{m,n\}}{\sqrt{mn}}, \quad m,n=1,2,\cdots.$$

这说明了 $R_S(m,n)$ 不可能只与 $m-n$ 有关, 故 $\{S_n, n=1,2,\cdots\}$ 不平稳. ■

6. 设 $\{X(t), t\in(-\infty,+\infty)\}$ 平稳, 对每一 $t\in(-\infty,+\infty)$, $X'(t)$ 存在. 证明对每一 $t\in(-\infty,+\infty)$, $X(t)$ 与 $X'(t)$ 不相关.

**证**

10. 设 $\{X(t), t\in(-\infty,+\infty)\}$ 是一复值平稳过程, 证明

$$E[\mid X(t+\tau)-X(t)\mid^2]=2\mathcal{R}e(R(0)-R(\tau)).$$

**证** 由 $\{X(t), t\in(-\infty,+\infty)\}$ 的平稳性知

$$\begin{aligned}&E[\mid X(t+\tau)-X(t)\mid^2]=E[\mid (X(t+\tau)-m)-(X(t)-m)\mid^2]\\ =&E[\mid X(t+\tau)-m\mid^2]+E[\mid X(t)-m\mid^2]\\ &-E[(X(t+\tau)-m)\overline{(X(t)-m)}]-E[(X(t)-m)\overline{(X(t+\tau)-m)}]\end{aligned}$$

$$=2R(0)-R(-\tau)-R(\tau),$$

其中 $m=E(X(t)), t\in(-\infty,+\infty)$. 而 $R(-\tau)=\overline{R(\tau)}$, 因而由上式可得

$$\begin{aligned}E[\mid X(t+\tau)-X(t)\mid^2] =&2R(0)-R(\tau)-\overline{R(\tau)}\\ =&2\mathcal{R}e(R(0)-R(\tau)),\quad t\in(-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

■

11. 设 $\{X(t), t\in(-\infty,+\infty)\}$ 是一平稳 Gauss 过程, 自协方差函数为 $R(\tau)$. 证明

$$P(X'(t)\le a)=\Phi(\frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}),\quad a\in(-\infty,+\infty),$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数.

**证** 由题设可知

$$\begin{pmatrix} X(t)\\ X(t+h)\end{pmatrix}\sim N_2(\begin{pmatrix}\mu\\ \mu\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R(0) & R(h)\\ R(h) & R(0)\end{pmatrix}),\quad \forall t, t+h,$$

由此可得

$$X(t+h)-X(t)\sim N(0,2(R(0)-R(h))),\quad \forall t, t+h.$$

因而

$$P(\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\le a)=\Phi(\frac{ah}{\sqrt{2(R(0)-R(h)}}),\quad \forall t, h>0.$$

故

$$\begin{aligned}P(X'(t)\le a)&=\lim_{h\to 0+}P(\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\le a)\\ &=\lim_{h\to 0+}\Phi(\frac{ah}{\sqrt{2(R(0)-R(h)}})\\ &=\Phi(\frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}),\quad \forall t.\end{aligned}$$

■

## §0.1 ?

输入定理和公式的例子

**定理0.1.1** ([1, Theorem I.4.3]). 设 $f \in C^1(X, \mathbf{R})$ 满足条件 $(C)$, 则我们有

$$\sum_{q=0}^{\infty} M_q t^q = \sum_{q=0}^{\infty} \beta_q t^q + (1+t)\, Q(t)\,, \tag{0.1.1}$$

这里 $Q$ 是有非负整系数的形式级数,.

引理、命题等可类似输入。

引用时用交叉引用:定理 0.1.1 中的式子 (0.1.1) 称为 Morse 不等式.

输入多行公式, 用 align 环境:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(\nabla\varphi, v) &= \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \operatorname{rank} C_q(\varphi, v) \\
&= \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \operatorname{rank} C_q(f, v + \psi(v)) \\
&= \operatorname{ind}(\nabla f, v + \psi(v))\,. \qquad (0.1.2)
\end{aligned}$$

若不想编号就用 align* 环境, 这时不需要写 nonumber 命令. align 比 eqnarray 的好处在于, 等号或不等号两边不会留太多空白.

# 参考文献

[1] K. C. Chang, Infinite dimensional Morse theory and multiple solution problem, Birkhäuser, Bostom, 1993.

[2] 其他文献同样添加。

# 作者简介

作者简介

# 致谢

致谢的内容

某某某

*2003* 年 *3* 月

于中国 *XXX* 研究所