中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

22. 反证. 若∃连续 f, s.t. $f=\chi_{[0,1]}$, a.e..

则 $\exists N\subset\mathbb{R}$, $m(N)=0$, s.t. $f=\chi_{[0,1]}$ on N^c

① 考虑 $(0,\frac{1}{k})$, $k\in\mathbb{N}_+$.

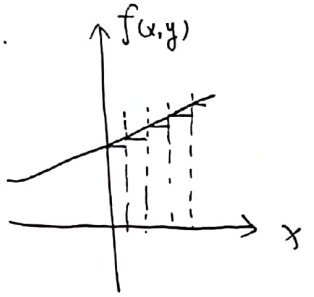
则 $(0,\frac{1}{k})\not\subset N \Rightarrow \exists x_k^+\in(0,\frac{1}{k})$, s.t. $x_k^+\notin N$, $f(x_k^+)=1$.

∴找到 $\{x_k^+\}$ 以0为聚点, $f(x_k^+)=1$. 由连续性, $f(0)=\lim_k f(x_k^+)=1$

② 同理考虑 $(-\frac{1}{k},0)$, $k\in\mathbb{N}_+$, 可找到 $\{x_k^-\}$ 以0为聚点, $f(x_k^-)=0$, 从而 $f(0)=0$.

矛盾! #.

23.



将x轴 2^k 等分, 若 $\frac{j}{2^k}\le x<\frac{j+1}{2^k}$, 令 $f_k(x,y)=f(\frac{j}{2^k},y)$.

由于 $\{f_k>\alpha\}=\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}[\frac{j}{2^k},\frac{j+1}{2^k})\times\underbrace{\{f(\frac{j}{2^k},y)>\alpha\}}_{\text{开集}}\in\mathcal{M}$,

f_k 可测.

由 f 关于 x 连续知 $f_k(x,y)\to f(x,y)$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

由P29. Property 4. 知 f 可测. #

28.29. 由 Hint 即可给证.

[注: 对 $\mathbb{R}^n$ 情形, 可参阅周民强 P84-85, 定理 2.19, 2.20.]

30. 由28. $\exists I$, $m(E\cap I)\ge\frac{3}{4}m(I)$　不妨 $I=(-\frac{a}{2},\frac{a}{2})$

$\exists J$, $m(F\cap J)\ge\frac{3}{4}m(J)$　$J=(-\frac{b}{2},\frac{b}{2})$, $a\ge b$

进一步, 不妨 $a\le 2b$ (否则, I 对半分后总有一边满足)

$$\forall c,\ (E\cap I)\cup(-(F\cap J)+c)\subset I\cup(-J+c)$$

反证. $\forall\varepsilon>0$, $\exists|c|<\varepsilon$, $(E\cap I)\cap(-(F\cap J)+c)=\phi$, $|LHS|\ge\frac{3}{4}(a+b)\ge\frac{9}{8}a$.

而 $|RHS|\le a+\varepsilon$, 当 ε 充分小. 矛盾!

∴$\exists\varepsilon_0>0$, s.t. $\forall|c|<\varepsilon_0$, $(E\cap I)\cap(-(E\cap J)+c)\neq\phi$, 取 $x\in(E\cap I)\cap(-(F\cap J)+c)$

$x\in E$ 且 $c-x\in F\Rightarrow c\in E+F$.

$\Rightarrow(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\subset E+F$. #

由 扫描全能王 扫描创建

33. Some more hints:

① $[0,1] \subset \bigcup_{q_i \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} N + \{q_i\}$

$\Rightarrow m^*([0,1]) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(N) \Rightarrow m^*(N) > 0.$

②. An interval cannot be included in N^c.

36. Hint 照做即可.

由 扫描全能王 扫描创建