6. 令 $G(x)=\int_0^x |f(t)|dt - \alpha x$　由于可积 ⇒ 积分绝对连续 ⇒ G 连续.

对 G 用 lem 3.5（回出引理），则 $E=\{x: \exists h_x>0, G(x+h_x)>G(x)\}=\cup(a_k,b_k)$

且若 (a_k,b_k) 有限，则 $G(a_k)=G(b_k)$.

$\because E=\{x: \exists h_x>0. \int_0^{x+h_x}|f|dt-\alpha(x+h_x)>\int_0^x|f|dt-\alpha x\}$

$=\{x:\exists h_x>0 \int_x^{x+h_x}|f|dt>\alpha\cdot h_x\}=E_\alpha^+$

注意，若 $[a_k,b_k]\subset E$，则 $\alpha m((a_k,b_k])\le\int_{(a_k,b_k]}|f|dt$

☺ 对 a_k，$\exists h_1$，s.t. $G(a_k+h_1)>G(a_k)\Rightarrow\int_{a_k}^{a_k+h_1}|f|dt>\alpha h_1$

$\exists h_2$，s.t. $G(a_k+h_1+h_2)>G(a_k+h_1)\Rightarrow\int_{a_k}^{a_k+h_2}|f|dt>\alpha h_2$

...

若 $\sum h_i<b_k$，则取 $\tilde{a}_k=a_k+\sum h_i$，继续上述步骤.

由 f 可积，$[a_k,b_k]$ 必有限.

最后 check：$G(a_k)=G(b_k)\Rightarrow\int_{(a_k,b_k)}|f(t)|dt=\alpha(b_k-a_k)$

$\Rightarrow\int_{E_\alpha^+}|f(t)|dt=\alpha m(E_\alpha^+)$.　#.

由 扫描全能王 扫描创建

11. (1) 首先证明当 $a>b$ 时. f 是有界变差函数.

$$\because f(x)=\begin{cases} x^a\sin(x^{-b}) & 0<x\le 1 \\ 0 & x=0. \end{cases} \qquad (a>0,\ b>0)$$

$$\therefore \forall x\in(0,1]\quad f'(x)=ax^{a-1}\sin(x^{-b})-bx^{a-b-1}\cos(x^{-b})$$

$$\therefore |f'(x)|\le ax^{a-1}+bx^{a-b-1} \qquad (x\in(0,1])$$

对 $[0,1]$ 上的任意分割 Δ: $0=t_0<t_1<\cdots<t_{n_\Delta}=1$

任取 $0<\varepsilon<t_1$. 考察 Riemann 积分.

$$\int_\varepsilon^1 |f'(x)|dx \le \int_\varepsilon^1 (ax^{a-1}+bx^{a-b-1})dx.$$

$$= \left(x^a+\frac{b}{a-b}x^{a-b}\right)\Big|_\varepsilon^1$$

$$= \frac{a}{a-b}-\varepsilon^a-\frac{b}{a-b}\varepsilon^{a-b} \overset{(a>b)}{\le} \frac{a}{a-b}.$$

故 $\sum_\Delta = \sum_{i=1}^{n_\Delta} |f(t_i)-f(t_{i-1})|$

$$= |f(t_1)-f(t_0)|+\sum_{i=2}^{n_\Delta}|f(t_i)-f(t_{i-1})|$$

Maxleaf

由 扫描全能王 扫描创建

$$= |f(t_1)| + \sum_{i=2}^{m_\Delta} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(x)\,dx \right|$$

$$\le |f(t_1) - f(\varepsilon) + f(\varepsilon)| + \sum_{i=2}^{m_\Delta} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(x)|\,dx.$$

$$\le |f(\varepsilon)| + |f(t_1) - f(\varepsilon)| + \int_{t_1}^{1} |f'(x)|\,dx.$$

$$= |f(\varepsilon)| + \left| \int_{\varepsilon}^{t_1} f'(x)\,dx \right| + \int_{t_1}^{1} |f'(x)|\,dx$$

$$\le |f(\varepsilon)| + \int_{\varepsilon}^{1} |f'(x)|\,dx.$$

$$\le |f(\varepsilon)| + \frac{a}{a-b}$$

$$\le 1 + \frac{a}{a-b} \qquad \therefore Tf(a,b) \le 1 + \frac{a}{a-b}$$

∴ f是有界变差函数.

(2) 再证当 $a \le b$ 时. f不是有界变差函数.

取 $[0,1]$ 上的分割 Δ: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$.

其中 $t_i = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(n-i+1)}\right)^{\frac{1}{b}}$ $\quad i = 1, 2, \cdots, n-1$

$$\therefore \sum_{\Delta} = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(t_i^a + t_{i-1}^a \right)$$

$$\ge \sum_{i=1}^{n-1} t_i^a = \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(n-i+1)}\right)^{\frac{a}{b}}.$$

$$(j = n-i-1) \quad = \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi j}\right)^{\frac{a}{b}} \quad (a \le b) \ge \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{\pi\left(j + \frac{1}{2}\right)}$$

令 $n \to +\infty$. 级数 $\sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{\pi(j+\frac{1}{2})}$ 发散 ∴ f不是有界变差函数

由 扫描全能王 扫描创建

(3) 证明当 $b=a$ 时，$\forall \alpha \in (0,1)$，$\exists a>0$ s.t. f 满足 Lipschitz-α 条件

不妨设 $h>0$，则有下面两个估计成立

① $|f(x+h)-f(x)| = |(x+h)^a \sin((x+h)^{-a}) - x^a \sin(x^{-a})|$

$= \left| \sin((x+h)^{-a}) - \left(\frac{x}{x+h}\right)^a \sin(x^{-a}) \right| (x+h)^a$

$\le 2(x+h)^a$

② 若 $x>0$，则

$|f(x+h)-f(x)| = |f'(\xi)| \cdot h \quad (x<\xi<x+h)$

$\le (a\xi^{a-1} + a\xi^{-1})h$

$= a(\xi^a+1)\frac{h}{\xi}$

$\le \frac{2ah}{\xi}$

$\le 2a \cdot \frac{h}{x}$.

故 (i) 当 $x^{a+1} \ge h^a$ 时，利用估计式②，

$|f(x+h)-f(x)| \le 2a \cdot \frac{h}{x} \le 2a \cdot h^{\frac{a}{a+1}}$

(ii) 当 $x^{a+1} < h$ 时，利用估计式①

$|f(x+h)-f(x)| \le 2(x+h)^a \le 2(h^{\frac{1}{1+a}}+h)^a$

$= 2(1+h^{\frac{a}{1+a}})h^{\frac{a}{1+a}}$

$\le 4h^{\frac{a}{a+1}}$

所以，对 $\forall 0<\alpha<1$，令 $a=\frac{\alpha}{1-\alpha}$，$A=\max(2a,4)$

$= \max\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha}, 4\right)$

则对 $\forall x, x+h \in [0,1]$ $(0<h<1)$ 有

$|f(x+h)-f(x)| \le Ah^\alpha$

故函数 $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sin\left(x^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) & x \in (0,1] \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 即为所求

15. 由有界变差函数的结构可知，存在单调递增函数 F_1, F_2 有界 st. $F = F_1 - F_2$.

又单调递增函数可分解为连续单调函数和跳跃函数.

$\therefore F_1 = F_1' + J_1 \quad F_2 = F_2' + J_2$

其中 F_1', F_2' 单调连续，J_1, J_2 为跳跃函数

$\therefore F = (F_1' - F_2') + (J_1 - J_2)$.

$\because F$ 连续 $\therefore J_1 - J_2 = F - (F_1' - F_2')$ 连续

$\therefore J_1 - J_2 = C$ C 为一常数.

$\therefore F = (F_1' + C) - F_2'$

其中 $F_1'+C$ 与 F_2' 即为要找的连续单调函数.

30. (1) 若结论对有界单调函数成立，由于 $F = F_1 - F_2$，F_1, F_2 有界

$\therefore \int_{\mathbb{R}} |F(x+h)-F(x)|dx \le \int_{\mathbb{R}} |F_1(x+h)-F_1(x)|dx$

$+ \int_{\mathbb{R}} |F_2(x+h)-F_2(x+h)|dx$

$\le (A_1+A_2)\cdot|h|$.

故结论成立.

∴ 只需证结论对有界单调函数成立. 下证之

设 F 为有界单调函数.

由 扫描全能王 扫描创建

对于 $h>0$

$\int_{\mathbb{R}} |F(x+h)-F(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} (F(x+h)-F(x))\,dx$.

$\forall N \in \mathbb{N}^*$.

$\int_{-Nh}^{Nh} (F(x+h)-F(x))\,dx = \sum_{i=-N+1}^{N} \int_{(i-1)h}^{ih} (F(x+h)-F(x))\,dx$.

$\leq \sum_{i=-N+1}^{N} \int_{(i-1)h}^{ih} |F(i+1)h - F(i)h|\,dx$

$= h \sum_{i=-N+1}^{N} (F(i+1)h - F(i)h)$

$= h \cdot (F((N+1)h) - F((-N+1)h))$

令 $N \to +\infty$ 得 $\int_{\mathbb{R}} |F(x+h)-F(x)|\,dx \leq h \cdot (F(+\infty) - F(-\infty))$

$\because F$ 有界 $\therefore 0 < A = F(+\infty) - F(-\infty) < +\infty$.

$\therefore \int_{\mathbb{R}} |F(x+h)-F(x)| \leq Ah$

$\therefore$ 结论对单调有界函数成立

故结论成立

下证前面的 claim: $F = F_1 - F_2$. F_1, F_2 有界单调.

定义 $\mathbb{R}$ 上的分割 $\Delta: -\infty = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = +\infty$.

由有限闭区间上的证明过程可知, 只需证 $T_F(-\infty, +\infty) < +\infty$.

$\because M \triangleq \sup_{a<b} T_F(a,b) < +\infty$.

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}^*$. $T_F(-n, n) \leq M < +\infty$

令 $n \to +\infty$ 得 $T_F(-\infty, +\infty) \leq M < +\infty$

故 claim 得证

Maxleaf

对于 $h>0$.

(b). 任意列有恒等式:

$F(x+h)\varphi(x+h) - F(x)\varphi(x) = (F(x+h)-F(x))\varphi(x+h) + F(x)(\varphi(x+h)-\varphi(x))$

两边对 x 在 $\mathbb{R}$ 上积分.

$\because F$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界, φ 是具紧支集的有界函数.

$\therefore F(x)\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积.

$\therefore \int_{\mathbb{R}} F(x+h)\varphi(x+h)\,dx = \int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi(x)\,dx$

$\therefore$ 恒等式的右边对 x 在 $\mathbb{R}$ 上积分为 0.

$\therefore \left| \int_{\mathbb{R}} F(x)(\varphi(x+h)-\varphi(x))\,dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} (F(x+h)-F(x))\varphi(x+h)\,dx \right|$

$\leq \int_{\mathbb{R}} |F(x+h)-F(x)|\,|\varphi(x+h)|\,dx$

$\leq \int_{\mathbb{R}} |F(x+h)-F(x)|\,dx$

$\overset{(a)}{\leq} A|h|$

$\therefore \left| \int_{\mathbb{R}} F(x) \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\,dx \right| \leq A$. (1)

$\because \varphi$ 是具紧支集的 C^1 函数

$\therefore \varphi$ 在其紧支集处有连续的导数 φ', 在紧支集外导数 $\varphi' = 0$.

$\therefore \varphi'$ 有界, 且 $\exists M_1 > 0$ s.t. $|\varphi'(x)| \leq M_1$ 即 $\forall x \in \mathbb{R}$

又 F 有界 $\therefore \exists M_2 > 0$ s.t. $|F(x)| \leq M_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ 对 $\forall x \in \mathbb{R}$. $h > 0$. 由微分中值定理:

$\left| F(x) \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \right| \leq M_2 |\varphi'(\xi)| \qquad x < \xi < x+h$.

$\leq M_1 M_2$ 为 $k(\xi)$.

Maxleaf

由 扫描全能王 扫描创建

不妨限制 h 的上界为 1 即 $0<h<1$

设 $K'=\{x\in\mathbb{R}\mid d(x,K)<1\}$. 显然 K' 为开集. 且可测

则 $\left|F(x)\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right|\le M_1M_2\chi_K(x)$

$\le M_1M_2\chi_{K'}(x)$.

$\because M_1M_2\chi_{K'}(x)$ 可积

$\therefore$ 由控制收敛定理.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}F(x)\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}dx=\int_{\mathbb{R}}F(x)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(x+\frac{1}{n})+\varphi(x)}{\frac{1}{n}}\right)dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}}F(x)\varphi'(x)dx. \quad (2)$$

又由(1)式可知. $\forall n\in\mathbb{N}^*\ n\ge 2$. 有.

$$\left|\int_{\mathbb{R}}F(x)\frac{\varphi(x+\frac{1}{n})-\varphi(x)}{\frac{1}{n}}dx\right|\le A.$$

$\therefore$ 由极限保号性

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}}F(x)\frac{\varphi(x+\frac{1}{n})-\varphi(x)}{\frac{1}{n}}dx\right|\le A. \quad (3)$$

由绝对值函数连续性

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}F(x)\frac{\varphi(x+\frac{1}{n})-\varphi(x)}{\frac{1}{n}}dx\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}}F(x)\frac{\varphi(x+\frac{1}{n})-\varphi(x)}{\frac{1}{n}}dx\right| \quad (4)$$

由(2).(3)(4)式可知.

$$\left|\int_{\mathbb{R}}F(x)\varphi'(x)dx\right|\le A.$$

由 扫描全能王 扫描创建