

史密斯圆图

Yurihou, BH9DWE

写在前面

碎碎念

为什么要写这篇文章呢，大部分正常的大学工科教材在讲阻抗匹配与史密斯圆图时，一上来就是篇幅极长极严谨的推导，还有各种适用情况的讨论。诚然，严谨地使用史密斯圆图确实需要先掌握其各种元素的原理，但对于工程师，完全掌握其各种元素的严谨原理实在是太耗时间了，对于很多情况，这些工具是要求拿到就能马上使用的，对于没接触过的人学习成本有点高；而对于业余爱好者来说，长篇的推导一眼望过去很容易打击积极性。

还有极个别工科教材，作者称之为理论性极强，我称之为装逼欲望极强，上来讲史密斯圆图就说这是“一个复数域上的双线性保角变换，是把无穷大阻抗平面变换到反射系数平面的单位圆里”，并配一大堆证明，这些证明除了装逼之外，对于理解如何使用这一工具没有任何帮助。我认为这种教材是一篇下等的教材。

但其实本文写下来一看推导也挺多的。尽快用起来的话建议先看后文串并联电感电容在史密斯圆图上的阻抗轨迹长啥样，再看前面的推导，甚至不看前面的推导也可以。

叠甲

文章中的数学推导进行了相当程度的简化，相当不严谨，很多地方省略了一些实际工程中不太重要的条件，很多地方用“注意到”、“类似地”、“邀请读者作为练习”等句式，甚至直接给出结论的方法糊弄掉了一些作者自己也推不出来的结论。恳请各位读者轻点拍砖。

本文的各种推导作者个人认为有高中知识就能推导，如果有看不懂推导过程的地方可以尽情找作者拍砖。

文中个别在史密斯圆图中基本用不到，只是写到这里顺手写上去了的知识点用**方框框起来了**，阅读时可以**跳过**。

0 引言

无线电发射和接收时，天线阻抗和发射/接收机阻抗匹配时，发射/接收机能获得最大的功率，同时也不会有反射功率造成额外的干扰或损耗。在实际电路中，由于制造误差或性能要求不同，不可避免地出现一些天线与收发设备阻抗不匹配的情况，此时需要做一些措施来匹配阻抗。

射频电路改变阻抗需要给收发信机和天线之间添加阻抗变换网络，而这个网络里面无非就是串并联电阻电容电感什么的。然而具体是需要串还是并，串谁并谁，大小如何，顺序如何，这并不是一件显然的事情。今天简单介绍一下史密斯圆图（Smith Chart），借助这个圆图便可相对直观地设计阻抗匹配网络。

1 前置知识

1.1 复数的运算

学过复变函数的可以直接跳过这一节，学过高中复数知识的可以从复数的模和辐角部分开始看。

1.1.1 虚数单位

定义虚数单位 j ，满足

$$j^2 = -1$$

虚数单位数学里面用 i 多一些，因为本文讲电路，电路里面经常使用 i 表示电流，为防止混淆，这里就改用 j 。

1.1.2 虚数、复数、实部与虚部

虚数指的是数中有若干虚数符号的数，形如

$$c = a + jb$$

其中 a 和 b 都是实数。

其中，不和 j 相乘的部分称为实部，记作 $\text{Re}(c) = a$ ，和 j 相乘的部分称为虚部，记作 $\text{Im}(c) = b$ 。注意实部和虚部都是实数。

纯虚数指实部为 0 的虚数，例如 $j3$ 。

复数包括实数和虚数。

1.1.3 复数的加减

复数加减就是实部虚部分别相加减。例如

$$\begin{aligned} & (1 + j2) + (3 + j4) \\ &= (1 + 3) + j(2 + 4) \\ &= 3 + j6 \end{aligned}$$

1.1.4 复数的乘法

复数相乘和多项式相乘基本是一致的，把 j 当成一个代数符号，最后根据 $j^2 = -1$ 把 j 的高次全部消掉。例如

$$\begin{aligned} & (1 + j2) \times (3 + j4) \\ &= 1 \times 3 + 1 \times j4 + j2 \times 3 + j2 \times j4 \\ &= 3 + j4 + j6 + (-1) \times 8 \\ &= -5 + j10 \end{aligned}$$

1.1.5 共轭复数与复数的除法

除法也是一样的，化简的最终目的是把分母里面的虚数符号化没，把复数变为标准形式 $a + jb$ 。注意到平方差公式

$$(a + bx)(a - bx) = a^2 - (bx)^2$$

定义复数 $Z = a + jb$ 的共轭复数 Z^* ，共轭复数实部相等，虚部互为相反数，即

$$Z^* = a - jb$$

那么一个复数与其共轭相乘

$$\begin{aligned} Z \times Z^* \\ &= (a + jb) \times (a - jb) \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

的结果是一个实数。那么消掉分母中的虚数符号，只需要给分子上下同时乘以分母的共轭，再进行化简即可。例如

$$\begin{aligned} &\frac{1 + j2}{3 + j4} \\ &= \frac{(1 + j2)(3 - j4)}{(3 + j4)(3 - j4)} \\ &= \frac{11 + j2}{25} \\ &= 0.44 + j0.08 \end{aligned}$$

1.1.6 复平面、复数的模和辐角

以复数的实部为横轴、虚部为纵轴构成平面，称为复平面。如图 1 所示。

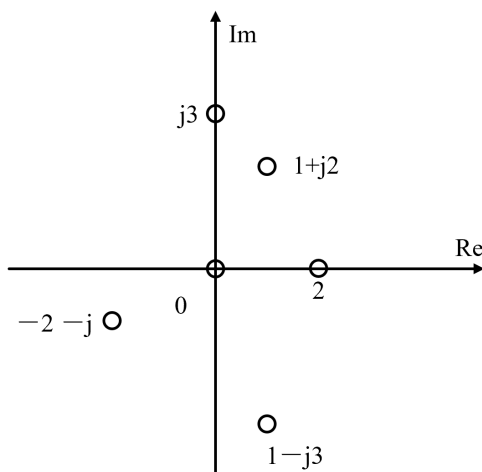


图 1: 复平面

复数可以用实部虚部的形式来表示，也可以使用模和辐角的形式来表示。复数 c 的模，即向量 $(\text{Re}(c), \text{Im}(c))$ 的模

$$|c| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(c) + \operatorname{Im}^2(c)}$$

复数 c 的辐角，即向量 $(\operatorname{Re}(c), \operatorname{Im}(c))$ 和实轴正方向的夹角

$$\arg(c) = \arctan \frac{\operatorname{Im}(c)}{\operatorname{Re}(c)}$$

因为向量旋转若干个 360° 之后还是回到原处，一个确定的复数有无数个相差整数个 2π 的辐角。定义辐角主值 $\operatorname{Arg}(c)$ 为 $(-\pi, \pi]$ 范围内的辐角。一个复数的辐角主值是唯一的。下文一般提到复数的辐角默认用辐角主值。

如图 2，复数可以用模和辐角表示。例如 $1 + j$ 也可以表示为 $\sqrt{2} \angle 45^\circ$ 。

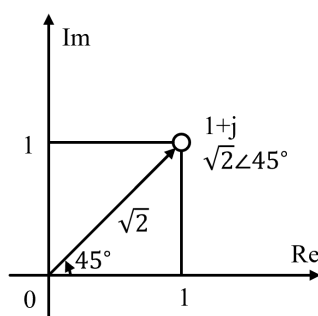


图 2: 复数的两种表示方法

1.1.7 欧拉公式、双曲三角函数和复数的指数表示

定义复数的指数函数，即欧拉公式

$$e^{j\pi} = -1$$

进一步地

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

我们发现，复数也可以用复数的指数形式来表示。即

$$c = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j \arctan \frac{b}{a}} = |c| e^{j \operatorname{Arg}(c)}$$

1.1.8 复数的对数

定义

$$\log(c) = \ln |c| + j \arg(c)$$

由于 $\arg(c)$ 是多值的，复数的对数函数也是多值的。因此复数的对数函数也有主值

$$\operatorname{Log}(c) = \ln |c| + j \operatorname{Arg}(c)$$

根据复数的对数定义，我们可以求 j^j 的标准复数形式

$$j^j = e^{j \log j} = e^{j(\ln 1 + j(\frac{\pi}{2} + k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2} - k\pi} (k \in \mathbb{N})$$

居然是实数。如果取主值，则

$$j^j = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0.2079$$

依据此方法，可求出 π^{j^e} 、 j^{π^e} 的值，留给读者做练习。

1.2 相量法

如果学过电路的同学可以跳过此节。

1.2.1 相量法推导

对于单频正弦激励电路的稳态求解，可以使用相量法求解。

电压电流 正弦电压

$$u(t) = U \sin(\omega t + \varphi)$$

由于只考虑单频稳态，因此 ωt 可以不考虑。那么使用幅值 U 和相位 φ 即可表示一个电压。参考上文复数的幅角表示，我们可以用其表示电压。由于这个电压除了幅值大小之外还有相位，因此我们称其为相量。电压或电流的相量用大写字母上加一点表示，如 $\dot{U}$ 、 $\dot{I}$ 。表示具体的值时，我们可以采用

$$\dot{U} = U \angle \varphi$$

的写法表示。例如某正弦电压有效值为 220V，相位为 30° ，则其相量为 $\dot{U} = 220 \angle 30^\circ (\text{V})$ 。

相量欧姆定律 相量法下，电压电流仍满足欧姆定律

$$\dot{U} = \dot{I} Z$$

其中 Z 称为阻抗。可预见的，由于 $\dot{U}$ 、 $\dot{I}$ 都定义在复数域内，因此阻抗 Z 也有可能是复数

$$Z = R + jX$$

Z 的实部 R 称为电阻，和直流电路的电阻概念是一样的； Z 的虚部 X 称为电抗。阻抗、电阻、电抗的单位都是欧姆 Ω 。当 Z 为实数时，即阻抗为纯电阻时，阻抗两端的电压和流过的电流相位一致。

导纳 在相量法中，和电导对应的概念是导纳 Y

$$Y = \frac{1}{Z}$$

导纳 Y 也是复数

$$Y = G + jB$$

实部 G 称电导，虚部 B 称电纳。

电容 电容的定义式为

$$C = \frac{Q}{u}$$

其中电容两端的电荷 Q 与电容上电流 i 的关系为

$$Q = \int i dt$$

代入上式，两侧对时间 t 积分，有

$$i(t) = u(0) + C \frac{du(t)}{dt}$$

由于相量法适用于稳态，因此初态 $u(0)$ 不用考虑。可以看出电容上的电流为电压关于时间的导数。

假设电容上的电压为 $u(t) = U \sin(\omega t + \varphi)$ ，则电容上的电流

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = C \frac{d}{dt} U \sin(\omega t + \varphi) = \omega C U \cos(\omega t + \varphi) = \omega C U \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

可以看出，电容上的电流波形相当于电压波形向前（ t 轴负方向）平移，相当于电流出现在某相位比电压早，因此我们说电流超前电压四分之一周期，或者 90° 。我们以电压为参考相位，则 $\dot{U} = U \angle 0^\circ$ ，则电流

$$\dot{I} = \omega C U \angle 90^\circ$$

。

将电压和电流代入相量法欧姆定律中，有

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{\omega C U \angle 90^\circ}{U \angle 0^\circ}$$

由于复数辐角 90° ，写成实部虚部的形式即纯虚数 j 。因此

$$Z = \frac{1}{j\omega C}$$

电容的阻抗 Z_C 是虚部为负的纯虚数

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$$

其虚部的相反数称为容抗

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

电感 电感的定义式为

$$L = \frac{\Psi}{i}$$

其中 Ψ 为电感上的磁链，即线圈中的磁通 Φ 乘以线圈的匝数 N ，即

$$\Psi = N\Phi$$

根据法拉第电磁感应定律，电感两端的电压，即感应电动势的相反数，满足

$$u = -\frac{N d\Phi}{dt}$$

代入上式，亦可得到

$$u = i(0) + L \frac{di}{dt}$$

在相量法中，此处可推导得到电感上的电压超前电流四分之一周期，亦即电流滞后电压 90° 。依旧以电压为参考相位，可得电感的阻抗 Z_L 是虚部为正的纯虚数

$$Z_L = j\omega L$$

电感阻抗的虚部称为感抗 X_L

$$X_L = \omega L$$

跳过上一节的同学，可以直接看下面的**最直接，最准确，最不弯弯绕**的结论。

1.2.2 相量法基本结论

阻抗与导纳 对于正弦稳态电路分析，可以使用相量法。在相量法中，与直流电路中电阻相对应的概念是阻抗 Z 。阻抗的值是复数

$$Z = R + jX$$

Z 的实部 R 称为电阻，和直流电路的电阻概念是一样的； Z 的虚部 X 称为电抗。阻抗、电阻、电抗的单位都是欧姆 Ω 。

和电导对应的概念是导纳 Y

$$Y = \frac{1}{Z}$$

导纳 Y 也是复数

$$Y = G + jB$$

实部 G 称电导，虚部 B 称电纳。

电阻电容电感的相量法表示 在相量法中，电阻电容电感都可被视为阻抗或者导纳。电阻的阻抗 Z_R 即电阻的大小 R ，是实数

$$Z_R = R$$

电感的阻抗 Z_L 是虚部为正的纯虚数

$$Z_L = j\omega L$$

其中 $\omega = 2\pi f$ 为电信号的角频率。电感阻抗的虚部称为感抗 X_L

$$X_L = \omega L$$

电容的阻抗 Z_C 是虚部为负的纯虚数

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$$

其虚部的相反数称为容抗

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

电容电感的导纳可根据 $Y = \frac{1}{Z}$ 自行推导。

1.2.3 传输线的相量法表示

这部分的推导太复杂了，后面有机会再添加吧。

对于理想传输线，输入阻抗 Z_{in} 与负载阻抗 Z_L 的关系为

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta z)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta z)}$$

其中

$$Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}$$

为传输线的特性阻抗

$$\beta = \omega\sqrt{lc}$$

为传输线的相位系数，即单位长度传输线中相位的变化量； z 可以简单理解为传输线的长度。 l 和 c 分别为传输线单位长度的电感和电容，这两个参数由传输线的尺寸、材料、结构等决定，影响传输线的特性阻抗与相位系数。

我们知道，在介质中，电磁波的传播速度 v 满足

$$\mu\epsilon v^2 = 1$$

其中， μ 为介质磁导率， ϵ 为介质电导率。

进一步地， $\beta = \omega\sqrt{lc}$ 一式中，约去 l 和 c 中与传输线尺寸、材料、结构等相关的因素，可以进一步得出

$$\beta = \omega\sqrt{lc} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v}$$

$$\beta z = \frac{\omega}{v}z$$

假设传输线长度为电磁波长 λ 的 k 倍，即 $z = k\lambda$ ，又因为 $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi v}{\omega}$ ，代入上式

$$\beta z = 2k\pi$$

代入阻抗一式可得

$$Z_{\text{in}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(2k\pi)}{Z_0 + jZ_L \tan(2k\pi)}$$

当 $k \rightarrow \frac{1}{4}$ 时， $\tan(2k\pi) \rightarrow \infty$ ； $k = \frac{1}{2}$ 时， $\tan(2k\pi) = 0$ 。由此可以预见，当传输线长度为波长的四分之一、二分之一倍时，传输线将具有一些特殊性质。这些内容将在下文进行讨论。

对于真空，介电常数为 ε_0 ，磁导率为 μ_0 ，电磁波速即为光速 c ，满足

$$\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$$

常见的塑料（例如聚四氟乙烯、聚乙烯、聚丙烯等）相对介电常数 ε_r （即介电常数 ε 是真空介电常数 ε_0 的多少倍， $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ ）通常在 2-2.3 左右，而相对磁导率 μ_r （即磁导率 μ 是真空磁导率 μ_0 的多少倍， $\mu = \mu_0\mu_r$ ）约等于 1。为了方便计算，取 $\varepsilon_r = 2.25$ ，可得到

$$\varepsilon\mu v^2 = 2.25\varepsilon_0\mu_0v^2 = \varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$$

$$1.5v = c$$

亦即塑料电缆中电磁波的速度约为光速的 2/3 倍，通常可取 $2 \times 10^8 \text{m/s}$ 。实践中使用塑料同轴线制作四分之一波长、二分之一波长传输线时，需要注意长度计算要搞清“电长度”与物理长度之间的关系。

考虑一些 Z_L 为特殊情况的传输线。当传输线末端开路，亦即 $Z_L \rightarrow \infty$ 时

$$Z_{\text{in}} = Z_0 \frac{1}{j \tan(2k\pi)} = -jZ_0 \frac{1}{\tan(2k\pi)}$$

等效为一个电容。

当传输线末端短路，亦即 $Z_L = 0$ 时

$$Z_{\text{in}} = jZ_0 \tan(2k\pi)$$

等效为一个电感。

2 电容电感串并联

戴维南定理指出，任何含独立电源的线性电阻单口网络都可以等效为一个电压源与一个串联电阻的单口网络。扩展到相量法中，串联电阻替换成阻抗就行了。

如图 3 所示，在一个由天线和收发信机组成的系统中，对于发射过程，天线是负载，发信机是电源；而对于接收过程，天线是电源，收信机是负载。在下文的描述中，就都统一描述为电源和负载。

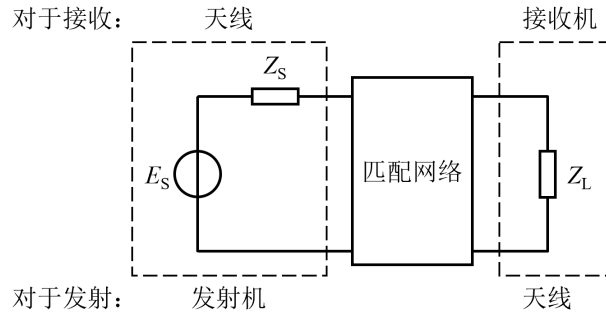


图 3: 电源和负载示意

在分析中负载直接等效为一个阻抗即可，而电源则根据戴维南定理，等效为一个理想电压源串联一个阻抗。电源的内阻和负载阻抗因为电路原理、加工工艺、元件参数误差等往往并不相同，因此需要阻抗匹配。

匹配网络里面无非就是一些串并联的电阻电容电感。以下是一些很显然的结论：

- 串联电阻，电阻变大，电抗不变；
- 串联电感，电阻不变，电抗变大；
- 串联电容，电阻不变，电抗减小；
- 并联电阻，电导变大，电纳不变；
- 并联电感，电导不变，电纳变小；
- 并联电容，电导不变，电纳变大。

如果仅考虑阻抗匹配，最直观的，假如电源的内阻小，天线阻抗里的电阻大，匹配网络里面串个电阻就行了。但是我们知道，电阻是需要消耗能量的，用电阻匹配，阻抗相等是没问题，但是效率将大打折扣。（理想）电容电感不消耗能量，但如果串电容、串电感，仅改变电源以外网络的电抗，电阻这一块还是无法匹配。此外，假如电源内阻大，天线电阻小，我们想找一个无源的负电阻是很困难的。

此时我们注意到，如果并联电容电感，电导不变，但并不保证电阻不变（事实上电阻确实会发生变化），那么我们并联电容或者电感就有可能凑出一个匹配的电阻值。

举个例子，如图 4 所示，电源的内阻 $Z_S = 50$ ，负载为 $Z_L = 12.5$ ，工作频率为 10MHz。我们从电源开始，分别串联 89.3pF 的电容、并联 1uH 的电感、再串联 173.8pF 的电容，最终我们能得到，从负载看过去的阻抗 $Z_{Leq} \approx (12.48 + j0.062)$ ，和负载阻抗 12.5Ω 很接近了，可以看作进行了良好的匹配。相应地，如果我们倒着从负载开始往回算，最后得到从电源看过去的阻抗 $Z_{Seq} \approx (50.24 + j0.115)$ ，匹配也很良好。

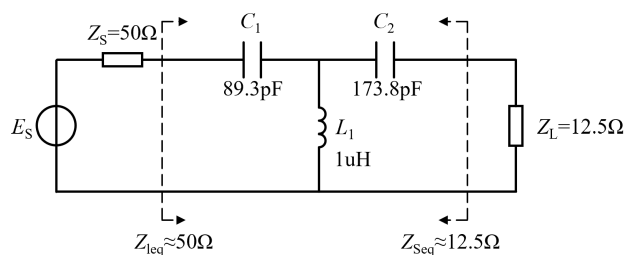


图 4: 匹配网络一例

我们将这一过程绘制到阻抗平面（即阻抗的复平面，亦即以电阻为横坐标、电抗为纵坐标的坐标系）中吧。绘制好的轨迹如图 5 所示。

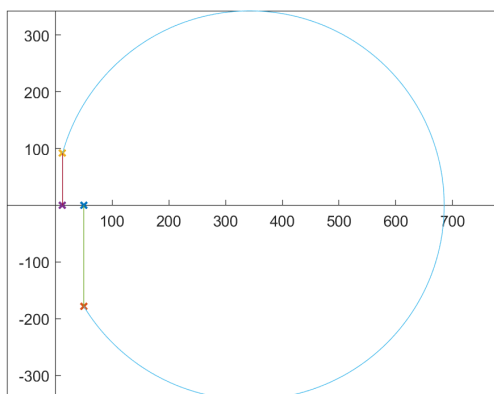


图 5: 阻抗复平面的阻抗轨迹

因为是阻抗平面，所以前后两个串联电容的变化是很显然的：电阻不变，电抗变小，在图上的轨迹是向下的直线。但是中间串联的这个电感在图上居然是走一个大回环，这一点是相当不显然的。这就导致如果使用阻抗平面判断如何串联比较直观，而判断如何并联就不直观了。同理可以预见，如果使用导纳平面，则并联直观，串联不直观。

3 反射系数与史密斯圆图

选定某个纯电阻的阻抗 Z_0 （实际通信系统中经常采用 50Ω ）作为参考阻抗。

为啥选择 50Ω 工程上选择传输线的最佳特性阻抗时，一般考虑两个因素：最大传输功率和导体的损耗。

最大传输功率 对于绝缘材料，我们可以认为其在大于某一电场时，材料本身将被破坏，从而导致绝缘失效，最终至于击穿。

回忆高中时的点电荷，越靠近点电荷处的电场越强，同轴电缆也是如此，越靠近内导体处的电场越强。对于一根外径为 a ，内径为 b 的同轴电缆，给内外导体间施加电压 V ，其导体附近，

亦即绝缘层中最大场强 $E_{\max}$ 为

$$E_{\max} = \frac{V}{a \ln(b/a)}$$

传输线的特性阻抗

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\ln(b/a)}{2\pi} \approx \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \frac{b}{a}$$

当负载与电缆的特性阻抗相等时，传输到负载上的功率最大。最大功率 P 正比于 V^2/Z_0

$$\begin{aligned} P \propto \frac{V^2}{Z_0} &= \frac{[E_{\max} \cdot a \ln(b/a)]^2}{(60/\sqrt{\varepsilon_r}) \ln(b/a)} \\ &= \frac{\sqrt{\varepsilon_r} E_{\max}^2 a^2 \ln(b/a)}{60} \end{aligned}$$

欲求 P 的最大值，对其求导并令导数等于 0

$$\frac{dP}{da} = 0$$

即

$$\frac{d}{da} \left[a^2 \ln \frac{b}{a} \right] = 0$$

可得当 $a = b/\sqrt{e}$ ，亦即

$$\frac{b}{a} = \sqrt{e}$$

时有 P 取得最大值。代入

$$Z_0 \approx \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \frac{b}{a} = 30\Omega$$

因此为了使一根外径一定的空气介质的传输线具有最大的功率传输能力，我们希望选择尺寸，使 Z_0 等于 30Ω 。

导体损耗 电介质损耗引起的每单位长度的衰减一般认为由导体电介质材料本身的特性决定，与导体尺寸基本无关。只考虑电阻损耗引起的衰减，可得衰减系数 α

$$\alpha \approx \frac{R}{2Z_0}$$

其中 R 为单位长度导体的电阻。在频率足够高时，此电阻受到趋肤效应的影响显著大于导体直流下的电阻。为了减小导体电阻，可以增加内导体直径 b ，但增加 b 又会使得 Z_0 减小。因此需要找到同轴线尺寸的最优值。

假设在某频率下，导体的趋肤深度为 δ ，此时同轴线的内外导体可建模为一厚度为 δ 、半径分别为 b 和 a 的圆筒，其截面积 S 约等于 $2\pi\delta b$ 和 $2\pi\delta a$ 。因此，单位长度的导体电阻 R 大约满足

$$R \approx \frac{\rho}{S} = \frac{\rho}{2\pi\delta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

其中 ρ 为导体材料的电阻率。代入衰减系数，可得

$$\alpha \approx \frac{R}{2Z_0} \approx \frac{\frac{\rho}{2\pi\delta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}{2 \cdot \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a}}$$

欲求 α 的最小值，对其求导并令导数等于 0

$$\frac{d\alpha}{da} = 0$$

即

$$\frac{d}{da} \frac{1/a + 1/b}{\ln(b/a)} = 0$$

$$\ln \frac{b}{a} = 1 + \frac{a}{b}$$

这是一个非线性方程，使用数值求解可得到 $b/a \approx 3.6$ ，此时 $Z_0 \approx 77\Omega$ 。

妥协 因此对于一般的通信系统，通常采用 50Ω 作为系统的特性阻抗，可以较为均衡地兼顾发射和接收。而对于纯接收系统，例如闭路电视，一般接收到的功率不太大，可以不考虑最大功率传输，因此通常电视系统采用 75Ω 作为系统的特性阻抗。

定义反射系数

$$\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$$

以反射系数的复平面建立坐标系，我们很容易得到此平面的若干性质

3.1 原点处对应的阻抗为 Z_0

很显然， $Z = Z_0$ 时 $\Gamma = 0$

3.2 开路点在 $(1, 0)$

当 $Z \rightarrow \infty$ 时，

$$\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \rightarrow \frac{Z}{Z} = 1$$

3.3 短路点在 $(-1, 0)$

当 $Z \rightarrow 0$ 时，

$$\Gamma \rightarrow \frac{-Z_0}{Z_0} = -1$$

3.4 纯电阻分布在横轴上

也很显然。 Z_0 是纯电阻，阻抗为实数，那么 Z 是实数时 Γ 也是实数。

3.5 纯电抗分布在单位圆上

当 Z 为纯虚数时

$$\Gamma = \frac{jX - Z_0}{jX + Z_0}$$

其中 X 为实数。那么

$$\Gamma = \frac{Z_0^2 - X^2 - 2jZ_0X}{Z_0^2 + X^2}$$

$$\operatorname{Re}\Gamma = \frac{Z_0^2 - X^2}{Z_0^2 + X^2}$$

$$\operatorname{Im}\Gamma = -\frac{2Z_0X}{Z_0^2 + X^2}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}^2\Gamma + \operatorname{Im}^2\Gamma &= \frac{(Z_0^2 - X^2)^2 + 4Z_0^2X^2}{(Z_0^2 + X^2)^2} \\ &= \frac{(Z_0^2 + X^2)^2}{(Z_0^2 + X^2)^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

这是一个圆心在 (0,0)，半径为 1 的圆，亦即单位圆。因此我们可以得到，当 $R = 0$ 时，亦即纯电抗，其反射系数分布在单位圆上。

3.6 电阻 R 为定值时，阻抗分布在圆上

3.7 电抗 X 为定值时，阻抗也分布在圆上

$$\Gamma = \frac{jX + R - Z_0}{jX + R + Z_0}$$

$$\Gamma = -\frac{(jX + R - Z_0)(jX - R - Z_0)}{(Z_0 + R)^2 + X^2} = \frac{X^2 + R^2 + j2XZ_0 - Z_0^2}{(Z_0 + R)^2 + X^2}$$

$$\operatorname{Re}\Gamma = \frac{R^2 + X^2 - Z_0^2}{(Z_0 + R)^2 + X^2}$$

$$\operatorname{Im}\Gamma = \frac{2Z_0X}{(Z_0 + R)^2 + X^2}$$

注意到

$$\left(\operatorname{Re}\Gamma - \frac{R}{Z_0 + R}\right)^2 + \operatorname{Im}^2\Gamma = \left(\frac{Z_0}{Z_0 + R}\right)^2$$

可以看出此式也是一个圆的方程，此圆的圆心在 $(0, \frac{R}{Z_0 + R})$ ，半径为 $\frac{Z_0}{Z_0 + R}$ 。因此，当电阻 R 为定值时，阻抗分布在此圆上。进一步可以看出，此圆的圆心在实轴 $[0,1]$ 上，而此圆恒过点 (1,0)，且电阻越大，圆半径越小。在电阻为取不同的定值时，阻抗轨迹如图 6 所示。

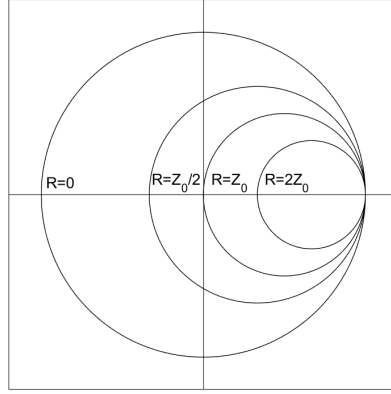


图 6: 等电阻圆

又注意到

$$(\operatorname{Re}\Gamma - 1)^2 + \left(\operatorname{Im}\Gamma - \frac{Z_0}{X}\right)^2 = \left(\frac{Z_0}{X}\right)^2$$

可以看出此公式也是一个圆的方程，圆心在 $(1, \frac{Z_0}{X})$ ，半径为 $\frac{Z_0}{X}$ 。因此，当电抗 X 为定值时，阻抗分布在上述的圆上。进一步可以看出，此圆的圆心在 $\operatorname{Im}\Gamma = 1$ 上，也恒过 $(0,1)$ ，且电抗越大，圆半径越小。当电抗取不同的定值时，阻抗轨迹如图 7 所示。

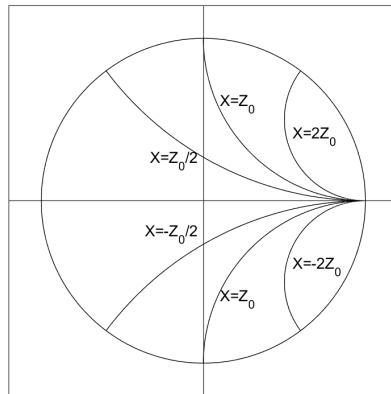


图 7: 等电抗弧

需要注意的是，由于电阻 $R \geq 0$ ，这些阻抗的轨迹不会超过单位圆，因此等电抗的轨迹在史密斯圆图上仅呈现一段弧。

3.8 $|\Gamma| \leq 1$

根据以上两节，当 $R = 0$ 时，反射系数分布在单位圆上；而 $R \geq 0$ ， R 越大，其分布的圆就越缩小，且恒在单位圆内。因此 Γ 的点也始终分布在单位圆上或圆内，亦即 $|\Gamma| \leq 1$ 。

3.9 用导纳表示的反射系数

将

$$Y = \frac{1}{Z}$$

代入

$$\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = \frac{\frac{1}{Y} - \frac{1}{Y_0}}{\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y_0}} = \frac{Y_0 - Y}{Y_0 + Y}$$

用导纳表示的反射系数进一步可以推导出

3.10 电导 G 为定值时，阻抗分布在圆上

此圆的圆心在 $(0, -\frac{G}{Y_0+G})$ ，半径为 $\frac{Y_0}{Y_0+G}$ ，恒过 $(-1,0)$ 。电导越大，圆半径越小。取不同的电导定值，反射系数轨迹如图 8 所示。

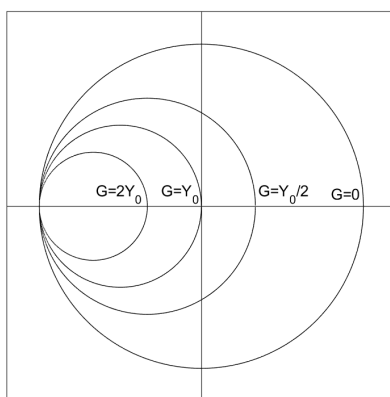


图 8: 等电抗圆

3.11 电纳 B 为定值时，阻抗也分布在圆上

此圆的圆心在 $(-1, \frac{Y_0}{B})$ ，半径为 $\frac{Y_0}{B}$ ，恒过 $(-1,0)$ 。电纳越大，圆半径越小。取不同的电纳定值，反射系数轨迹如图 9 所示。

以上两条推导过程就省略了，有兴趣的读者可以当作练习自行推导。

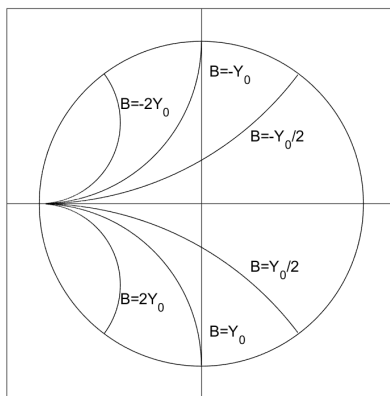


图 9: 等电纳弧

由此我们便可得到一个典型的史密斯圆图的图像，如图 10 所示。其中红色圆是等电阻圆，蓝色弧是等电抗弧，紫色圆是等电导圆，绿色弧是等电纳弧。

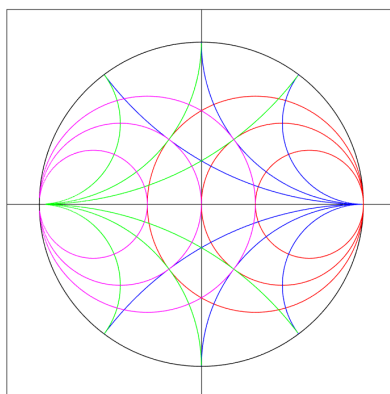


图 10: 典型的史密斯圆图

3.12 传输线的反射系数

将

$$Z_{\text{in}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta z)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta z)}$$

代入

$$\Gamma = \frac{Z_{\text{in}} - Z_0}{Z_{\text{in}} + Z_0}$$

可以得到

$$\Gamma(z) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2j\beta z}$$

可以看出这是一个复数的指数表达方式，当特性阻抗和负载确定时，反射系数 $\Gamma(z)$ 的模

$$|\Gamma(z)| = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

是一个定值。传输线在史密斯圆图上的轨迹在以原点为圆心的圆，亦即等反射系数模圆上。

3.13 驻波比

驻波比

$$VSWR = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

因此等驻波比圆和等反射系数模圆是一致的。

4 匹配网络各元件在史密斯圆图上的轨迹

4.1 电阻电容电感

回忆一下上文提到的若干结论

- 串联电阻，电阻变大，电抗不变；
- 串联电感，电阻不变，电抗变大；
- 串联电容，电阻不变，电抗减小；
- 并联电阻，电导变大，电纳不变；
- 并联电感，电导不变，电纳变小；
- 并联电容，电导不变，电纳变大。

假如我们往电路里面串联电阻，那么电阻变大，电抗不变，阻抗的轨迹应当沿着等电抗弧向右。以 $25 + j25$ 的阻抗串联电阻 25 为例，阻抗轨迹如图 11 所示。

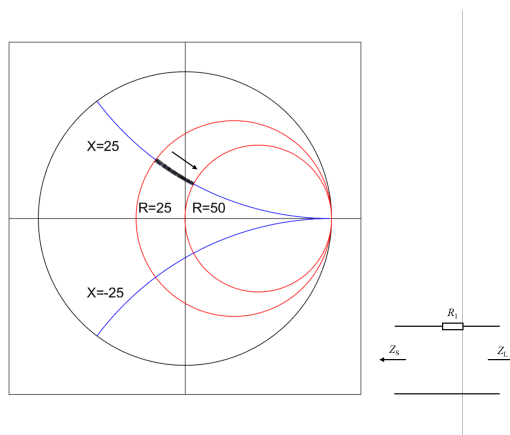


图 11: 串联电阻的阻抗轨迹

串联电容，电阻不变，电抗变小，则阻抗的轨迹应当沿着等电阻圆向下。以 $25 + j25$ 的阻抗串联电容 $-j50$ 为例，阻抗轨迹如图 12 所示。

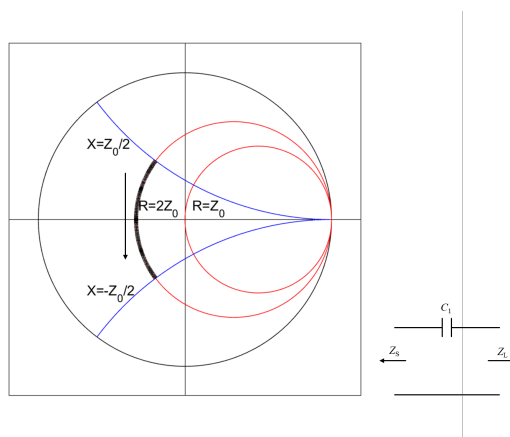


图 12: 串联电容的阻抗轨迹

同理，串联电感，电阻不变，电抗变大，则阻抗轨迹沿着等电阻圆向上。如图 13 所示。

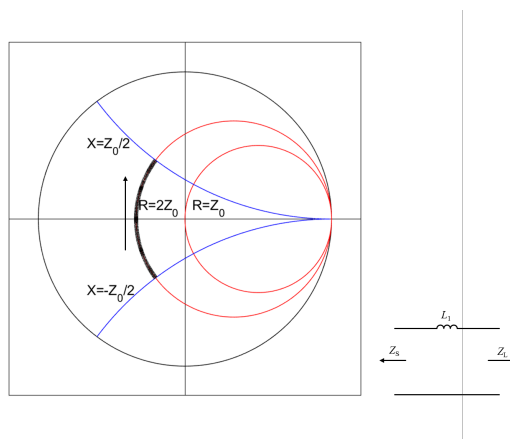


图 13: 串联电感的阻抗轨迹

并联电阻，电纳不变，电导变大，则阻抗的轨迹应当沿着等电纳弧向左。以 $50//j100$ 并联电阻 50 为例，阻抗轨迹如图 14 所示。

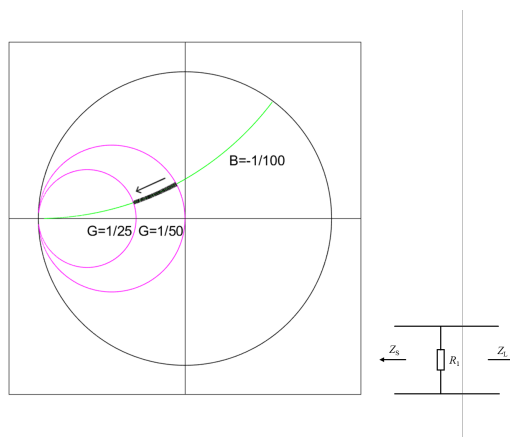


图 14: 并联电阻的阻抗轨迹

并联电容，电导不变，电纳变大，则阻抗轨迹应当沿着等电导圆向下。以 $50//j100$ 并联电容 $j100$ 为例，阻抗轨迹如图 15 所示。

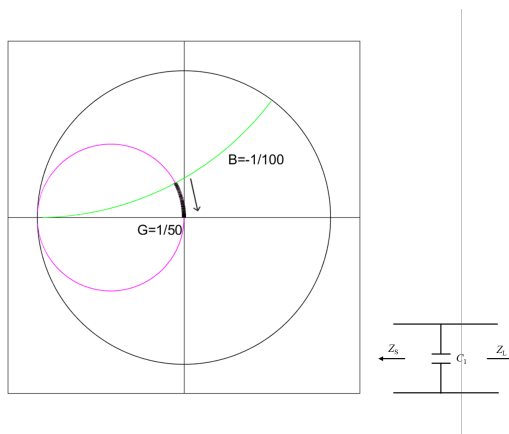


图 15: 并联电容的阻抗轨迹

同理，并联电感，电导不变，电纳变小，阻抗轨迹应当沿着等电导圆向上。如图 16 所示。

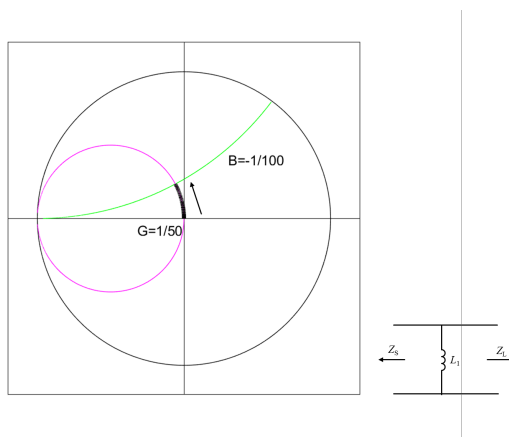


图 16: 并联电感的阻抗轨迹

4.2 变压器

对于非理想的变压器，我们可以利用互感的去耦等效进行变换，将互感变成自感的串并联，并将三个电感代入史密斯圆图进行计算。如图 17 所示，当互感的同名端相连，我们可以将其等效为两个自感，外加一个连接至地的等效电感；当非同名端相连，等效电感则是负的。

而对于理想变压器，可以进一步简化为阻抗的等比例放大缩小

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2$$

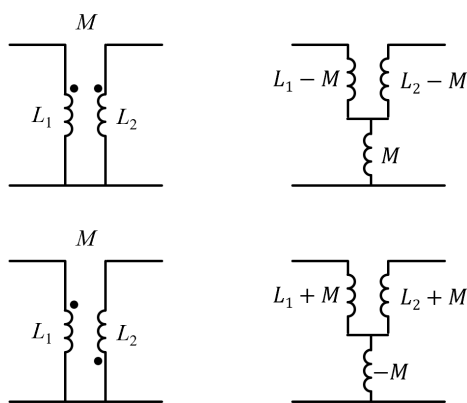


图 17: 电感的去耦等效

4.3 传输线

4.3.1 串并联终端开路/短路的传输线

将传输线的末端开路或短路，并将传输线看成一个二端元件串并联至电路中，如图 18 所示。

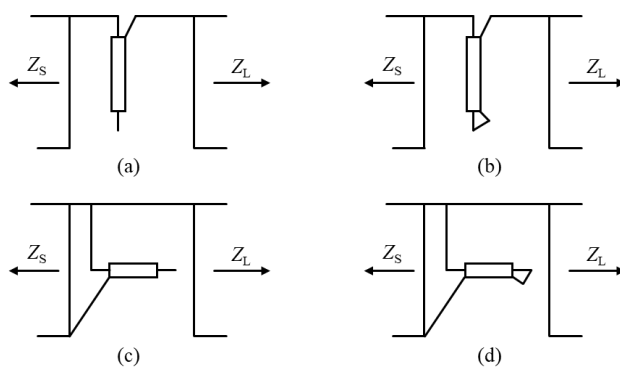


图 18: 传输线末端开路/短路，首端看成二端元件的连接

前文提到，末端短路的传输线等效为电感，末端开路的传输线等效为电容，那么这种传输线串并联进电路内，阻抗轨迹和电容电感是一致的。

4.3.2 级联传输线

在电源和负载之间连接一根传输线，可称之为级联。如图 19 所示

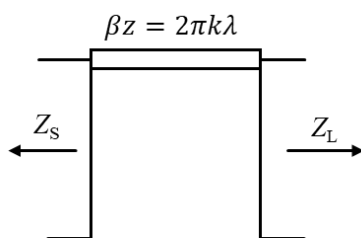


图 19: 级联传输线

由于传输线反射系数

$$\Gamma(z) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2j\beta z} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-j4k\pi}$$

的模长是定值，因此传输线的轨迹在史密斯圆图上的轨迹在等反射系数模/等驻波比圆上。上述公式为从负载向电源看去的，即从电源向负载传播信号后信号的相位会滞后，即上述公式指数项的符号是负的，因此，在负载上串联传输线，从负载看过去，史密斯圆图上的轨迹是沿着等反射系数模圆顺时针旋转的。例如

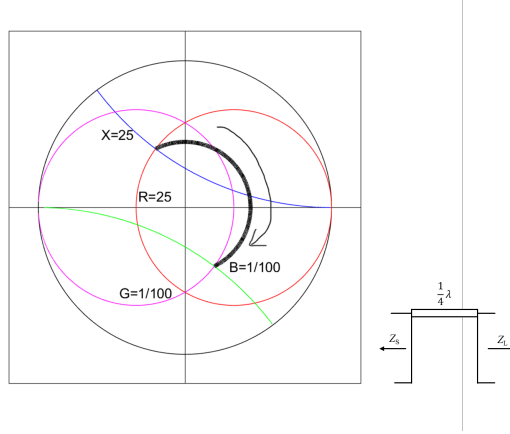


图 20: 传输线接入的阻抗轨迹曲线

如图 20 所示，在 $Z = 25 + j25$ 的负载上接一根四分之一波长 $k = \frac{1}{4}$ ，即 $\beta z = \lambda/4$ 传输线后，阻抗沿着等反射系数模圆顺时针旋转了 180° ，变成了 $Y = 1/100 - j/100$ ，亦即 $Z = 50 + j50$ ，也就是原负载的对偶点。

由此我们也能推出传输线的几个特性：

- 四分之一波长传输线可以把输入阻抗变换为传输线特性阻抗的对偶点，即

$$Z \times Z' = Z_0^2$$

- 二分之一波长传输线可以无视传输线阻抗，输入阻抗等于变换后的输出阻抗；
- 当输入阻抗与传输线特性阻抗相等（匹配）时，传输线长度不影响输入阻抗。

5 用史密斯圆图做阻抗匹配

5.1 Gamma 型网络

当电源阻抗 Z_S 小于负载阻抗 Z_L 时，通常可以采用图 21 所示的 Gamma 型网络进行阻抗匹配。

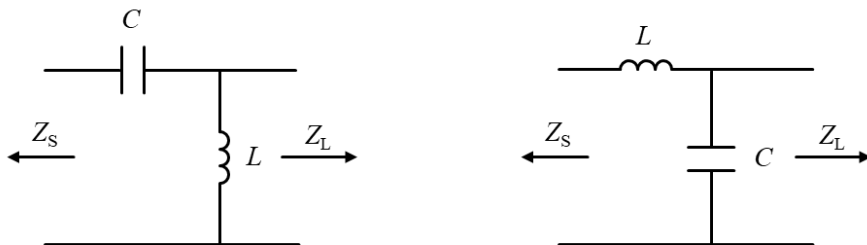


图 21: Gamma 匹配网络

以 $Z_S = 25\Omega$, $Z_L = 50\Omega$ 为例，采用先串联电容、再并联电感的方式进行阻抗匹配，阻抗的轨迹应当是先沿着等电阻圆向下，再沿着等电导圆向上，如图 22 所示。

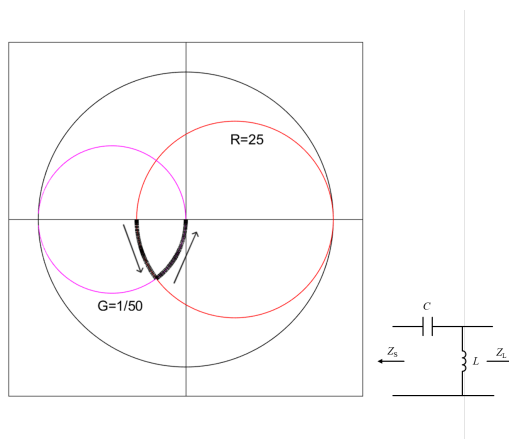


图 22: 一例 Gamma 匹配的阻抗轨迹

若采用先串联电感、再并联电容的方式进行阻抗匹配，阻抗的轨迹应当是先沿着等电阻圆向上，再沿着等电导圆向下，如图 23 所示。

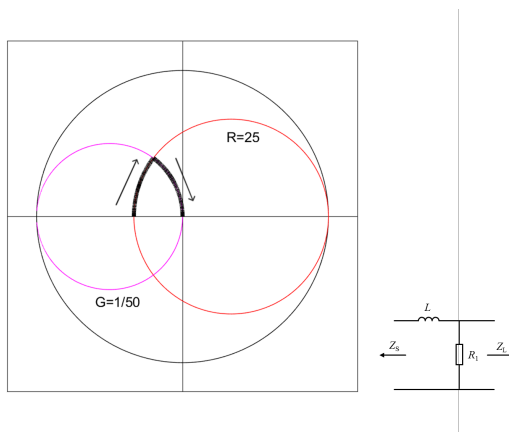


图 23: 另一例 Gamma 匹配的阻抗轨迹

同理，当电源阻抗 Z_S 大于负载阻抗 Z_L 时，匹配网络的连接顺序需要倒过来，即先并联电感再串联电容，抑或是先并联电容再串联电感。其轨迹则是先沿着等电导圆向上/向下，再沿着等电阻圆向下/向上。

5.2 Π 型与 T 型网络

上文的 Gamma 型网络能够实现阻抗匹配。然而在实操过程中，电容相对来说制造成本低，元件精度高，且制造可调电容也相对方便；而电感元件精度显著低于电容，误差普遍较大，而且实现可调，尤其是连续可调非常麻烦，因此想实现上述的 Gamma 型网络比较困难。

阻抗匹配还有一种较为常用的拓扑： Π 型拓扑，其基本形制为先并联、再串联、最后再并联。如图 24，以并电容、串电感、并电容的拓扑为例

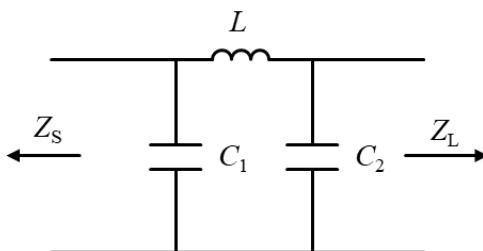


图 24: 一例 Π 型拓扑

我们利用此电路将 25Ω 的负载匹配到 50Ω 的电源上，工作频率为 10MHz ，固定 L 为 470nH ，调节 C_1 和 C_2 。我们发现，当 $C_1 = 951\text{pF}$ 、 $C_2 = 749\text{pF}$ 时，阻抗很接近 50Ω ，匹配成功。这个电路的阻抗轨迹如图 25 所示。

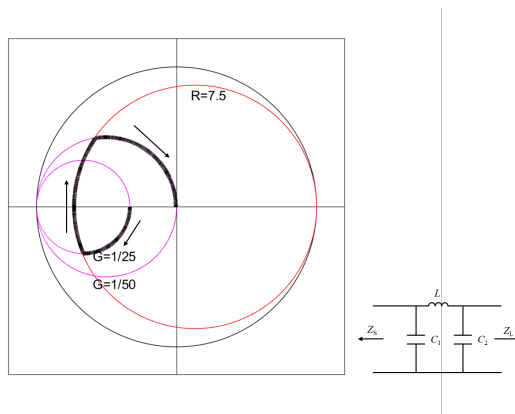


图 25: 一例 Π 型拓扑的阻抗轨迹

Π 型拓扑以外，还有一种 T 型拓扑。顾名思义，应当是先串联、再并联、最后串联。如图 26，以串电容、并电感、串电容为例

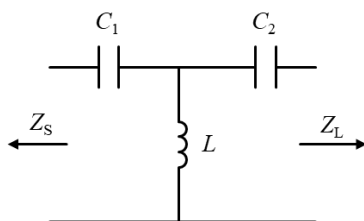


图 26: 一例 T 型拓扑

我们依旧利用此电路将 25Ω 的负载匹配到 50Ω 的电源上，工作频率为 10MHz ，固定 L 为 630nH ，调节 C_1 和 C_2 。我们发现，当 $C_1 = 584\text{pF}$ 、 $C_2 = 1104\text{pF}$ 时，阻抗很接近 50Ω ，匹配成功。这个电路的阻抗轨迹如图 27 所示。

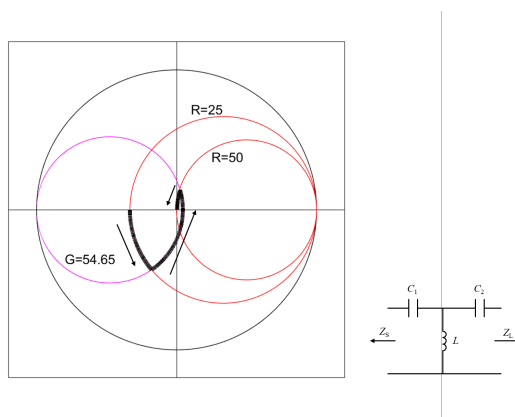


图 27: 一例 T 型拓扑的阻抗轨迹

此外，实际应用中还有其他若干种形式的网络，这里就不展开讲了，有兴趣的读者可以试着用史密斯圆图分析一下。

5.3 匹配网络的频率响应

通过代入不同的频率 f 改变电容和电感的电抗，即可在史密斯圆图上看到不同频率下的网络阻抗特性。例如，上文的 Π 型网络在 3MHz 至 30MHz 下的阻抗轨迹如图 28 所示。

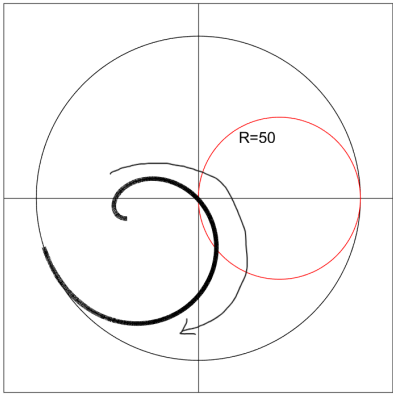


图 28: 上文的 Π 型网络在 3MHz 至 30MHz 下的阻抗轨迹

使用设计工具设计一个 12 阶的带通滤波器，其拓扑如图 29 所示。

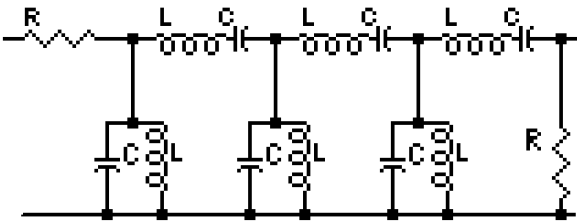


图 29: 一例 12 阶带通滤波器

如图 30 所示，这个网络的通带很窄。

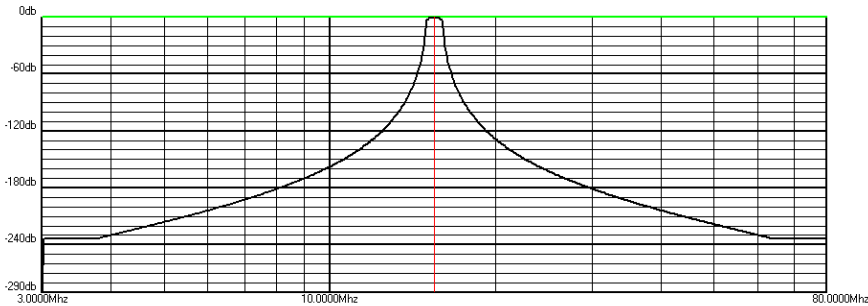


图 30: 一例 12 阶带通滤波器的幅频特性

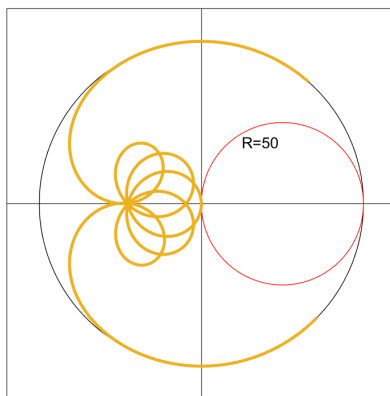


图 31: 一例 12 阶带通滤波器的阻抗轨迹

相应地，通带附近的阻抗轨迹会在 50 欧姆附近绕很多圈，如图 31 所示。根据不同频率下阻抗的分布，我们可以大致估算这个网络的频率响应特性。

6 SimNEC

SimNEC 是一款显示网络史密斯圆图的软件，可以通过拖拽网络环节，调节元件参数，实时观察史密斯圆图的变化，并进行计算阻抗计算与阻抗变换网络的设计。感兴趣的读者可以下载使用。

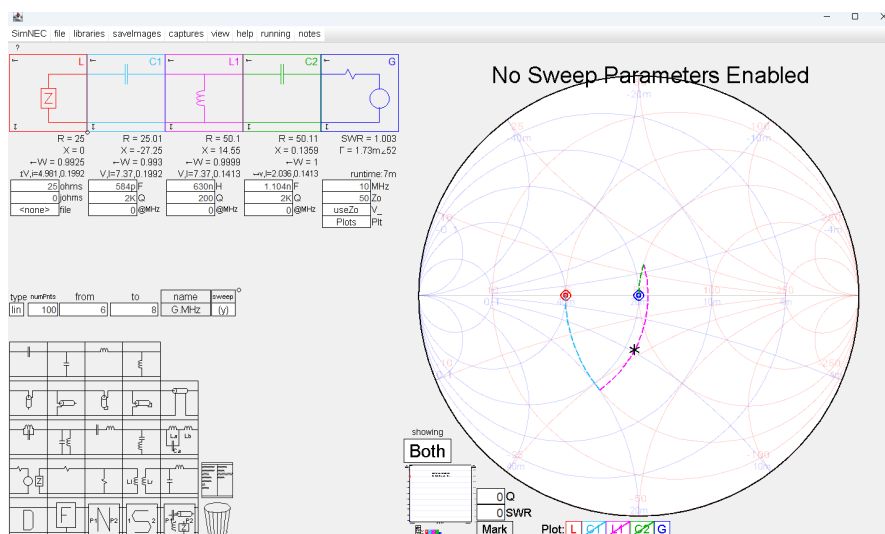


图 32: SimNEC 软件截图