第四章 随机变量的数字特征

4.1 随机变量的数学期望和方差

4.1.1 数学期望

> 1. 离散型随机变量的数学期望
>
>   设随机变量X的概率分布为
>
> $$P\{X=x_k\}=p_k,\ \ k=1,2,\cdots \tag{1}$$
>
>   如果级数$\sum_{k=1}^{+\infty}x_kp_k$绝对收敛，则称此级数为随机变量$X$的数学期望或均值，记作$E(X)$.
>
> 2. 连续型随机变量的数学期望
>
>   设随机变量X的概率密度为$f(x)$，如果积分$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$绝对收敛，则称此积分为随机变量$X$的数学期望与均值，记作$E(X)$，即$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

4.1.2 数学期望的性质

1. 设C是常数，则有$E(C)=C$
2. 设X是随机变量，C是常数，则有$E(CX)=CE(X)$
3. 设X和Y是任意两个随机变量，则有$E(X\pm Y)=EX\pm EY$
4. 设随机变量X和Y相互独立，则有$E(XY)=E(X)E(Y)$

4.1.3 随机变量X的函数$Y=g(X)$的数学期望

1. 设随机变量X的概率分布为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\ \ k=1,2,\cdots \tag{2}$$

如果级数$\sum_{k=1}^{+\infty}g(x_k)p_k$绝对收敛，则随机变量$Y=g(X)$ 的数学期望为

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{+\infty}g(x_k)p_k \tag{3}$$

2. 设随机变量X的概率密度为$f(x)$，如果积分$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)$绝对收敛，则随机变量$Y=g(X)$的数学期望为

$$EY=E[g(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx \tag{4}$$

4.1.4 随机变量(X,Y)的函数$Z=g(X,Y)$的数学期望

1. 设随机变量(X,Y)的概率分布为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\ \ i,j=1,2,\cdots \tag{5}$$

如果级数$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$绝对收敛，则随机变量$Z=g(X,Y)$的数学期望为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}g(x_i,y_j)p_{ij} \tag{6}$$

2. 设随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,如果积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$绝对收敛，则随机变量$Z=g(x,y)$的数学期望为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy \tag{7}$$

4.1.5 方差

> 设X是随机变量，如果数学期望$E\{[X-E(X)]^2\}$存在，则称之为X的方差，记作$D(X)$.

称$\sqrt{D(X)}$为随机变量X的标准差或均方差，记作$\sigma(X)$.

4.1.6 方差计算公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 \tag{8}$$

4.1.7 方差的性质

1. 设C是常数，则$D(C)=0$，反之，从$D(X)=0$中不能得出X为常数的结论
2. 设X是随机变量，a和b是常数，则有$D(aX+b)=a^2D(X)$
3. 设随机变量X和Y相互独立，则有$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

4.1.8 常用随机变量的数学期望和方差

分布	E(X)	D(X)
0-1分布	p	$p(1-p)$
二项分布$X\sim B(n,p)$	np	$np(1-p)$
泊松分布$X\sim P(\lambda)$	λ	λ
几何分布$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
均匀分布$X\sim U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布$X\sim E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布$X\sim N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2

4.2 矩、协方差和相关系数

4.2.1 矩

> 1. 设X是随机变量，如果
>
> $$E(X^k),\quad k=1,2,\cdots \tag{9}$$
>
> 存在，则称之为X的k阶原点矩。

2. 设X是随机变量，如果

$$E\{[X-E(X)]^k\},\ \ k=1,2,\cdots \tag{10}$$

存在，则称之为X的k阶中心矩。

3. 设X和Y是两个随机变量，如果

$$E(X^kY^l),\ \ k,l=1,2,\cdots \tag{11}$$

存在，则称之为X和Y的$k+l$阶混合矩。

4. 设X和Y是两个随机变量，如果

$$E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\},\ \ k,l=1,2,\cdots \tag{12}$$

4.2.2 协方差

> 对于随机变量X和Y，如果$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$存在，则称之为X和Y的协方差，记作$cov(X,Y)$

4.2.3 相关系数

> 对于随机变量X和Y，如果$D(X)D(Y)\neq 0$，则称$\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$为$X$和$Y$的相关系数，记作$\rho_{XY}$.如果$D(X)D(Y)=0$,则$\rho_{XY}=0$

4.2.4 不相关

> 如果随机变量X和Y的相关系数$\rho_{XY}=0$，则称X和Y不相关。

4.2.5 协方差的公式和性质

1. $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
2. $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2cov(X,Y)$
3. 性质
   1. $cov(X,Y)=cov(Y,X)$
   2. $cov(aX,bY)=abcov(X,Y)$,其中a,b为常数
   3. $cov(X_1+X_2,Y)=cov(X_1,Y)+cov(X_2,Y)$

4.2.6 相关系数性质

1. $|\rho_{XY}|\leq 1$
2. $|\rho_{XY}|=1$的充分必要条件是存在不全为零的常数a和b，使得

$$P\{Y=aX+b\}=1 \tag{13}$$

4.2.7 独立与不相关

1. 随机变量X和Y相互独立，则必不相关。不相关，不一定独立。
2. 对二维正态随机变量(X,Y),X和Y相互独立的充要条件是$\rho=0$
3. 对二维正态随机变量(X,Y),X和Y相互独立与X和Y不相关是等价的。