

特殊関数

—Hermite, Laguerre, Legendre, Bessel—

はじめに

本稿は物理学で頻繁に現れる Hermite 多項式、Laguerre(陪) 多項式、Legendre(陪) 多項式、(変形, 球)Bessel 関数についての基礎公式とその証明を与えたものです。これらは「特殊関数」と呼ばれ、実用上では少なくとも以下のすべての項目に習熟する必要があります。

- 母関数
- Rodrigues の公式
- 一般項
- 漸化式
- 微分方程式
- 直交性

ところが、現行の教科書、参考書ではこれらの項目および各公式の間の相互関係について断片的な記述がなされているものや証明が与えられていないものがほとんどであり、なかなか公式間の関係や全体像をつかむことができず、雑多な公式の数々に学習者が尻込みしてしまう現状にあります。

そこでこれら特殊関数に関する必要最低限度の公式だけを選び、それぞれの公式がどの公式からどのようにして導かれるものであるかについてを冗長にならない程度にできるだけ省略することなく記すことにしてみました。公式を暗記して使うことは本質的ではないのであまり求められることはありませんが、各項目間の論理的な道筋を実際に計算してたどることはそれぞれの特殊関数に慣れ親しむことにたいへん役に立ちます。また各導出過程では大学初年度水準の数学をふんだんに用いるため、その復習をする上でも大いに価値があると思います。

本稿の構成

第 1 章から第 4 章までは特殊関数の性質とその証明をひたすら書いています。本稿の大部分は、各関数ごとに先に使用頻度の高い公式をすべて示しておき、その後それらの公式を導くような形式を取っています。そのため、本稿は教科書というよりは証明付き公式集と呼んだほうがよりその特徴を表していると思います。このような形式を採用した理由は、各公式ごとに証明を付す形式にするとレファレンスとして利用しにくくなると感じたからです。ただし、はじめの公式集にまとめて入れておくことが難しいと思われたいくつかの項目 (Legendre 多項式の多重極展開など) は別の節を新たに設けてそこで紹介することにしました。

第 5 章では第 4 章までに学んだ特殊関数がどのように応用されているのかについての具体例を、問題形式でいくつか紹介しています。実際の問題をいくつか解いてみることで特殊関数にさらに親しむことができると思います。

想定する読者

本稿においては次のような人を読者として想定しています。

- 特殊関数を勉強したことはないが、特殊関数に興味がある人。
- 特殊関数を勉強したことはあるが、体系的に理解しきれていなかったりどこか釈然としない箇所を抱えている人。
- 専門分野を勉強する上で特殊関数が必要となり、そのレファレンスとして利用したい人。

ただし、次に示すような人は読者として想定しておりません。

- 特殊関数そのものや純粋数学を専門としており、数学的に厳密な理論を追究する人。
- 後述する「何が載っていないか」に示す項目を勉強したい人。
- レポートや論文を執筆しており、その中で引用する文献を求めている人。

本稿は特殊関数をあくまで道具として利用する立場で書いています。そのため、いくつかの説明では数学的に厳密ではない箇所が点在していると思われます。また、いうまでもなく本稿は由緒ある学術書とは程遠く、ただの一大学生によるメ

モ書きに過ぎないので、学生レポートや論文の中に引用する文献としては不適切に思います。本稿が被引用文献として利用される自信はまったくないのですが、それでも読者の中に本稿に対して引用に近いことをされたいという方がもしいらっしゃるのであれば、後述する「参考書」で挙げた本をいくつか引っ張り出してそれを載せておけば少なくとも形にはなると思います (^;)。

それぞれの項目について

特殊関数で掌握すべき項目の概観をいくつか説明しておきましょう。

母関数

ある数列 $\{a_n\}$ について、次の式により定義される関数を**母関数**と呼びます。

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

すなわち、数列をある種の級数の展開係数にしたときの収束先となる関数が母関数です。このようなものを考えると数列についてのさまざまな考察が可能となるため、強力な道具として重宝されます*1。

母関数は関数列 $\{f_n(x)\}$ に対しても定義することができます。この際、母関数は t と x の2変数関数となります。たとえば、

$$g(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n$$

などと定義されます。場合によっては $n!$ を取っ払って

$$g(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} f_n(x)$$

などと定義されることもあります。本稿では整数次の特殊関数を扱うときは母関数を定義として採用しています。これからさまざまな公式が導かれるさまを眺めてみると、母関数がいかに強力であるかが理解できると思います。

Rodrigues の公式

Rodrigues の公式とは n 次の特殊関数を、ある関数の n 階微分で表現した公式です。一番有名なものは Legendre 多項式についての次の公式でしょう。

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

Rodrigues の公式は小さい n に対する関数の具体的な表現を求めやすいことや、初等的な関数で表現した場合の大まかな形が理解しやすいなどの利点があります。しかし n が大きくなると何度も微分を行わねばならず、あまり実用に向かなくなります。

一般項

一般項とは特殊関数の次数を与えると、その具体的な級数展開式を得ることができる公式です。一般項は整数次に限らず、一般次数の特殊関数についても考えることができます。たとえば一般次数の Bessel 関数の一般項は次のように与えられます。

$$J_\nu(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(\nu + i + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i}$$

数列の問題では一般項を求めることが主題となる場合が多かったと思いますが、ここで示したように特殊関数では多くの場合一般項が複雑になります。そのため、関数の具体形を得る際に利用することはほとんどありません。それでも一般項を掌握すべき理由は、特殊関数の $x \sim 0$ における振る舞いを理解しやすい形になっているからです。たとえば Bessel 関数の場合、 $x \sim 0$ においては上の式で $i = 1$ 以降の項を無視することで、次のように ν 次関数として振舞うであろうことが容易に分かります。

$$J_\nu(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad (x \sim 0)$$

*1 たとえば、結城浩『数学ガール』(SB Creative) にはフィボナッチ数列の一般項を母関数で導く手法が紹介されています。

漸化式

数列の場合と同様に、特殊関数についても漸化式を考えることができます。本稿で扱う特殊関数の漸化式はすべて隣接する3項の間の漸化式になっているので、上で挙げた Rodrigues の公式や一般項により最初の2項を求めておくと、残りの項はすべて帰納的に導くことができます。Rodrigues の公式や一般項と比べて少ない計算量で大きな次数に対する特殊関数の具体形を得ることが出来るので、漸化式は実際の数値計算で最もよく用いられます。

本文中では漸化式のほかに微分漸化式と呼ばれるものを書いています。これは一般的に使われている用語ではなく、論理の道筋が明確になるように公式集にまとめて書くため、その便宜をはかってその名前を付しています。本文で行いますが、本稿では「漸化式」は母関数 $g(t, x)$ を t で微分することで得られる式、「微分漸化式」は x で微分することで直ちに得られる式、という意味で用いています。

公式集ではさらに昇降演算子を記しています。 n 次の関数 $f_n(x)$ から $n-1$ 次の関数 $f_{n-1}(x)$ を得る演算子は下降演算子、逆に $n+1$ 次の関数 $f_{n+1}(x)$ を得る演算子は上昇演算子と呼ばれ、ふたつを総称して昇降演算子と呼ばれます。昇降演算子は2項間の漸化式となっていますが、そのかわりに微分作業を伴うという特色があります。また、昇降演算子を導入することで次の微分方程式が自然に導かれます。

微分方程式

実際の物理学や工学などの現場では微分方程式を解く問題に帰着することが多く、その解に関心が寄せられます。そのため普通の文脈では解くべき微分方程式を級数解法や Frobenius の方法などを用いて解くことになります。しかし本稿では多くの特殊関数の入門書がそうであるように、母関数によって特殊関数を定義すると、その特殊関数が満たすべき方程式はこうですねという論理で微分方程式を導きます。実際の問題では、「現れた微分方程式はこの特殊関数の微分方程式と同じ形をしている」と見たとき、方程式の解はその特殊関数になるとしてよいことになります。微分方程式は昇降演算子を1回ずつ用いることで得ることができます。

直交性

関数列 $\{f_n(x)\}$ に属するふたつの関数 $f_m(x), f_n(x)$ が区間 $[\alpha, \beta]$ において直交するとは、 c_n を n により定まる定数として

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_m(x)f_n(x)dx = c_n\delta_{mn}$$

が成立することをいうのでした*2。関数列が直交性を持つとき、任意の関数はその関数列により級数展開できます*3。最も有名な例は三角関数や複素指数関数により展開する Fourier 級数です。

本稿で扱う特殊関数もすべて直交性を持っています*4。そのためあらゆる関数を特殊関数により展開することが可能となります。また、直交性の公式に現れる定数 c_n は量子力学において規格化された波動関数*5 を求める際に必要になります。

何が載っていないか

以下の項目は、筆者の時間と気力と能力の関係でまだ本稿に記しきれていません。要望があったり私が必要性を感じてきたときに加筆しようと思っています。

- 積分表示

後述の一般次数の特殊関数を導入したり、漸近形を証明する際に重要な役割を占める公式です。

- 一般次数の特殊関数

Bessel 関数を除いて、本稿では多くの物理系で重要視される整数次の特殊関数しか述べられていません。正確に問

*2 この定積分は区間 $[\alpha, \beta]$ における関数 $f_m(x), f_n(x)$ の内積と呼ばれます。

*3 正確には直交する関数列が完全性を持っていることも示さなければなりません。

*4 特殊関数によっては次のように直交性の公式に関数 $w(x)$ が余計についているものがあります。

$$\int_{\alpha}^{\beta} w(x)f_m(x)f_n(x)dx = c_n\delta_{mn}$$

$w(x)$ は重み関数と呼ばれます。このような性質を持つ場合も、関数に直交性があると解釈します。

*5 定義域において自身との内積が1となるように定めた波動関数のこと。量子力学における確率解釈からの要請です。

題を理解するには、前述の積分表示により一般次数の特殊関数を導入して議論する必要があります。

- 漸近形の証明

漸近形とは特殊関数の無限遠における振る舞いを表す公式です。 $x \sim 0$ における振る舞いは一般項から理解できませんが、漸近形は前述の積分表示に対して鞍点法と呼ばれる手法を用いて証明することになります。

- 微分方程式の級数解法

本来はこれもやるべきです。

- 第 2 種の特殊関数

本稿で扱う特殊関数の微分方程式はすべて 2 階なので、2 つの線形独立解をもつはずですが、しかし Bessel の微分方程式を除き、本稿で扱う特殊関数の微分方程式の解について、片方（第 2 種～関数などと呼ばれる）は考えている領域で発散するなど、物理的に不適切なことが知られています。このことを理解するためには微分方程式の級数解法を行うか、先述の積分表示や後述する超幾何関数表示を用いて第 2 種の特殊関数を導入して議論しなければなりません。

- ロンスキアン

微分方程式の解の線形独立性を調べる際に必要となる概念です。

- 超幾何関数表示

特殊関数を統一的に理解するとき重要な表示です。超幾何関数と呼ばれるものを用いると、一般次数の場合や第 2 種を含めて、本稿で扱う特殊関数がすべて級数で表現できることを明確に示すことができます。

- 変形球 Bessel 関数

表 1 偏微分方程式の解の r 依存性として現れる関数

	円筒座標 (r, θ, z)	球座標 (r, θ, φ)
波動方程式	Bessel 関数	球 Bessel 関数
拡散方程式	変形 Bessel 関数	変形球 Bessel 関数

第 4 章で扱う Bessel 関数は、円対称、あるいは球対称な系の物理を考える際にしばしば現れる特殊関数です。具体的には波動方程式*6 と拡散方程式*7 を円筒座標 (r, θ, z) あるいは球座標 (r, θ, φ) で解く場合、解の r 依存性として現れる関数は表 1 のようになります。

本文中で述べるように、変形 Bessel 関数は純虚数変数についての Bessel 関数、球 Bessel 関数は Bessel 関数の特殊な場合という関係があるので、これらに対する公式は Bessel 関数に対する公式から直ちに導くことができます。同様に変形球 Bessel 関数も純虚数変数についての球 Bessel 関数、あるいは変形 Bessel 関数の特殊な場合という関係にあるので、その公式も直ちに得られるわけです。しかし、多くの教科書では変形球 Bessel 関数が書かれていないこと、その代わりに球 Bessel 関数の引数を純虚数とした表記がなされることなどの観点から、本稿にこの関数を載せないことにしました。

- その他（参考）と付した公式の証明

参考書

本稿を執筆する際に参考にした教科書等を以下にあげておきます。読んでいてよく分からない箇所があったり、さらに深く学びたいときに手に取ってみてみるとよいかもしれません。

1. 小野寺嘉孝『物理のための応用数学』（裳華房）
2. 小野寺嘉孝『基礎演習シリーズ 物理のための応用数学』（裳華房）
特殊関数の公式やその証明についてここまで略さず簡潔にまとめられた教科書や演習書は他にないと思います。本稿の証明の多くはこれら 2 冊を参照しています。
3. 後藤憲一 他『詳解 物理応用 数学演習』（共立）
ご存知、共立の演習書です。物理で必要な数学の知識がほぼすべてまとまっている数少ない本の 1 つと思います。

*6 ここでは一般的に知られる波動方程式 $(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \psi = 0$ と Helmholtz 方程式 $(\Delta + k^2) \psi = 0$ を総称して波動方程式と呼んでいます。

*7 拡散方程式: $(\Delta - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t}) \psi = 0$

しかし特殊関数については1つの章にまとめられておらず、Laguerre 陪多項式の定義も章によって変わっていたりするのでまだまだ問題はああると思いますが、持っているとお心強いです。

4. アルフケン, ウェーバー『基礎物理数学 vol.2 関数論と微分方程式』(講談社)
5. アルフケン, ウェーバー『基礎物理数学 vol.3 特殊関数』(講談社)
物理数学の定番といわれるアルフケン。かなり分かりやすく具体例も豊富なためこれを修得しておくとお特殊関数で困ることはほとんど無くなると思います。ただ、訳書には章末問題の解答が付せられていないので注意。
6. 馬場敬之『スバラシク実力がつくと評判の偏微分方程式 キャンパス・ゼミ 改訂 2』(マセマ)
偏微分方程式を道具として用いる立場の本として具体的で分かりやすい説明がなされたものはこれしかないと思います。
7. 篠崎寿夫, 若林敏雄, 木村正雄『工学者のための偏微分方程式とグリーン関数』(現代工学社)
基本的な偏微分方程式の解法がひとつとおまとめられている本。特殊関数についても簡潔に触れられています。
8. 砂川重信『理論電磁気学』(紀伊国屋書店)
電磁気学の標準的な教科書。説明が丁寧で、電磁気学に現れる特殊関数についても学ぶことができます。
9. 岡崎誠, 藤原毅夫『演習 量子力学 [新訂版]』(サイエンス社)
サイエンス社の黄色い本のシリーズの中で最も出来が良いといわれる演習書。量子力学の重要な問題がよくまとめられており、軽くめくだけで量子力学の全体像をつかむことができると思います。
10. 森口繁一, 宇田川久, 一松信『岩波 数学公式 III 特殊関数』(岩波書店)
有名な数学公式集。公式集なので証明は載ってないですが、知識を整理したりレファレンスとして利用したりするのに優れています。

インターネット上の有用な情報源としては次を挙げておきます。

11. "Scientific Doggie 数理の楽しみ" <<http://www.wannyan.net/scidog/>>
しばわんころさんによるまとめノートが掲載されているサイト。おそらくインターネット上で閲覧できる特殊関数について日本語で書かれた資料の中で最も詳しいと思います。二重和の取りかえ方の説明などは大変参考になりました。
12. "特殊関数とその応用について" <<http://www.sci.hyogo-u.ac.jp/math/master/h11/kunimasa.pdf>>
兵庫教育大学の学生による卒業論文と思われる資料。本稿に含まれる Legendre 関数や Bessel 関数などについてまとめられています。
13. "倭算数理研究所" <<https://wasan.hatenablog.com/>>
倭マンさんのブログ。特殊関数の記事では岩波数学公式の証明がいくつか書かれています。
14. "特殊関数 グラフィックスライブラリー" <<http://math-functions-1.watson.jp>>
Souichiro Ikebe さんによる、特殊関数のグラフが数多く掲載されているサイト。次数によって関数のグラフがどのように変化するのかについても人目で分かるようになっています。
15. "SymPy 1.3 documentation" <<https://docs.sympy.org/latest/index.html>>
本稿のグラフは SymPy を用いて描かれています。その公式レファレンスサイトです。
16. "Python Kugelflächenfunktionen spherical harmonics"
<http://www.magben.de/?h1=mathematik_fuer_ingenieure_mit_python&h2=kugelflaechenfunktionen>
球面調和関数や軌道の可視化の際にここを参照しました。

はじめにのわりに

本稿は専門家でもなんでもない大学生のメモ書きということもあり、不適切な記述や誤りなどがあると思われる。読者の皆さんから本稿の中の誤りのご指摘やご意見等をいただければうれしく思います。

特殊関数はそれ自体の理論はもちろんのこと、実際の物理や工学などへの応用のされ方も非常に興味深い物理数学の一分野です。本稿により読者が特殊関数の学習を少しでも楽にできたのであれば、筆者としてこれ以上の幸福はありません。

目次

はじめに		iii
第 1 章	Hermite 多項式	1
1.1	Hermite 多項式	1
第 2 章	Laguerre 多項式	7
2.1	Laguerre 多項式	7
2.2	Laguerre 陪多項式	12
第 3 章	Legendre 関数	18
3.1	Legendre 多項式	18
3.1.1	Legendre 多項式	18
3.1.2	多重極展開	24
3.2	Legendre 陪関数	25
3.2.1	Legendre 陪関数	25
3.2.2	$P_n^m(\cos \theta)$ についての公式	31
3.3	球面調和関数	33
3.3.1	球面調和関数	33
3.3.2	量子力学への応用	37
第 4 章	Bessel 関数	40
4.1	Bessel 関数	40
4.1.1	整数次の Bessel 関数 (第 1 種 Bessel 関数)	40
4.1.2	一般次数の Bessel 関数 (第 1 種 Bessel 関数)	45
4.1.3	Neumann 関数 (第 2 種 Bessel 関数)	47
4.1.4	Hankel 関数 (第 3 種 Bessel 関数)	51
4.1.5	円柱関数まとめ	51
4.1.6	漸近形 (参考)	52
4.1.7	Fourier-Bessel 展開	53
4.2	変形 Bessel 関数	56
4.2.1	第 1 種変形 Bessel 関数	56
4.2.2	第 2 種変形 Bessel 関数	60
4.2.3	変形 Bessel 関数まとめ	65
4.2.4	漸近形 (参考)	65
4.3	球 Bessel 関数	65
4.3.1	球 Bessel 関数	65
4.3.2	球 Bessel 関数の直交性, Fourier-球 Bessel 展開	71
4.4	Bessel 関数を使って解ける微分方程式	71
第 5 章	応用例	73
5.1	Hermite 多項式	73
5.2	Legendre 関数	73
5.3	Laguerre 多項式	75
5.4	Bessel 関数	76

第 1 章

Hermite 多項式

Hermite 多項式は量子力学で調和振動子の問題を扱う際に解として現れる関数である (問題 [1-1])。本稿で扱う特殊関数のうち最もなじみやすい関数でもあり、その公式の導出手順は他の特殊関数に適用することが可能である。そこでまず本章の Hermite 多項式を題材に特殊関数の取り扱い方に慣れていきたい。ここで技術を身につけておくると他の特殊関数も自然と理解しやすくなる。

1.1 Hermite 多項式

公式集

■母関数

$$g(t, x) = e^{-t^2 + 2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \quad (1.1.1)$$

■偶奇性

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \quad (1.1.2)$$

■ $x = 0$ での特殊値

$$\begin{cases} H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} & (1.1.3a) \\ H_{2n+1}(0) = 0 & (1.1.3b) \end{cases}$$

■一般項

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \frac{n!}{i!(n-2i)!} (2x)^{n-2i} \quad (1.1.4)$$

■Rodrigues の公式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (1.1.5)$$

■漸化式

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (1.1.6)$$

■昇降演算子

$$\text{下降演算子} \quad \frac{d}{dx} H_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (1.1.7)$$

$$\text{上昇演算子} \quad \left(\frac{d}{dx} - 2x \right) H_n(x) = -H_{n+1}(x) \quad (1.1.8)$$

■微分方程式

$$\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0 \quad (1.1.9)$$

■自己随伴形

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \frac{d}{dx} H_n(x) \right) + 2ne^{-x^2} H_n(x) = 0 \quad (1.1.10)$$

表 1.1 Hermite 多項式 $H_n(x)$

$H_0(x)$	$= 1$
$H_1(x)$	$= 2x$
$H_2(x)$	$= 4x^2 - 2$
$H_3(x)$	$= 8x^3 - 12x$
$H_4(x)$	$= 16x^4 - 48x^2 + 12$
$H_5(x)$	$= 32x^5 - 160x^3 + 120x$
$H_6(x)$	$= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$

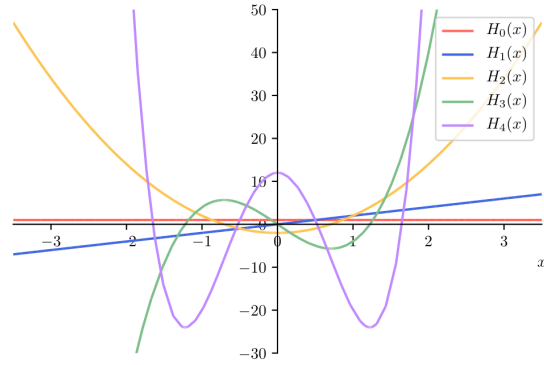


図 1.1 Hermite 多項式 $H_n(x)$

■直交性

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn} \tag{1.1.11}$$

証明

■母関数 \implies 偶奇性 母関数 (1.1.1) の中辺から $g(-t, -x) = g(t, x)$ が成立することが分かるので、(1.1.1) の右辺から

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} H_n(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

t^n ($n \geq 0$) の係数を比較して、

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

□

■母関数 \implies $x = 0$ での特殊値 母関数 (1.1.1) に $x = 0$ を代入すると、

$$g(t, 0) = e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(0) \tag{1.1.12}$$

ここで、(1.1.12) の中辺を Taylor 展開すると、

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} \tag{1.1.13}$$

一方 (1.1.12) の右辺は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} H_{2n}(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} H_{2n+1}(0) \tag{1.1.14}$$

と分解できる。(1.1.13) と (1.1.14) より t^n ($n \geq 0$) の係数を比較して、次が得られる。

$$\begin{cases} H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \\ H_{2n+1}(0) = 0 \end{cases}$$

□

■母関数 \implies Rodrigues の公式 母関数 (1.1.1) の中辺を、 x を固定して $t = 0$ の周りで Taylor 展開すると、

$$g(t, x) = e^{x^2} e^{-(t-x)^2} = e^{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[\frac{d^n}{dt^n} e^{-(t-x)^2} \right]_{t=0}$$

ここで $t - x = u$ とおくと、 $dt = du$ であることから

$$\begin{aligned} g(t, x) &= e^{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[\frac{d^n}{du^n} e^{-u^2} \right]_{u=-x} \\ &= e^{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{d(-x)^n} e^{-(-x)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \end{aligned}$$

となる*1。これと (1.1.1) の右辺を比較することで次を得る。

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

□

■Rodrigues 公式 \Rightarrow 母関数 Cauchy の積分公式*2 を用いて Rodrigues の公式 (1.1.5) を積分形式に書き換えると、

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-\xi^2}}{(\xi - x)^{n+1}} d\xi$$

ここで積分経路 C は $\xi = x$ の周りを正の方向に回るとする。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot (-1)^n e^{x^2} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-\xi^2}}{(\xi - x)^{n+1}} d\xi \\ &= e^{x^2} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-\xi^2}}{\xi - x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-t}{\xi - x} \right)^n d\xi \end{aligned}$$

級数が収束するために $|t|$ が十分小さいものとする、等比級数の和の公式から

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) &= e^{x^2} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-\xi^2}}{\xi - x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{t}{\xi - x}} d\xi \\ &= e^{x^2} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-\xi^2}}{\xi - (x - t)} d\xi \end{aligned}$$

被積分関数の極 $\xi = x - t$ が、 t が十分小さく、 C の内部にあるとすると、留数定理より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{x^2} \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \left[e^{-\xi^2} \right]_{\xi=x-t} = e^{-t^2+2xt}$$

□

■母関数 \Rightarrow 一般項 母関数 (1.1.1) の中辺を $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i$ を用いて展開すると、

$$\begin{aligned} g(t, x) &= e^{-t^2+2xt} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (-t^2 + 2xt)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-t^2)^i (2xt)^{m-i} \quad (\because \text{二項定理}) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^m t^{m+i} (-1)^i \frac{1}{i!(m-i)!} (2x)^{m-i} \end{aligned} \tag{1.1.18}$$

*1 ここで用いたテクニックはやや技巧的だが大幅に計算量を減らすことができている。覚えておくことを推奨する。

*2 Cauchy の積分公式: 正の向きを持つ区分的に滑らかな Jordan 曲線 C 上の点と内部で正則な関数 $f(z)$ について、点 x が C の内部にあるとき

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi \tag{1.1.16}$$

と書けるという定理である。本文中ではこの両辺を x について n 回微分した、以下の n 階導関数を積分で表す公式を用いている。

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - x)^{n+1}} d\xi \tag{1.1.17}$$

ここで $m+i$ を新たに n と置き換えて m, i についての二重和を n, i についての二重和に取りかえる。 m について 0 から ∞ まで、 i について 0 から m まで加えていくとき、二重和は図 1.2 の黒丸で表した格子点すべてについて実行される。 $n = m+i$ であるとき、 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対応する全格子点は図 1.2 で示した各矢印上の点として捉えることができる。したがって図 1.2 より、(1.1.18) における二重和は、 n について 0 から ∞ まで、 i について 0 から $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ までの二重和に取りかえられることになる。ただし $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ とは $\frac{n}{2}$ を超えない最大の整数を意味する。よって、

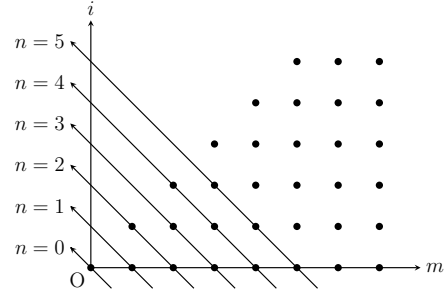


図 1.2 二重和の取りかえ方

$$g(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} t^n (-1)^i \frac{1}{i!(n-2i)!} (2x)^{n-2i}$$

これと母関数 (1.1.1) の右辺を比較することで次を得る。

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \frac{n!}{i!(n-2i)!} (2x)^{n-2i}$$

□

■母関数 \implies 漸化式 母関数 (1.1.1) の左、右辺を t で偏微分して

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} H_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_{n+1}(x) \tag{1.1.19}$$

一方、母関数 (1.1.1) の左、中辺を t について偏微分することで

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} = (-2t + 2x)g(t, x)$$

が成立することが分かる。これに母関数 (1.1.1) の右辺および (1.1.19) を代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_{n+1}(x) &= (-2t + 2x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_{n+1}(x) &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} H_n(x) + 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \end{aligned}$$

ここで $\frac{1}{(\text{負の整数})!} = 0^{*3}$ と約束して t の指数をそろえると

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_{n+1}(x) &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} H_{n-1}(x) + 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \\ \therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x)] &= 0 \end{aligned}$$

t^n ($n \geq 0$) の係数を比較することで次を得る:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

□

*3 これは正でない整数 n について $\Gamma(n) (= (n-1)!)$ が発散することからの類推である。

■母関数 \implies 下降演算子 母関数 (1.1.1) の両辺を x で偏微分すると

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial x} = 2t g(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H'_n(x)$$

$g(t, x)$ に母関数 (1.1.1) の右辺を代入すると、

$$2t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H'_n(x) \quad \therefore 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} H_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H'_n(x)$$

$\frac{1}{(\text{負の整数})!} = 0$ と約束して t の指数をそろえると

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} H_{n-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H'_n(x) \quad \therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [H'_n(x) - 2nH_{n-1}(x)] = 0$$

t^n ($n \geq 0$) の係数を比較することで次を得る:

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

□

■漸化式, 下降演算子 \implies 上昇演算子 漸化式 (1.1.6) と下降演算子 (1.1.7) から $2nH_{n-1}(x)$ を消去することで直ちに

$$\left(\frac{d}{dx} - 2x \right) H_n(x) = -H_{n+1}(x)$$

□

■昇降演算子 \implies 微分方程式 下降演算子の式 (1.1.7) で $n \rightarrow n+1$ とした式

$$\frac{d}{dx} H_{n+1}(x) = 2(n+1)H_n(x) \quad (1.1.20)$$

を用いるために、上昇演算子の式 (1.1.8) の両辺に $\frac{d}{dx}$ を左から作用させると、

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} - 2x \right) H_n(x) = -\frac{d}{dx} H_{n+1}(x)$$

演算子 f について $\left(\frac{d}{dx} \right) f = f \frac{d}{dx} + \frac{df}{dx}$ であることなどに注意して左辺を展開し、右辺に (1.1.20) を代入して整理すると

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} - 2 \right) H_n(x) = -2(n+1)H_n(x) \quad \therefore \frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0$$

また、この方程式は次のようにも変形できる。

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \frac{d}{dx} H_n(x) \right) + 2ne^{-x^2} H_n(x) = 0$$

□

■母関数 \implies 直交性 母関数 (1.1.1) の右辺を用いて、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g(s, x) g(t, x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m}{m!} H_m(x) \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \right) dx \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^m t^n}{m! n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

一方、母関数 (1.1.1) の中辺を用いると

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g(s, x) g(t, x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-s^2+2xs} e^{-t^2+2xt} dx \\
 &= e^{-s^2-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2(s+t)x} dx \\
 &= e^{-s^2-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\{x-(s+t)\}^2} e^{(s+t)^2} dx \\
 &= e^{2st} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\{x-(s+t)\}^2} dx \\
 &= e^{2st} \sqrt{\pi} && \text{(ガウス積分を用いた)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n s^n t^n}{n!} \sqrt{\pi} && \text{(Taylor 展開)} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^m t^n}{m! n!} \cdot 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn} && (1.1.22)
 \end{aligned}$$

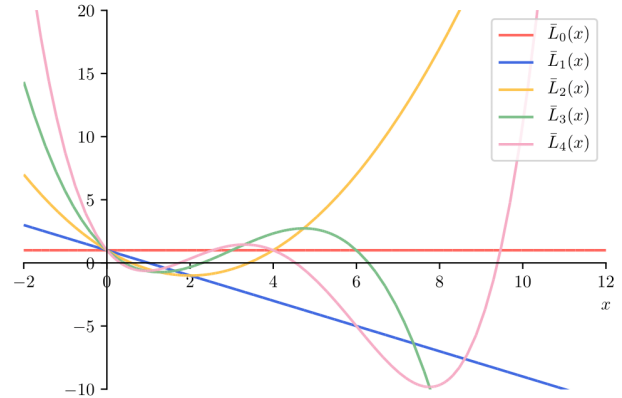
(1.1.21), (1.1.22) を比較することで次を得る。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$$

□

第 2 章

Laguerre 多項式



2.1 Laguerre 多項式

Laguerre 多項式自体は物理への応用に直接用いられることは少なく、むしろ次節の Laguerre 陪多項式の導入のために議論されると考えたほうが良い。

公式集

■母関数

$$g(t, x) = \frac{1}{1-t} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n(x) \quad (2.1.1)$$

■ $x = 0$ での特殊値

$$L_n(0) = n! \quad (2.1.2)$$

■Rodrigues の公式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad (2.1.3)$$

■一般項

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{(n!)^2}{(i!)^2 (n-i)!} x^i \quad (2.1.4)$$

■漸化式

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \quad (2.1.5)$$

■微分漸化式

$$L'_n(x) - nL'_{n-1}(x) = -nL_{n-1}(x) \quad (2.1.6)$$

■下降演算子

$$\left(x \frac{d}{dx} - n\right) L_n(x) = -n^2 L_{n-1}(x) \quad (2.1.7)$$

■上昇演算子

$$\left(x \frac{d}{dx} + n + 1 - x\right) L_n(x) = L_{n+1}(x) \quad (2.1.8)$$

■微分方程式

$$x \frac{d^2 L_n(x)}{dx^2} + (1-x) \frac{dL_n(x)}{dx} + nL_n(x) = 0 \quad (2.1.9)$$

■自己随伴形

$$\frac{d}{dx} \left[x e^{-x} \frac{d}{dx} L_n(x) \right] + n e^{-x} L_n(x) = 0 \quad (2.1.10)$$

表 2.1 Laguerre 多項式 $L_n(x)$

$L_0(x) = 1$
$L_1(x) = -x + 1$
$L_2(x) = x^2 - 4x + 2$
$L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$
$L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$
$L_5(x) = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$

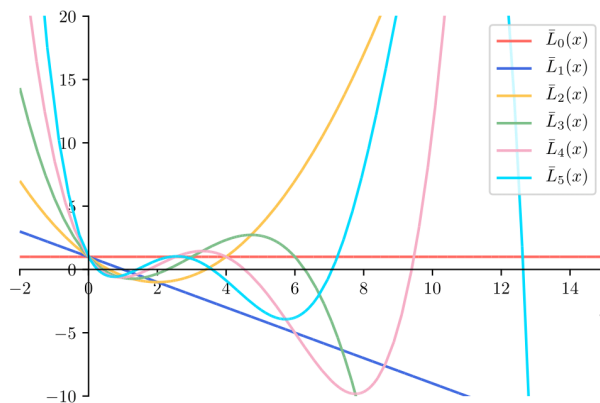


図 2.1 スケール化された Laguerre 多項式 $\bar{L}_n(x) = L_n(x)/n!$

■正規直交性

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = (n!)^2 \delta_{mn} \tag{2.1.11}$$

証明

■母関数 $\implies x = 0$ での特殊値 母関数 (2.1.1) の両辺に $x = 0$ を代入すると

$$g(t, 0) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} L_n(0) \tag{2.1.12}$$

ここで (2.1.12) の中辺は等比級数の和の公式から $\sum_{n=0}^\infty t^n$ であるから、(2.1.12) の右辺と t^n ($n \geq 0$) の係数を比較して、次が得られる。

$$L_n(0) = n!$$

□

■母関数 \implies 一般項 母関数の式 (2.1.1) の中辺を $\exp(x) = \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{i!} x^i$ を用いて展開すると、

$$g(t, x) = \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{1-t} \frac{1}{i!} \left(-\frac{xt}{1-t} \right)^i = \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \frac{x^i}{i!} \frac{t^i}{(1-t)^{i+1}}$$

公式*1 :

$$(1-t)^{-N} = \sum_{m=0}^\infty \frac{(N+m-1)!}{(N-1)!} \frac{t^m}{m!}$$

から

$$\begin{aligned} g(t, x) &= \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \frac{x^i}{i!} t^i \sum_{m=0}^\infty \frac{(m+i)!}{i!} \frac{t^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^\infty \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \frac{(m+i)!}{(i!)^2 m!} x^i t^{m+i} \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

*1 $f(t) = (1-t)^{-N}$ とおくと、 $f'(t) = N(1-t)^{-N-1}$, $f''(t) = N(N+1)(1-t)^{-N-2}$, ..., $f^{(m)}(t) = \frac{(N+m-1)!}{(N-1)!} (1-t)^{-N-m}$ であるので、 $t = 0$ の周りで Taylor 展開すると

$$f(t) = \frac{1}{(1-t)^N} = \sum_{m=0}^\infty f^{(m)}(0) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^\infty \frac{(N+m-1)!}{(N-1)!} \frac{1}{m!} t^m \tag{2.1.13}$$

なお、

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^n = \frac{n!}{(n-\alpha)!} x^{n-\alpha} \tag{2.1.14}$$

ここで $m+i$ を新たに n と置き換えて m, i についての二重和を n, i についての二重和に取りかえる。 m について 0 から ∞ まで、 i について 0 から ∞ まで加えていくとき、二重和は図 2.2 の黒丸で表した格子点すべてについて実行される。 $n = m+i$ であるとき、 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対応する全格子点は図 2.2 で示した各直線上の点として捉えることができる。したがって図 2.2 より、(2.1.15) における二重和は、 n について 0 から ∞ まで、 i について 0 から n までの二重和に取りかえられることになる。よって、

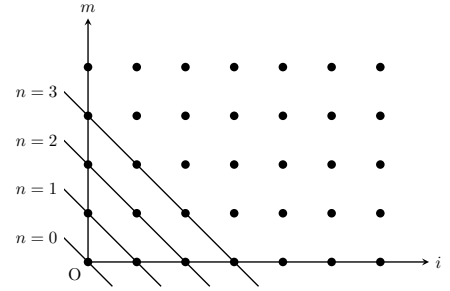


図 2.2 二重和の取りかえ方

$$g(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{(i!)^2(n-i)!} x^i t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \frac{t^n}{n!} (-1)^i \frac{(n!)^2}{(i!)^2(n-i)!} x^i t^n$$

母関数の右辺 (2.1.1) と比較して

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{(n!)^2}{(i!)^2(n-i)!} x^i$$

□

■Rodrigues の公式 \implies 母関数 Cauchy の積分公式 (1.1.17) を用いて Rodrigues の公式 (2.1.3) を積分形式に書き換えると、

$$L_n(x) = e^x \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\xi^n e^{-\xi}}{(\xi-x)^{n+1}} d\xi$$

積分経路 C は $\xi = x$ の周りを正の方向に回るとする。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot e^x \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\xi^n e^{-\xi}}{(\xi-x)^{n+1}} d\xi \\ &= e^x \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-\xi}}{\xi-x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi t}{\xi-x} \right)^n d\xi \end{aligned}$$

級数が収束するために $|t|$ が十分小さいものとする、等比級数の和の公式から

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n(x) &= e^x \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-\xi}}{\xi-x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi t}{\xi-x}} d\xi \\ &= \frac{e^x}{1-t} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-\xi}}{\xi - \frac{x}{1-t}} d\xi \end{aligned}$$

被積分関数の極 $\xi = \frac{x}{1-t}$ が、 t が十分小さく、 C の内部にあるとすると、留数定理より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n(x) = \frac{e^x}{1-t} \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i [e^{-\xi}]_{\xi=\frac{x}{1-t}} = \frac{1}{1-t} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)$$

□

■Rodrigues の公式 \implies 一般項 Rodrigues の公式 (2.1.3) を Leibniz の公式*2 で展開する。

$$\begin{aligned} L_n(x) &= e^x \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} x^n \right) \left(\frac{d^i}{dx^i} e^{-x} \right) \\ &= e^x \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{n!}{i!} x^i \cdot (-1)^i e^{-x} \quad ((2.1.14) \text{ を用いた}) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{(n!)^2}{(i!)^2(n-i)!} x^i \end{aligned}$$

□

*2 Leibniz の公式

$$\frac{d^n}{dx^n} (f(x)g(x)) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(n-i)}(x)g^{(i)}(x) \tag{2.1.16}$$

■母関数 \implies 漸化式 母関数 (2.1.1) の左, 右辺を t で偏微分して

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} L_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_{n+1}(x) \quad (2.1.17)$$

一方, 母関数 (2.1.1) の左, 中辺の対数をとると,

$$\log g(t, x) + \log(1-t) + \frac{xt}{1-t} = 0$$

両辺を t で偏微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(t, x)} \frac{\partial g(t, x)}{\partial t} - \frac{1}{1-t} + \frac{x}{(1-t)^2} &= 0 \\ \therefore (1-t)^2 \frac{\partial g(t, x)}{\partial t} + (x-1+t)g(t, x) &= 0 \end{aligned}$$

これに母関数の式 (2.1.1) の右辺および (2.1.17) を代入すると,

$$\begin{aligned} (1-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_{n+1}(x) + (x-1+t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n(x) &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_{n+1}(x) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} L_{n+1}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+2}}{n!} L_{n+1}(x) &+ (x-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} L_n(x) = 0 \end{aligned}$$

ここで $\frac{1}{(\text{負の整数})!} = 0$ と約束して t の指数をそろえると

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_{n+1}(x) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} L_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!} L_{n-1}(x) &+ (x-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} L_{n-1}(x) = 0 \\ \therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x)] &= 0 \end{aligned}$$

t^n ($n \geq 0$) の係数を比較することで次を得る:

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$$

□

■母関数 \implies 微分漸化式 母関数の式 (2.1.1) の両辺を x で偏微分すると

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial x} = -\frac{t}{1-t} g(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L'_n(x)$$

$g(t, x)$ に母関数の式 (2.1.1) の右辺を代入すると,

$$\begin{aligned} -\frac{t}{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L'_n(x) \\ \therefore -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} L_n(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L'_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} L'_n(x) \end{aligned}$$

$\frac{1}{(\text{負の整数})!} = 0$ と約束して t の指数をそろえると

$$\begin{aligned} -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} L_{n-1}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L'_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} L'_{n-1}(x) \\ \therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [L'_n(x) - nL'_{n-1}(x) + nL_{n-1}(x)] &= 0 \end{aligned}$$

t^n ($n \geq 0$) の係数を比較することで次を得る。

$$L'_n(x) - nL'_{n-1}(x) = -nL_{n-1}(x)$$

□

■漸化式, 微分漸化式 \implies 下降演算子 下降演算子の式は, 漸化式 (2.1.5) と微分漸化式 (2.1.6) を組み合わせること
で示すことができる。まず漸化式 (2.1.5) の両辺を x で微分した

$$L'_{n+1}(x) = -L_n(x) + (2n+1-x)L'_n(x) - n^2L'_{n-1}(x)$$

と (2.1.6) から $L'_{n-1}(x)$ を消去すると,

$$L'_{n+1}(x) - (n+1-x)L'_n(x) + L_n(x) + n^2L_{n-1}(x) = 0 \quad (2.1.18)$$

次に微分漸化式 (2.1.6) で $n \rightarrow n+1$ と書き換えると

$$L'_{n+1}(x) - (n+1)L'_n(x) = -(n+1)L_n(x) \quad (2.1.19)$$

得られた (2.1.18), (2.1.19) 式から $L'_{n+1}(x)$ を消去すると

$$xL'_n(x) - nL_n(x) = -n^2L_{n-1}(x) \quad \therefore \left(x \frac{d}{dx} - n\right) L_n(x) = -n^2L_{n-1}(x)$$

□

■漸化式, 下降演算子 \implies 上昇演算子 漸化式 (2.1.5) と下降演算子 (2.1.7) から $-n^2L_{n-1}(x)$ を消去することで直
ちに

$$\left(x \frac{d}{dx} + n + 1 - x\right) L_n(x) = L_{n+1}(x)$$

□

■昇降演算子 \implies 微分方程式 下降演算子の式 (2.1.7) で $n \rightarrow n+1$ とした式

$$\left[x \frac{d}{dx} - (n+1)\right] L_{n+1}(x) = -(n+1)^2L_n(x) \quad (2.1.20)$$

を用いるために, 上昇演算子の式 (2.1.8) の両辺に $\left[x \frac{d}{dx} - (n+1)\right]$ を左から作用させると,

$$\left[x \frac{d}{dx} - (n+1)\right] \left(x \frac{d}{dx} + n + 1 - x\right) L_n(x) = \left(x \frac{d}{dx} - (n+1)\right) L_{n+1}(x)$$

演算子 f について $\left(\frac{d}{dx}\right) f = \frac{df}{dx} + f \frac{d}{dx}$ であることなどに注意して左辺を展開し, 右辺に (2.1.20) を代入して整理すると

$$\left[x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x(1-x) \frac{d}{dx} + nx\right] L_n(x) = 0 \quad \therefore x \frac{d^2 L_n(x)}{dx^2} + (1-x) \frac{dL_n(x)}{dx} + nL_n(x) = 0$$

また, この方程式は次のようにも変形できる。

$$\frac{d}{dx} \left[x e^{-x} \frac{d}{dx} L_n(x) \right] + n e^{-x} L_n(x) = 0$$

□

■母関数 \implies 直交性 母関数 (2.1.1) の右辺から

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} g(s, x) g(t, x) dx &= \int_0^\infty e^{-x} \left(\sum_{m=0}^\infty \frac{s^m}{m!} L_m(x) \right) \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} L_n(x) \right) dx \\ &= \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{s^m t^n}{m! n!} \int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

一方、母関数 (2.1.1) の中辺から

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{-x} g(s, x) g(t, x) dx &= \int_0^\infty e^{-x} \frac{1}{1-s} \exp\left(-\frac{xs}{1-s}\right) \frac{1}{1-t} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) dx \\
 &= \frac{1}{(1-s)(1-t)} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1-st}{(1-s)(1-t)}x\right\} dx \\
 &= -\frac{1}{1-st} \left[\exp\left\{-\frac{1-st}{(1-s)(1-t)}x\right\} \right]_0^\infty \\
 &= \frac{1}{1-st} \\
 &= \sum_{n=0}^\infty s^n t^n \quad (\text{等比級数の和の公式より}) \\
 &= \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{s^m t^n}{m! n!} (n!)^2 \delta_{mn} \tag{2.1.22}
 \end{aligned}$$

(2.1.21), (2.1.22) を比較することで次を得る。

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = (n!)^2 \delta_{mn}$$

2.2 Laguerre 陪多項式

Laguerre 陪多項式は水素原子の Schrödinger 方程式を球座標 (r, θ, φ) で解く際に、解の r 依存性として現れる多項式である (問題 [3-1])。Laguerre 陪多項式 $L_n^k(x)$ の定義は実に多くの流儀がある。さらに当然であるが流儀によってそれが満たす公式の形も変わってしまう。ここでは議論の術がなくなってしまうので、本稿では Laguerre 多項式 $L_n(x)$ の k 階導関数として Laguerre 陪多項式 $L_n^k(x)$ を定義することにする*3。どれかひとつの流儀を理解しておけば、他の流儀における公式は容易に類推することができる。なお、Laguerre 陪多項式についての公式で $k=0$ とすると Laguerre 多項式についての公式と一致することを強調しておく。

公式集

■ 定義

$$L_n^k(x) \equiv \frac{d^k}{dx^k} L_n(x) \tag{2.2.1}$$

■ Rodrigues の公式

$$L_n^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \tag{2.2.2}$$

■ Rodrigues の公式 II

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} e^x x^{-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n e^{-x}) \tag{2.2.3}$$

■ 一般項

$$L_n^k(x) = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{k+i} \frac{(n!)^2}{i!(i+k)!(n-k-i)!} x^i \tag{2.2.4}$$

■ 母関数

$$g(t, x) = \frac{(-1)^k}{(1-t)^{k+1}} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=k}^\infty \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) \tag{2.2.5}$$

■ $x=0$ における特殊値

$$L_n^k(0) = (-1)^k \frac{(n!)^2}{(n-k)! k!} \tag{2.2.6}$$

*3 J.J.Sakurai『現代の量子力学 (上, 下)』などの量子力学の教科書や多くの量子化学の教科書ではこの流儀が採用されている。

表 2.2 Laguerre 陪多項式 $L_n^k(x)$

$L_1^1(x)$	$= -1$
$L_2^1(x)$	$= 2x - 2$
$L_2^2(x)$	$= 2$
$L_3^1(x)$	$= -3x^2 + 18x - 18$
$L_3^2(x)$	$= -6x + 18$
$L_3^3(x)$	$= -6$
$L_4^1(x)$	$= 4x^3 - 48x^2 + 144x - 96$
$L_4^2(x)$	$= 12x^2 - 96x + 144$
$L_4^3(x)$	$= 24x - 96$
$L_4^4(x)$	$= 24$

■漸化式

$$\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) L_{n+1}^k(x) + (x + k - 2n - 1)L_n^k(x) + n^2 L_{n-1}^k(x) = 0 \tag{2.2.7}$$

■微分漸化式

$$\frac{dL_n^k(x)}{dx} = n \left[\frac{dL_{n-1}^k(x)}{dx} - L_{n-1}^k(x) \right] \tag{2.2.8}$$

■下降演算子

$$\left(x \frac{d}{dx} - n + k\right) L_n^k(x) = -n^2 L_{n-1}^k(x) \tag{2.2.9}$$

■上昇演算子

$$\left(x \frac{d}{dx} - x + n + 1\right) L_n^k(x) = \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) L_{n+1}^k(x) \tag{2.2.10}$$

■微分方程式

$$x \frac{d^2 L_n^k(x)}{dx^2} + (k + 1 - x) \frac{dL_n^k(x)}{dx} + (n - k)L_n^k(x) = 0 \tag{2.2.11}$$

■自己随伴形

$$\frac{d}{dx} \left(x^{k+1} e^{-x} \frac{dL_n^k(x)}{dx} \right) + (n - k)x^k e^{-x} L_n^k(x) = 0 \tag{2.2.12}$$

■直交性

$$\int_0^\infty x^k e^{-x} L_m^k(x) L_n^k(x) dx = \frac{(n!)^3}{(n-k)!} \delta_{mn} \tag{2.2.13}$$

証明

■Rodrigues の公式 \implies 一般項 Rodrigues の公式 (2.2.2) は $L_n^k(x)$ の定義 (2.2.1) にそのまま $L_n(x)$ の Rodrigues の公式 (2.1.3) を代入したものである。したがって、定義 (2.2.1) にしたがって、 $L_n(x)$ の一般項 (2.1.4) の k 階導関数が (2.2.4) になることを確認すればよい。

$$\begin{aligned} L_n^k(x) &= \frac{d^k}{dx^k} L_n(x) \stackrel{(2.1.4)}{=} \frac{d^k}{dx^k} \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{(n!)^2}{(i!)^2 (n-i)!} x^i \\ &= \sum_{i=k}^n (-1)^i \frac{(n!)^2}{(i!)^2 (n-i)!} \cdot \frac{i!}{(i-k)!} x^{i-k} && ((2.1.4) \text{ を用いた}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{k+i} \frac{(n!)^2}{i!(i+k)!(n-k-i)!} x^i && (i \rightarrow k+i \text{ と変換した}) \end{aligned}$$

□

■Rodrigues の公式 II \implies 一般項^{*4} Rodrigues の公式 II (2.2.3) を Leibniz の公式 (2.1.16) により展開する。

$$\begin{aligned} L_n^k(x) &= (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} e^x x^{-k} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \left(\frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} x^n \right) \left(\frac{d^i}{dx^i} e^{-x} \right) \\ &= (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} e^x x^{-k} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{i!(n-k-i)!} \cdot \frac{n!}{(i+k)!} x^{i+k} \cdot (-1)^i e^{-x} \quad ((2.1.14) \text{ を用いた}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{k+i} \frac{(n!)^2}{i!(i+k)!(n-k-i)!} x^i \end{aligned}$$

□

■Rodrigues の公式 II \implies 母関数 Rodrigues の公式 II(2.2.3) から、

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} \cdot (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} e^x x^{-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n e^{-x}) \\ &= (-1)^k e^x x^{-k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n e^{-x}) \\ &= (-1)^k e^x x^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+k} e^{-x}) \end{aligned}$$

経路 C を、点 $\xi = x$ の周りを正の向きに回るものとする、Cauchy の積分公式 (1.1.17) より

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) &= (-1)^k e^x x^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\xi^{n+k} e^{-\xi}}{(\xi-x)^{n+1}} d\xi \\ &= (-1)^k e^x x^{-k} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\xi^k e^{-\xi}}{\xi-x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi t}{\xi-x} \right)^n d\xi \end{aligned}$$

級数が収束するために $|t|$ が十分小さいものとする、等比級数の和の公式から

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) &= (-1)^k e^x x^{-k} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\xi^k e^{-\xi}}{\xi-x} \cdot \frac{1}{1-\frac{\xi t}{\xi-x}} d\xi \\ &= (-1)^k e^x x^{-k} \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\xi^k e^{-\xi}}{\xi-\frac{x}{1-t}} d\xi \end{aligned}$$

被積分関数の極 $\xi = \frac{x}{1-t}$ が、 t が十分小さく、 C の内部にあるとすると、留数定理より

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) &= (-1)^k e^x x^{-k} \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \left[\xi^k e^{-\xi} \right]_{\xi=\frac{x}{1-t}} \\ &= \frac{(-1)^k}{(1-t)^{k+1}} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) \end{aligned}$$

□

■母関数 $\implies x=0$ における特殊値 母関数 (2.2.5) において $x=0$ を代入すると、

$$g(t, 0) = \frac{(-1)^k}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(0) \quad (2.2.14)$$

ここで、(2.2.14) の中辺は (2.1.13) を用いて

$$\frac{(-1)^k}{(1-t)^{k+1}} = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!k!} t^n = (-1)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} t^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} \cdot (-1)^k \frac{(n!)^2}{(n-k)!k!}$$

となる。したがって、(2.2.14) の右辺と比較して次を得る。

$$L_n^k(0) = (-1)^k \frac{(n!)^2}{(n-k)!k!}$$

^{*4} Rodrigues の公式と Rodrigues の公式 II が等価であることは、両者から導かれる一般項が一致することより認めることにする。

■母関数 \implies 漸化式 母関数 (2.2.5) の左, 右辺を t で偏微分して

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n-k}{n!} t^{n-k-1} L_n^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n-k+1}{(n+1)!} t^{n-k} L_{n+1}^k(x) \quad (2.2.15)$$

一方, 母関数 (2.2.5) の左, 中辺の対数をとると,

$$\log g(t, x) = -(k+1) \log(1-t) + k \log(-1) - \frac{xt}{1-t}$$

となる*5。両辺を t で偏微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(t, x)} \frac{\partial g(t, x)}{\partial t} &= \frac{k+1}{1-t} - \frac{x}{(1-t)^2} \\ \therefore (1-t)^2 \frac{\partial g(t, x)}{\partial t} &= \{(k+1-x) - (k+1)t\} g(t, x) \end{aligned}$$

これに母関数 (2.2.5) の右辺および (2.2.15) を代入すると,

$$\begin{aligned} (1-t)^2 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n-k+1}{(n+1)!} t^{n-k} L_{n+1}^k(x) &= \{(k+1-x) - (k+1)t\} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) \\ \therefore \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n-k+1}{(n+1)!} t^{n-k} L_{n+1}^k(x) - 2 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n-k+1}{(n+1)!} t^{n-k+1} L_{n+1}^k(x) &+ \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n-k+1}{(n+1)!} t^{n-k+2} L_{n+1}^k(x) \\ &= (k+1-x) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) - (k+1) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k+1}}{n!} L_n^k(x) \end{aligned}$$

$L_{k-1}^k(x) = 0$ を用いて t の指数をそろえると

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n-k+1}{(n+1)!} t^{n-k} L_{n+1}^k(x) - 2 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n-k}{n!} t^{n-k} L_n^k(x) &+ \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n-k-1}{(n-1)!} t^{n-k} L_{n-1}^k(x) \\ &= (k+1-x) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) - (k+1) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{(n-1)!} L_{n-1}^k(x) \\ \therefore \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{(n+1)!} \left[(n+1-k) L_{n+1}^k(x) + (n+1)(x+k-2n-1) L_n^k(x) \right. &+ \left. (n+1)n \cdot n L_{n-1}^k(x) \right] = 0 \end{aligned}$$

t^{n-k} ($n \geq k$) の係数を比較することで次を得る:

$$\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) L_{n+1}^k(x) + (x+k-2n-1) L_n^k(x) + n^2 L_{n-1}^k(x) = 0$$

□

■母関数 \implies 微分漸化式 母関数 (2.2.5) の両辺を x で偏微分すると

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial x} = -\frac{t}{1-t} g(t, x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} \frac{dL_n^k(x)}{dx}$$

$g(t, x)$ に母関数 (2.2.5) の右辺を代入すると,

$$\begin{aligned} -\frac{t}{1-t} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} \frac{dL_n^k(x)}{dx} \\ \therefore -\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k+1}}{n!} L_n^k(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} \frac{dL_n^k(x)}{dx} - \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k+1}}{n!} \frac{dL_n^k(x)}{dx} \end{aligned}$$

*5 ここで対数の真数が負になっている項 $\log(-1)$ が現れているが, これは計算を楽にするために形式的に書いていると考えればよい。それが疑問であれば, 複素関数として $\log(-1) = (2n+1)\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$) と解釈すればよい。いずれにせよ後に t で偏微分する時に消えるので憂う必要はない。

$L_{k-1}^k(x) = 0$ を用いて t の指数をそろえると

$$\begin{aligned} -\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{(n-1)!} L_{n-1}^k(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} \frac{dL_n^k(x)}{dx} - \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{(n-1)!} \frac{dL_{n-1}^k(x)}{dx} \\ \therefore \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} \left[\frac{dL_n^k(x)}{dx} - n \frac{dL_{n-1}^k(x)}{dx} + n L_{n-1}^k(x) \right] &= 0 \end{aligned}$$

t^{n-k} ($n \geq k$) の係数を比較することで次を得る。

$$\frac{dL_n^k(x)}{dx} = n \left[\frac{dL_{n-1}^k(x)}{dx} - L_{n-1}^k(x) \right] \quad (2.2.16)$$

□

■漸化式, 微分漸化式 \implies 下降演算子 下降演算子の式は, 漸化式 (2.2.7) と微分漸化式 (2.2.8) を組み合わせること
で示すことができる。まず漸化式 (2.2.7) の両辺を x で微分した

$$\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{dL_{n+1}^k(x)}{dx} + L_n^k(x) + (x+k-2n-1) \frac{dL_n^k(x)}{dx} + n^2 \frac{dL_{n-1}^k(x)}{dx} = 0$$

と (2.2.8) から $\frac{dL_{n-1}^k(x)}{dx}$ を消去すると,

$$\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{dL_{n+1}^k(x)}{dx} + L_n^k(x) + (x+k-n-1) \frac{dL_n^k(x)}{dx} + n^2 L_{n-1}^k(x) = 0 \quad (2.2.17)$$

次に (2.2.8) で $n \rightarrow n+1$ と書き換えると

$$\frac{dL_{n+1}^k(x)}{dx} = (n+1) \left[\frac{dL_n^k(x)}{dx} - L_n^k(x) \right] \quad (2.2.18)$$

得られた (2.2.17), (2.2.18) から $\frac{dL_{n+1}^k(x)}{dx}$ を消去すると,

$$\begin{aligned} (n+1-k) \left[\frac{dL_n^k(x)}{dx} - L_n^k(x) \right] + L_n^k(x) + (x+k-n-1) \frac{dL_n^k(x)}{dx} + n^2 L_{n-1}^k(x) &= 0 \\ \therefore \left(x \frac{d}{dx} - n + k \right) L_n^k(x) &= -n^2 L_{n-1}^k(x) \end{aligned}$$

□

■漸化式, 下降演算子 \implies 上昇演算子 漸化式 (2.2.7) と下降演算子 (2.2.9) から $-n^2 L_{n-1}^k(x)$ を消去することで直
ちに

$$\left(x \frac{d}{dx} - x + n + 1 \right) L_n^k(x) = \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) L_{n+1}^k(x)$$

□

■昇降演算子 \implies 微分方程式 下降演算子 (2.2.9) の両辺に左から $(x \frac{d}{dx} - x + n)$ を作用させると, 左辺は

$$\begin{aligned} &\left(x \frac{d}{dx} - x + n \right) \left(x \frac{d}{dx} - n + k \right) L_n^k(x) \\ &= \left[x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} - n + k \right) - x \left(x \frac{d}{dx} - n + k \right) + n \left(x \frac{d}{dx} - n + k \right) \right] L_n^k(x) \\ &= \left[x \frac{d}{dx} + x^2 \frac{d^2}{dx^2} + (-n+k)x \frac{d}{dx} + (-x+n)x \frac{d}{dx} + (x-n)(n-k) \right] L_n^k(x) \\ &= \left[x \frac{d^2}{dx^2} + (k+1-x)x \frac{d}{dx} + (n-k)x - n(n-k) \right] L_n^k(x) \end{aligned}$$

一方, 右辺は上昇演算子 (2.2.10) を用いて

$$-n^2 \left(x \frac{d}{dx} - x + n \right) L_{n-1}^k(x) = -n^2 \left(1 - \frac{k}{n} \right) L_n^k(x) = -n(n-k) L_n^k(x)$$

したがって,

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + (k+1-x)x \frac{d}{dx} + (n-k)x \right] L_n^k(x) = 0 \quad \therefore x \frac{d^2 L_n^k(x)}{dx^2} + (k+1-x) \frac{dL_n^k(x)}{dx} + (n-k)L_n^k(x) = 0$$

また、この方程式は次のようにも変形できる。

$$\frac{d}{dx} \left(x^{k+1} e^{-x} \frac{dL_n^k(x)}{dx} \right) + (n-k)x^k e^{-x} L_n^k(x) = 0$$

□

■母関数 ⇒ 直交性 母関数 (2.2.5) の右辺から

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^k e^{-x} g(s, x) g(t, x) dx \\ &= \int_0^\infty x^k e^{-x} \left(\sum_{m=k}^\infty \frac{s^{m-k}}{m!} L_m^k(x) \right) \sum_{n=k}^\infty \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) dx \\ &= \sum_{m=k}^\infty \sum_{n=k}^\infty \frac{s^{m-k} t^{n-k}}{m! n!} \int_0^\infty x^k e^{-x} L_m^k(x) L_n^k(x) dx \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

一方、母関数 (2.2.5) の中辺から

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^k e^{-x} g(s, x) g(t, x) dx \\ &= \int_0^\infty x^k e^{-x} \frac{(-1)^k}{(1-s)^{k+1}} \exp\left(-\frac{xs}{1-s}\right) \frac{(-1)^k}{(1-t)^{k+1}} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) dx \\ &= \frac{1}{[(1-s)(1-t)]^{k+1}} \int_0^\infty x^k \exp\left[-\frac{1-st}{(1-s)(1-t)}x\right] dx \end{aligned}$$

部分積分を k 回行くと、お釣りの項*6 はすべて消えるので

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^k e^{-x} g(s, x) g(t, x) dx \\ &= \frac{1}{(1-s)(1-t)} \cdot \frac{k!}{(1-st)^k} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1-st}{(1-s)(1-t)}x\right] dx \\ &= -\frac{k!}{(1-st)^{k+1}} \left[\exp\left\{-\frac{1-st}{(1-s)(1-t)}x\right\} \right]_0^\infty \\ &= \frac{k!}{(1-st)^{k+1}} \\ &= k! \sum_{n=0}^\infty \frac{(k+n)!}{k!} \frac{s^n t^n}{n!} \quad ((2.1.13) \text{ を用いた}) \\ &= \sum_{n=k}^\infty \frac{n!}{(n-k)!} s^{n-k} t^{n-k} \\ &= \sum_{m=k}^\infty \sum_{n=k}^\infty \frac{s^{n-k} t^{n-k}}{m! n!} \frac{(n!)^3}{(n-k)!} \delta_{mn} \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

(2.2.19) と (2.2.20) を比較して次を得る。

$$\int_0^\infty x^k e^{-x} L_m^k(x) L_n^k(x) dx = \frac{(n!)^3}{(n-k)!} \delta_{mn}$$

□

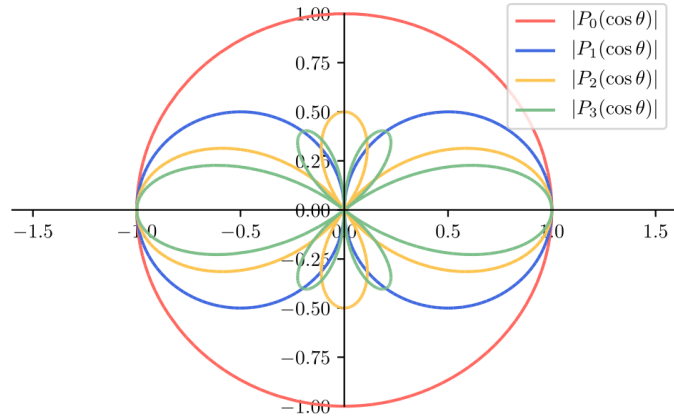
*6 ここで部分積分の公式

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

における $[uv]_a^b$ をお釣りの項と呼んでいる。今回の部分積分では x^k を微分する側としており、 $\alpha = 1, 2, \dots$ に対して $x^\alpha e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, $x^\alpha e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ であるゆえお釣りの項がすべて消える。

第3章

Legendre 関数



Legendre 関数は球対称な系の偏微分方程式を考える際に必ずといってよいほど解として現れる関数である。たとえば Laplace 方程式 $\Delta\psi = 0$ を球座標系 (r, θ, φ) で変数分離すると天頂角 θ 成分については

$$\left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} \right) + \left\{ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right\} \right] y = 0 \quad (3.0.1)$$

なる方程式が現れ、解は (第1種) Legendre 陪関数 $P_m^l(x)$ によって記述される。そして Legendre 陪関数が満たす各性質は Legendre 多項式 $P_n(x)$ の性質から導かれる。また Legendre 多項式 $P_n(x)$ は微分方程式の解として以外にもさまざまな応用例がある。多くの場合、整数次の Legendre 関数 $P_n(x)$, $P_n^l(x)$ のみが問題となるため、本稿においてはこれらの関数の性質を調べるにとどめ、一般次数の Legendre 関数 $P_\nu^\mu(x)$ や (3.0.1) の第二の解として現れる第2種 Legendre 関数 $Q_\nu^\mu(x)$ については扱わないことにする。

3.1 Legendre 多項式

3.1.1 Legendre 多項式

Legendre 多項式 $P_n(x)$ は区間 $[-1, 1]$ で定義される直交多項式である。これまでの特殊関数と同様、Legendre 多項式も母関数 (3.1.1) によって定義するのが便利である。最もよく知られた性質は Rodrigues の公式 (3.1.6) であろう。Legendre 多項式の漸化式は他の特殊関数と趣きが異なり、構造が多少複雑になっている。そのためもあってか $P_n(x)$ が満たす漸化式は数多く作ることができる。実際によく使われるのは (3.1.7) くらいであろうが、導出過程を簡明にするためあえて数多くの漸化式を載せてある。すべての漸化式を覚えねばならないと気を張る必要はない。微分方程式は (3.1.10) と (3.1.12) の微分から $P'_{n-1}(x)$ を消去することで導く教科書が多く、それに処理量も少なく済むのであるが、本稿ではこれまで通り昇降演算子を用いた導出手法を載せることにした。やや計算量が多くなってしまいが、確実に目標の式にたどり着けるといふ安心感はある。Legendre 多項式に関する公式の導出過程は少し巧妙な部分が多いので、注意深く式展開を追っていきたい。

公式集

■母関数 (定義)

$$g(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (|t| < 1) \quad (3.1.1)$$

■偶奇性

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \quad (3.1.2)$$

■ $x = 0$ での特殊値

$$\begin{cases} P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} & (3.1.3a) \\ P_{2n+1}(0) = 0 & (3.1.3b) \end{cases}$$

■ $x = \pm 1$ での特殊値

$$\begin{cases} P_n(1) = 1 & (3.1.4a) \\ P_n(-1) = (-1)^n & (3.1.4b) \end{cases}$$

■一般項

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i (2n-2i)!}{2^n i! (n-i)! (n-2i)!} x^{n-2i} \quad (3.1.5)$$

■Rodrigues の公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (3.1.6)$$

■漸化式 (3 項間)

$$(2n+1)xP_n(x) = nP_{n-1}(x) + (n+1)P_{n+1}(x) \quad (3.1.7)$$

■微分漸化式 (3 項間)

$$2xP'_n(x) + P_n(x) = P'_{n-1}(x) + P'_{n+1}(x) \quad (3.1.8)$$

■微分漸化式 (2 項間)

$$(n+1)P_n(x) + xP'_n(x) = P'_{n+1}(x) \quad (3.1.9)$$

$$nP_n(x) - xP'_n(x) = -P'_{n-1}(x) \quad (3.1.10)$$

■微分漸化式 (3 項間) II

$$(2n+1)P_n(x) = -P'_{n-1}(x) + P'_{n+1}(x) \quad (3.1.11)$$

■昇降演算子

$$\text{下降演算子} \quad \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} + nx \right] P_n(x) = nP_{n-1}(x) \quad (3.1.12)$$

$$\text{上昇演算子} \quad \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} - (n+1)x \right] P_n(x) = -(n+1)P_{n+1}(x) \quad (3.1.13)$$

■微分方程式

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (3.1.14)$$

■自己随伴形

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right] + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (3.1.15)$$

■直交性

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \quad (3.1.16)$$

証明

■母関数 \implies 偶奇性 母関数 (3.1.1) の中辺から $g(-t, -x) = g(t, x)$ が成立することが分かるので、(3.1.1) の右辺から

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x) (-t)^n \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

t^n ($n \geq 0$) の係数を比較して、

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

□

表 3.1 Legendre 多項式 $P_n(x)$

$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$

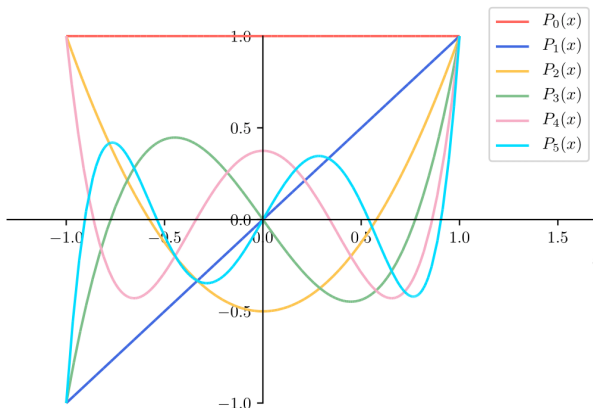


図 3.1 Legendre 多項式 $P_n(x)$

■母関数 $\implies x = 0$ での特殊値 母関数 (3.1.1) に $x = 0$ を代入すると、

$$g(t, 0) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)t^n \tag{3.1.17}$$

ここで (3.1.17) の中辺は $\frac{1}{\sqrt{1-t}}$ の展開公式 (3.1.18) *1 において t を $-t^2$ に置き換えることで

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n}$$

一方 (3.1.17) の右辺は

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(0)t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(0)t^{2n+1}$$

と分解できる。よって t^n ($n \geq 0$) の係数を比較して (3.1.3a), (3.1.3b) を得る。 □

■母関数 $\implies x = \pm 1$ での特殊値 母関数 (3.1.1) に $x = \pm 1$ を代入すると、

$$g(t, \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{1 \mp 2t + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\pm 1)t^n \tag{3.1.20}$$

中辺は等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{\sqrt{1 \mp 2t + t^2}} = \frac{1}{1 \mp t} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n t^n$$

となるので、右辺と t^n ($n \geq 0$) の係数を比較して (3.1.4a), (3.1.4b) を得る。 □

*1

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^n \quad (|t| < 1) \tag{3.1.18}$$

証明には二項展開を行えばよい。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-t}} &= (1-t)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-t)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^n \end{aligned}$$

ここで二重階乗についての以下の関係を用いている。

$$(2n)!! = 2^n n!, \quad (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \tag{3.1.19}$$

(3.1.18) は非常に重要であり、記憶に値する。

■母関数 ⇒ 一般項 母関数 (3.1.1) の中辺を公式 (3.1.18) を用いて展開すると、

$$g(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (2xt - t^2)}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} (2xt - t^2)^m$$

ここで二項定理により

$$(2xt - t^2)^m = t^m (2x - t)^m = t^m \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (2x)^{m-i} (-t)^i = \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i m!}{i!(m-i)!} (2x)^{m-i} t^{m+i}$$

であるから、

$$\begin{aligned} g(t, x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i m!}{i!(m-i)!} (2x)^{m-i} t^{m+i} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i (2m)!}{2^{m+i} i!(m-i)!} x^{m-i} t^{m+i} \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

ここで $m+i$ を新たに n と置き換えて m, i についての二重和を n, i についての二重和に取りかえる。 m について 0 から ∞ まで、 i について 0 から m まで加えていくとき、二重和は図 3.2 の黒丸で表した格子点すべてについて実行される。 $n = m+i$ であるとき、 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対応する全格子点は図 3.2 で示した各直線上の点として捉えることができる。したがって図 3.2 より、(3.1.21) における二重和は、 n について 0 から ∞ まで、 i について 0 から $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ までの二重和に取りかえられることになる。ただし $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ とは $\frac{n}{2}$ を超えない最大の整数を意味する。よって、

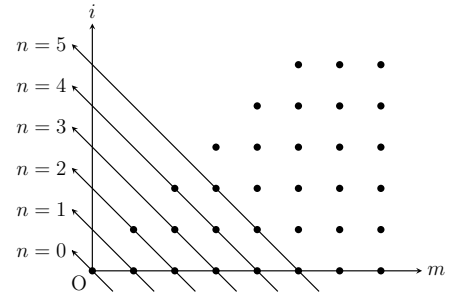


図 3.2 二重和の取りかえ方

$$g(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i (2n-2i)!}{2^n i!(n-i)!(n-2i)!} x^{n-2i} t^n$$

母関数 (3.1.1) の右辺と比較して

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i (2n-2i)!}{2^n i!(n-i)!(n-2i)!} x^{n-2i}$$

□

■一般項 ⇒ Rodrigues の公式 一般項 (3.1.5) に対して

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2i} = \frac{(2n-2i)!}{(n-2i)!} x^{n-2i}$$

であることを用いると、

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i}{2^n i!(n-i)!} \cdot \frac{(2n-2i)!}{(n-2i)!} x^{n-2i} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i}{2^n i!(n-i)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2i} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{i!(n-i)!} (x^2)^{n-i} (-1)^i \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{i} (x^2)^{n-i} (-1)^i \end{aligned}$$

ここで $\frac{n}{2} < i \leq n$ のとき、 x についての n 階微分により $(x^2)^{n-i}$ が 0 になるため、これを新たに和に加えても差し支えない。すなわち、

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (x^2)^{n-i} (-1)^i \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \end{aligned}$$

□

■母関数 \implies 漸化式 (3項間) 母関数 (3.1.1) の中辺を t で偏微分することで

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} = \frac{x-t}{1-2xt+t^2} g(t, x) \iff (1-2xt+t^2) \frac{\partial g(t, x)}{\partial t} = (x-t) g(t, x) \quad (3.1.22)$$

が成立することが分かる。いま、母関数 (3.1.1) の右辺から

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(x) t^n$$

であるので、これと母関数 (3.1.1) の右辺を (3.1.22) に代入して

$$(1-2xt+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(x) t^n = (x-t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(x) t^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(x) t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(x) t^{n+2} = x \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^{n+1}$$

t の指数をそろえると

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(x) t^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) P_{n-1}(x) t^n = x \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_{n-1}(x) t^n$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) P_{n+1}(x) - (2n+1)x P_n(x) + n P_{n-1}(x)] t^n = 0$$

t^n ($n \geq 0$) の係数を比較して次を得る。

$$(2n+1)x P_n(x) = n P_{n-1}(x) + (n+1) P_{n+1}(x)$$

□

■母関数 \implies 微分漸化式 (3項間) 母関数 (3.1.1) の中辺を x で偏微分することで

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial x} = \frac{t}{1-2xt+t^2} g(t, x) \iff (1-2xt+t^2) \frac{\partial g(t, x)}{\partial x} = t g(t, x) \quad (3.1.23)$$

が成立することが分かる。いま、母関数 (3.1.1) の右辺から

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n$$

であるので、これと母関数 (3.1.1) の右辺を (3.1.23) に代入して

$$(1-2xt+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n = t \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^{n+1}$$

$P_0(x) = 1$ であるので $P'_0(x) = 0$ であり、また $P'_{-1}(x) = 0$ と約束する*2。このとき t の指数をそろえると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} P'_{n+1}(x) t^{n+1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P'_{n-1}(x) t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} [P'_{n+1}(x) - 2x P'_n(x) - P_n(x) + P'_{n-1}(x)] t^{n+1}$$

t^n ($n \geq 1$) の係数を比較して次を得る。

$$2x P'_n(x) + P_n(x) = P'_{n-1}(x) + P'_{n+1}(x)$$

□

*2 実は一般次数の Legendre 多項式 $P_\nu(x)$ を積分表示により導入すると、 $P_\nu(x) = P_{-\nu-1}(x)$ なる関係が常に成り立つことが示される。本稿では一般次数の Legendre 多項式については述べないが、これを用いると $P_{-1}(x) = P_0(x) = 1$ であることが分かり、 $P'_{-1}(x) = 0$ が保証されるのである。

■漸化式, 微分漸化式 (3 項間) \implies 微分漸化式 (2 項間) 漸化式 (3 項間) (3.1.8) を x で微分すると

$$(2n+1)xP'_n(x) + (2n+1)P_n = nP'_{n-1}(x) + (n+1)P'_{n+1}(x) \quad (3.1.24)$$

(3.1.24) $- n \times$ (3.1.8) により $P'_{n-1}(x)$ を消去すれば (3.1.9) が得られ, (3.1.24) $-(n+1) \times$ (3.1.8) により $P'_{n+1}(x)$ を消去すれば (3.1.10) が得られる。□

■微分漸化式 (2 項間) \implies 微分漸化式 (3 項間) II (3.1.9) + (3.1.10) により $xP'_n(x)$ を消去することで直ちに (3.1.11) が得られる。□

■微分漸化式 (2 項間) \implies 昇降演算子 まず下降演算子について, (3.1.9) で次数 n をひとつ下げると

$$(n+1)P_n(x) + xP'_n(x) = P'_{n+1}(x)$$

これと (3.1.10) から $P'_{n-1}(x)$ を消去すると下降演算子 (3.1.12) が得られる。

同様に (3.1.10) で次数 n をひとつ上げると

$$(n+1)P_{n+1}(x) - xP'_{n+1}(x) = -P'_n(x)$$

これと (3.1.9) から $P'_{n+1}(x)$ を消去すると上昇演算子 (3.1.13) が得られる。□

■昇降演算子 \implies 微分方程式 下降演算子 (3.1.12) の両辺に左から $[(1-x^2)\frac{d}{dx} - nx]$ を作用させると, 左辺は

$$\begin{aligned} & \left[(1-x^2)\frac{d}{dx} - nx \right] \left[(1-x^2)\frac{d}{dx} + nx \right] P_n(x) \\ &= \left[(1-x^2)\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2)\frac{d}{dx} + nx \right\} - nx \left\{ (1-x^2)\frac{d}{dx} + nx \right\} \right] P_n(x) \\ &= \left[(1-x^2) \left\{ -2x\frac{d}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + n + nx\frac{d}{dx} \right\} - nx(1-x^2)\frac{d}{dx} - n^2x^2 \right] P_n(x) \\ &= \left[(1-x^2)^2\frac{d^2}{dx^2} - 2x(1-x^2)\frac{d}{dx} + (1-x^2)n - n^2x^2 \right] P_n(x) \end{aligned}$$

一方右辺は $n[(1-x^2)\frac{d}{dx} - nx]P_{n-1}(x)$ であるが, これは上昇演算子 (3.1.13) から $-n^2P_n(x)$ に等しい。よって,

$$\begin{aligned} & \left[(1-x^2)^2\frac{d^2}{dx^2} - 2x(1-x^2)\frac{d}{dx} + (1-x^2)n - n^2x^2 \right] P_n(x) = -n^2P_n(x) \\ & \therefore (1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0 \end{aligned}$$

また, この方程式は次のようにも変形できる。

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x) \right] + n(n+1)P_n(x) = 0$$

□

■母関数 \implies 直交性 母関数 (3.1.1) の右辺から

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g(s,x)g(t,x)dx &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)s^m \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \right) dx \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} s^m t^n \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

一方, 母関数 (3.1.1) の中辺から

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g(s,x)g(t,x)dx &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-2xs+s^2}} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{st}} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1+s^2}{2s} - x} \sqrt{\frac{1+t^2}{2t} - x}} \end{aligned}$$

ここで積分公式*3

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-x}\sqrt{b-x}} = -2 \log(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x}) + C \quad (3.1.26)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 g(s, x)g(t, x)dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{st}} \left[-2 \log \left(\sqrt{\frac{1+s^2}{2s}} - x + \sqrt{\frac{1+t^2}{2t}} - x \right) \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{st}} \left[\log \left(\frac{1+s}{\sqrt{2s}} + \frac{1+t}{\sqrt{2t}} \right) - \log \left(\frac{1-s}{\sqrt{2s}} + \frac{1-t}{\sqrt{2t}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{st}} \log \left[\frac{(1+s)\sqrt{2t} + (1+t)\sqrt{2s}}{2\sqrt{st}} \cdot \frac{2\sqrt{st}}{(1-s)\sqrt{2t} + (1-t)\sqrt{2s}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{st}} \log \frac{(1+s)\sqrt{t} + (1+t)\sqrt{s}}{(1-s)\sqrt{t} + (1-t)\sqrt{s}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{st}} \log \frac{(\sqrt{s} + \sqrt{t})(1 + \sqrt{st})}{(\sqrt{s} + \sqrt{t})(1 - \sqrt{st})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{st}} \log \frac{1 + \sqrt{st}}{1 - \sqrt{st}} \end{aligned}$$

さらに Taylor 展開の公式*4

$$\frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n} \quad (|x| < 1) \quad (3.1.27)$$

を用いると

$$\int_{-1}^1 g(s, x)g(t, x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} (\sqrt{st})^{2n} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} s^m t^n \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \quad (3.1.28)$$

(3.1.25), (3.1.28) を比較することで次を得る。

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

□

3.1.2 多重極展開

Legendre 多項式の応用でもっとも基本的なものは多重極展開である。これは2つのベクトル r_1, r_2 があるとき、 $\frac{1}{|r_1 - r_2|}$ を Legendre 多項式によって級数展開する手法である。たとえば電磁気学などの諸分野では $\frac{1}{|r_1 - r_2|}$ を含む積分がよく現れるが、多くの場合その積分計算は困難である。そこで $\frac{1}{|r_1 - r_2|}$ を Legendre 多項式により展開し、最初の数項だけを取り出して積分の近似値を求めたり、物理的に解釈するといった手法がとられることがある (問題 [2-1])。

*3 詳細は省くが、この証明には右辺を微分して左辺の被積分関数になることを確認するか、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-x}\sqrt{b-x}} = \int \frac{1}{a-x} \sqrt{\frac{a-x}{b-x}} dx$$

と変形して $u = \sqrt{\frac{a-x}{b-x}}$ と置換すると良い。

*4 証明は $\log(1+x)$ の Taylor 展開

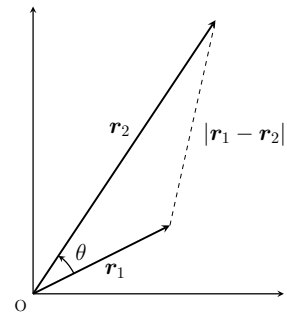
$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \quad (|x| < 1)$$

を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x} &= \frac{1}{x} [\log(1+x) - \log(1-x)] = \frac{1}{x} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n} \end{aligned}$$

右の図のように2つのベクトル $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ が角 θ をなしているとする。 $|\mathbf{r}_1|, |\mathbf{r}_2|$ のうち大きいほうを $r_>$ 、小さいほうを $r_<$ とすると、次のような展開公式が成立する。

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{r_>} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n \quad (3.1.29)$$



以下では (3.1.29) の証明を行う。余弦定理を用いて

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{\sqrt{r_>^2 + r_<^2 - 2r_>r_<\cos \theta}} = \frac{1}{r_>} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\cos \theta \cdot \frac{r_<}{r_>} + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2}}$$

ここで Legendre 多項式の母関数 (3.1.1) で $x = \cos \theta$, $t = \frac{r_<}{r_>}$ とおいた形が現れているので、

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{r_>} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n$$

と書き換えられることが示される。

3.2 Legendre 陪関数

3.2.1 Legendre 陪関数

Legendre 陪関数 $P_n^m(x)$ は Rodrigues の公式 (3.2.1) によって定義する^{*5}。定義 (3.2.1) が意味を持つためには次数 m が $-n \leq m \leq n$ なる条件を満たす必要がある。定義から分かるように $P_n^m(x)$ は m の値によっては式に $\sqrt{1-x^2}$ を含む場合があるので、一般には多項式にはならず、普通は Legendre 陪多項式とは呼ばない (呼ぶ教科書はある)。特に $m \geq 0$ では定義 (3.2.1) は (3.2.2) のように Legendre 多項式 $P_n(x)$ の m 階導関数を用いて簡潔に表すことができる。また $m = 0$ とすると $P_n^m(x)$ は $P_n(x)$ と一致する。

Legendre 陪関数において最も重要な性質は対称性 (3.2.6) であり、これは $P_n^{-m}(x)$ と $P_n^m(x)$ が定数倍を除いて一致することを意味する。対称性は直交性 (3.2.13) の証明や後述の球面調和関数の理論に絶大な威力を発揮する。

Legendre 陪関数は Legendre 多項式同様、多数の漸化式を作ることができるが³、ここでは必要最小限の公式だけを載せるとどめた。

公式集

■Rodrigues の公式 (定義)

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \quad \left(\begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots \\ -n \leq m \leq n \end{array} \right) \quad (3.2.1)$$

■ $m \geq 0$ の場合

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad \left(\begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 \leq m \leq n \end{array} \right) \quad (3.2.2)$$

■ $m = 0$ の場合

$$P_n^0(x) = P_n(x) \quad (3.2.3)$$

■ $x = \pm 1$ での特殊値 $m \neq 0$ のとき

$$P_n^m(\pm 1) = 0 \quad (3.2.4)$$

^{*5} この定義にさらに位相因子 $(-1)^m$ をつけたものを定義として採用する教科書も存在する。その場合、次節の球面調和関数の定義 (3.3.4) のほうに位相因子 $(-1)^m$ をつけないことが多い。

表 3.2 Legendre 陪関数 $P_n^m(x)$ ($m > 0$)

$P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2}$
$P_2^1(x) = 3x\sqrt{1-x^2}$
$P_2^2(x) = 3(1-x^2)$
$P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)\sqrt{1-x^2}$
$P_3^2(x) = 15x(1-x^2)$
$P_3^3(x) = 15(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$
$P_4^1(x) = \frac{5}{2}(7x^3-3x)\sqrt{1-x^2}$
$P_4^2(x) = \frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2)$
$P_4^3(x) = 105x(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$
$P_4^4(x) = 105(1-x^2)^2$

表 3.3 Legendre 陪関数 $P_n^m(x)$ ($m < 0$)

$P_1^{-1}(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$
$P_2^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$
$P_2^{-2}(x) = \frac{1}{8}(1-x^2)$
$P_3^{-1}(x) = -\frac{1}{8}(5x^2-1)\sqrt{1-x^2}$
$P_3^{-2}(x) = \frac{1}{8}x(1-x^2)$
$P_3^{-3}(x) = -\frac{1}{48}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$
$P_4^{-1}(x) = -\frac{1}{48}(7x^3-3x)\sqrt{1-x^2}$
$P_4^{-2}(x) = \frac{1}{48}(7x^2-1)(1-x^2)$
$P_4^{-3}(x) = -\frac{1}{48}x(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$
$P_4^{-4}(x) = \frac{1}{384}(1-x^2)^2$

■ 偶奇性

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x) \tag{3.2.5}$$

■ 対称性

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \tag{3.2.6}$$

■ 昇降演算子

上昇演算子 $\left[(1-x^2) \frac{d}{dx} + mx \right] P_n^m(x) = \sqrt{1-x^2} P_n^{m+1}(x)$ (3.2.7)

下降演算子 $\left[(1-x^2) \frac{d}{dx} - mx \right] P_n^m(x) = -(n+m)(n-m+1)\sqrt{1-x^2} P_n^{m-1}(x)$ (3.2.8)

■ 漸化式 (n 固定)

$$\frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}} P_n^m(x) = P_n^{m+1}(x) + (n+m)(n-m+1) P_n^{m-1}(x) \tag{3.2.9}$$

■ 漸化式 (m 固定)

$$(2n+1)x P_n^m(x) = (n+m) P_{n-1}^m(x) + (n-m+1) P_{n+1}^m(x) \tag{3.2.10}$$

■ 微分方程式

$$\left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} \right] P_n^m(x) = 0 \tag{3.2.11}$$

■ 自己随伴形

$$\left[\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} \right\} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} \right] P_n^m(x) = 0 \tag{3.2.12}$$

■ 直交性

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'} \tag{3.2.13}$$

証明

定義 (3.2.1) から $m \geq 0$ の場合、 $m = 0$ の場合、 $x = \pm 1$ での特殊値、偶奇性はただちに得られるので、これらの詳細は省略する。

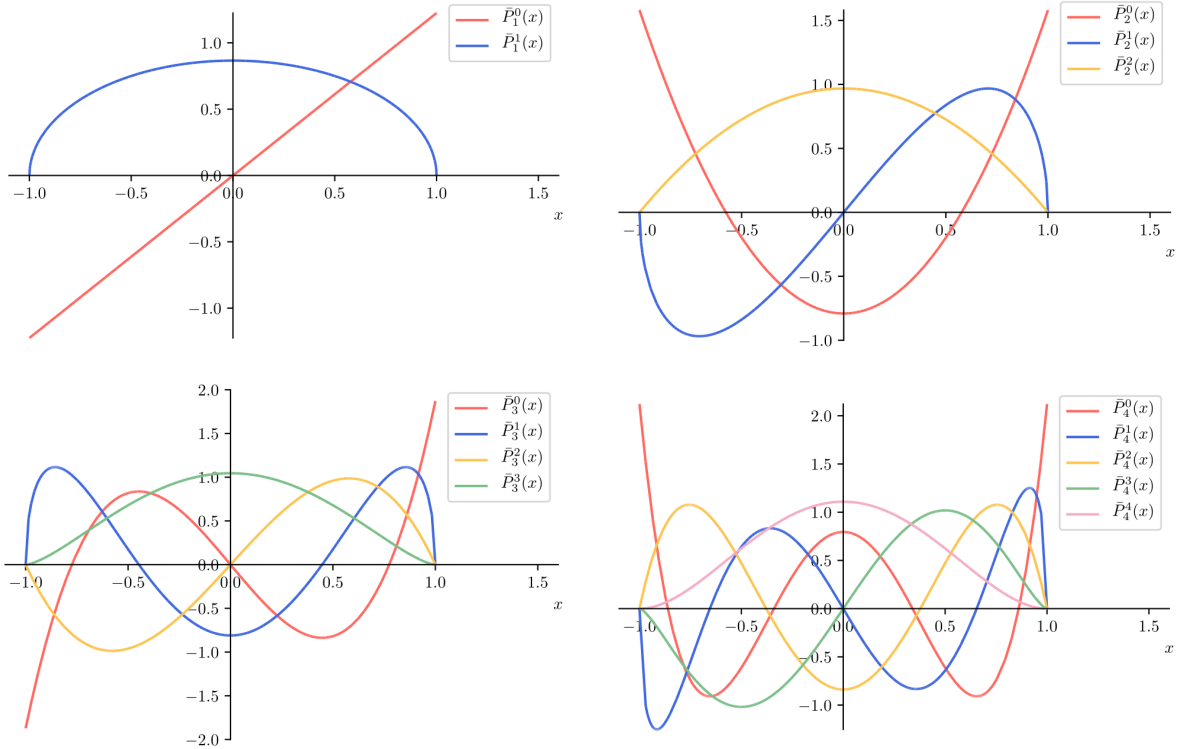


図 3.3 規格化された Legendre 陪関数 $\bar{P}_n^m(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(x)$

■Rodrigues の公式 (定義) \implies 対称性 定義 (3.2.1) に含まれる $n+m$ 階微分を Leibniz の公式 (2.1.16) によって展開する。

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n \\
 &= \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x+1)^n (x-1)^n \\
 &= \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} \left[\frac{d^{n+m-i}}{dx^{n+m-i}} (x+1)^n \right] \left[\frac{d^i}{dx^i} (x-1)^n \right] \\
 &= \sum_{i=m}^n \binom{n+m}{i} \left[\frac{d^{n+m-i}}{dx^{n+m-i}} (x+1)^n \right] \left[\frac{d^i}{dx^i} (x-1)^n \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-m} \binom{n+m}{m+i} \left[\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} (x+1)^n \right] \left[\frac{d^{m+i}}{dx^{m+i}} (x-1)^n \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-m} \frac{(n+m)!}{(m+i)!(n-i)!} \cdot \frac{n!}{i!} (x+1)^i \cdot \frac{n!}{(n-m-i)!} (x-1)^{n-m-i} \\
 &= (n+m)! \sum_{i=0}^{n-m} \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{n!}{(m+i)!(n-m-i)!} \cdot (x+1)^i (x-1)^{n-m-i} \\
 &= (n+m)! \sum_{i=0}^{n-m} \binom{n}{i} \binom{n}{m+i} (x+1)^i (x-1)^{n-m-i}
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 P_n^m(x) &= \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n \\
 &= (n+m)! \cdot \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \sum_{i=0}^{n-m} \binom{n}{i} \binom{n}{m+i} (x+1)^i (x-1)^{n-m-i}
 \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

一方、

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n \\
 &= \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x+1)^n(x-1)^n \\
 &= \sum_{i=0}^{n-m} \binom{n-m}{i} \left[\frac{d^{n-m-i}}{dx^{n-m-i}}(x+1)^n \right] \left[\frac{d^i}{dx^i}(x-1)^n \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-m} \frac{(n-m)!}{i!(n-m-i)!} \cdot \frac{n!}{(m+i)!} (x+1)^{m+i} \cdot \frac{n!}{(n-i)!} (x-1)^{n-i} \\
 &= (n-m)! \sum_{i=0}^{n-m} \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{n!}{(m+i)!(n-m-i)!} \cdot (x+1)^{m+i} (x-1)^{n-i} \\
 &= (n-m)! \sum_{i=0}^{n-m} \binom{n}{i} \binom{n}{m+i} (x+1)^{m+i} (x-1)^{n-i}
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 P_n^{-m}(x) &= \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n \\
 &= (n-m)! \cdot \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \sum_{i=0}^{n-m} \binom{n}{i} \binom{n}{m+i} (x+1)^{m+i} (x-1)^{n-i} \\
 &= (-1)^m (n-m)! \cdot \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \sum_{i=0}^{n-m} \binom{n}{i} \binom{n}{m+i} (x+1)^i (x-1)^{n-m-i} \tag{3.2.15}
 \end{aligned}$$

(3.2.14), (3.2.15) を比較して次を得る。

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x)$$

□

■定義 \implies 上昇演算子 $\frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{-\frac{m}{2}} P_n^m(x) \right]$ を2通りに変形する。まず定義(3.2.1)を用いて

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{-\frac{m}{2}} P_n^m(x) \right] &= \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n \right] \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+m+1}}{dx^{n+m+1}}(x^2-1)^n \\
 &= (1-x^2)^{-\frac{m+1}{2}} \left[\frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m+1}{2}} \frac{d^{n+m+1}}{dx^{n+m+1}}(x^2-1)^n \right] \\
 &= (1-x^2)^{-\frac{m+1}{2}} P_n^{m+1}(x) \tag{3.2.16}
 \end{aligned}$$

一方、1階微分を実行すると

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{-\frac{m}{2}} P_n^m(x) \right] &= (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d}{dx} P_n^m(x) + mx(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1} P_n^m(x) \\
 &= (1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} + mx \right] P_n^m(x) \tag{3.2.17}
 \end{aligned}$$

(3.2.16), (3.2.17) より

$$(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} + mx \right] P_n^m(x) = (1-x^2)^{-\frac{m+1}{2}} P_n^{m+1}(x)$$

両辺を $(1-x^2)^{\frac{m}{2}+1}$ 倍して次を得る。

$$\left[(1-x^2) \frac{d}{dx} + mx \right] P_n^m(x) = \sqrt{1-x^2} P_n^{m+1}(x)$$

□

■上昇演算子, 対称性 \implies 下降演算子 上昇演算子 (3.2.7) において m を $-m$ に置きかえると

$$\left[(1-x^2) \frac{d}{dx} - mx \right] P_n^{-m}(x) = \sqrt{1-x^2} P_n^{-m+1}(x) \quad (3.2.18)$$

ここで対称性 (3.2.6) から

$$\begin{aligned} P_n^{-m}(x) &= (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \\ P_n^{-m+1}(x) &= (-1)^{m-1} \frac{(n-m+1)!}{(n+m-1)!} P_n^{m-1}(x) \end{aligned}$$

であるので, これらを (3.2.18) に代入して整理すると次が得られる。

$$\left[(1-x^2) \frac{d}{dx} - mx \right] P_n^m(x) = -(n+m)(n-m+1) \sqrt{1-x^2} P_n^{m-1}(x)$$

□

■昇降演算子 \implies 漸化式 (n 固定) (3.2.7) – (3.2.8) により, 昇降演算子の微分を含む項を消去して整理すると, n が固定された漸化式 (3.2.9) が得られる。 □

■定義, $P_n(x)$ の漸化式, 対称性 \implies 漸化式 (m 固定) m が固定された漸化式は, Legendre 多項式についての漸化式を用いて示す。

$m \geq 0$ のとき

$$(2n+1)x P_n^m(x) = (2n+1)x(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

ここで Leibniz の公式 (2.1.16) から

$$\frac{d^m}{dx^m} \{x P_n(x)\} = x \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) + m \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_n(x) \iff x \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \frac{d^m}{dx^m} \{x P_n(x)\} - m \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_n(x)$$

であるから,

$$\begin{aligned} (2n+1)x P_n^m(x) &= (2n+1)(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left[\frac{d^m}{dx^m} \{x P_n(x)\} - m \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_n(x) \right] \\ &\downarrow \text{三項間漸化式 (3.1.7), (3.1.11)} \\ &= (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left[\frac{d^m}{dx^m} \{nP_{n-1}(x) + (n+1)P_{n+1}(x)\} - m \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \{-P'_{n-1}(x) + P'_{n+1}(x)\} \right] \\ &= (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left[(n+m) \frac{d^m}{dx^m} P_{n-1}(x) + (n-m+1) \frac{d^m}{dx^m} P_{n+1}(x) \right] \\ &= (n+m) P_{n-1}^m(x) + (n-m+1) P_{n+1}^m(x) \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

$m \leq 0$ のとき 対称性 (3.2.6) を用いて (3.2.19) を書き換えると,

$$\begin{aligned} (2n+1)x \cdot (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} P_n^{-m}(x) \\ = (n+m) \cdot (-1)^m \frac{(n+m-1)!}{(n-m-1)!} P_{n-1}^{-m}(x) + (n-m+1) \cdot (-1)^{-m} \frac{(n+m+1)!}{(n-m+1)!} P_{n+1}^{-m}(x) \end{aligned}$$

両辺を $(-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!}$ 倍して整理すると

$$(2n+1)x P_n^{-m}(x) = (n-m) P_{n-1}^{-m}(x) + (n+m+1) P_{n+1}^{-m}(x)$$

この式は (3.2.19) で m を $-m$ に置きかえた形となっており, (3.2.19) が $m \leq 0$ に対しても成立することを表す。

以上をまとめると, $-n \leq m \leq n$ を満たすすべての m に対して次が成り立つことが示された。

$$(2n+1)x P_n^m(x) = (n+m) P_{n-1}^m(x) + (n-m+1) P_{n+1}^m(x)$$

□

■昇降演算子 ⇒ 微分方程式 昇降演算子 (3.2.7), (3.2.8) を次のように書き直しておく。

$$\text{上昇演算子} \quad \left[\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} + \frac{mx}{\sqrt{1-x^2}} \right] P_n^m(x) = P_n^{m+1}(x) \quad (3.2.20)$$

$$\text{下降演算子} \quad \left[\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} - \frac{mx}{\sqrt{1-x^2}} \right] P_n^m(x) = -(n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(x) \quad (3.2.21)$$

上昇演算子 (3.2.20) の両辺に左から $\left[\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} - \frac{(m+1)x}{\sqrt{1-x^2}} \right]$ を作用させると、左辺は

$$\begin{aligned} & \left[\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} - \frac{(m+1)x}{\sqrt{1-x^2}} \right] \left[\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} + \frac{mx}{\sqrt{1-x^2}} \right] P_n^m(x) \\ &= \left[\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} \left\{ \sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} + \frac{mx}{\sqrt{1-x^2}} \right\} - \frac{(m+1)x}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ \sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} + \frac{mx}{\sqrt{1-x^2}} \right\} \right] P_n^m(x) \\ &= \left[\sqrt{1-x^2} \left\{ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d}{dx} + \sqrt{1-x^2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\sqrt{1-x^2} - mx \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} + \frac{mx}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d}{dx} \right\} \right. \\ & \quad \left. - \left\{ (m+1)x \frac{d}{dx} - \frac{m(m+1)}{1-x^2} x^2 \right\} \right] P_n^m(x) \\ &= \left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + \frac{m-m(m+1)x^2}{1-x^2} \right] P_n^m(x) \end{aligned}$$

一方、右辺は下降演算子 (3.2.21) を用いて

$$\begin{aligned} \left[\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} - \frac{(m+1)x}{\sqrt{1-x^2}} \right] P_n^{m+1}(x) &= -(n+m+1)(n-m)P_n^m(x) \\ &= \{-n(n+1) + m(m+1)\} P_n^m(x) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + \frac{m-m(m+1)x^2}{1-x^2} \right] P_n^m(x) &= \{-n(n+1) + m(m+1)\} P_n^m(x) \\ \therefore \left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} \right] P_n^m(x) &= 0 \end{aligned}$$

また、この方程式は次のようにも変形できる。

$$\left[\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} \right\} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} \right] P_n^m(x) = 0$$

□

■ $P_n(x)$ の直交性, 対称性 ⇒ 直交性 対称性 (3.2.6) を用いて (3.2.13) の左辺を書き換えると

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \int_{-1}^1 P_n^{-m}(x) P_{n'}^m(x) dx \quad (3.2.22)$$

ここで

$$I_m = \int_{-1}^1 P_n^{-m}(x) P_{n'}^m(x) dx$$

とおくと、1回の部分積分により次のような関係が成り立つことが分かる*6。

$$I_m = -I_{m-1}$$

これを繰り返し用いると

$$I_m = (-1)^m I_0 = (-1)^m \int_{-1}^1 P_n(x) P_{n'}(x) dx \stackrel{(3.1.16)}{=} (-1)^m \frac{2}{2n+1} \delta_{nn'}$$

となるので、(3.2.22) に代入して次が得られる。

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'}$$

□

*6 難しい計算はないので、各自で確認してみてください。

表 3.4 Legendre 多項式 $P_n(\cos \theta)$

$P_0(\cos \theta) = 1$
$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$
$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$
$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$
$P_4(\cos \theta) = \frac{1}{8}(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)$
$P_5(\cos \theta) = \frac{1}{8}(63 \cos^5 \theta - 70 \cos^3 \theta + 15 \cos \theta)$
$P_6(\cos \theta) = \frac{1}{16}(231 \cos^6 \theta - 315 \cos^4 \theta + 105 \cos^2 \theta - 5)$

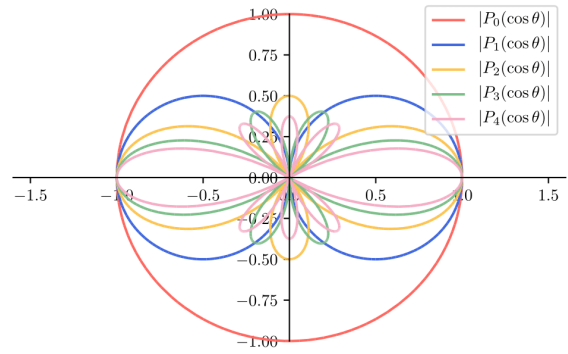


図 3.4 Legendre 多項式 $P_n(\cos \theta)$
 偏角 θ に対する $|P_n(\cos \theta)|$ の値を原点からの距離として表現している

3.2.2 $P_n^m(\cos \theta)$ についての公式

実際の計算では、Legendre 陪関数は $P_n^m(\cos \theta)$ の形で現れることが多い。そこで、前 3.2.1 節で挙げた公式を $P_n^m(\cos \theta)$ についての公式に書き換えたものの一部をここで挙げておこう。確認するには $x = \cos \theta$ として、

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d(\cos \theta)} = \frac{d\theta}{d(\cos \theta)} \frac{d}{d\theta} = \frac{1}{d(\cos \theta)/d\theta} \frac{d}{d\theta} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}\right) \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}\right) = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d^2}{d\theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{d}{d\theta}\right) = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2}{d\theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \frac{d}{d\theta}$$

などに注意して 3.2.1 節の公式集を丁寧に書き直すだけである。最後の直交性の被積分関数に $\sin \theta$ が現れることにも注意しよう。難しい部分はないので、導出過程の詳細は省略する。

公式集

■ $m \geq 0$ の場合

$$P_n^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_n(\cos \theta) \tag{3.2.23}$$

■ $m = 0$ の場合

$$P_n^0(\cos \theta) = P_n(\cos \theta) \tag{3.2.24}$$

■ 偶奇性

$$P_n^m(-\cos \theta) = (-1)^{m+n} P_n^m(\cos \theta) \tag{3.2.25}$$

■ 対称性

$$P_n^{-m}(\cos \theta) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) \tag{3.2.26}$$

■ 昇降演算子

$$\text{上昇演算子} \quad \left(\frac{d}{d\theta} - m \cot \theta\right) P_n^m(\cos \theta) = -P_n^{m+1}(\cos \theta) \tag{3.2.27}$$

$$\text{下降演算子} \quad \left(\frac{d}{d\theta} + m \cot \theta\right) P_n^m(\cos \theta) = (n+m)(n-m+1) P_n^{m-1}(\cos \theta) \tag{3.2.28}$$

■ 微分方程式

$$\left[\frac{d^2}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d}{d\theta} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}\right\}\right] P_n^m(\cos \theta) = 0 \tag{3.2.29}$$

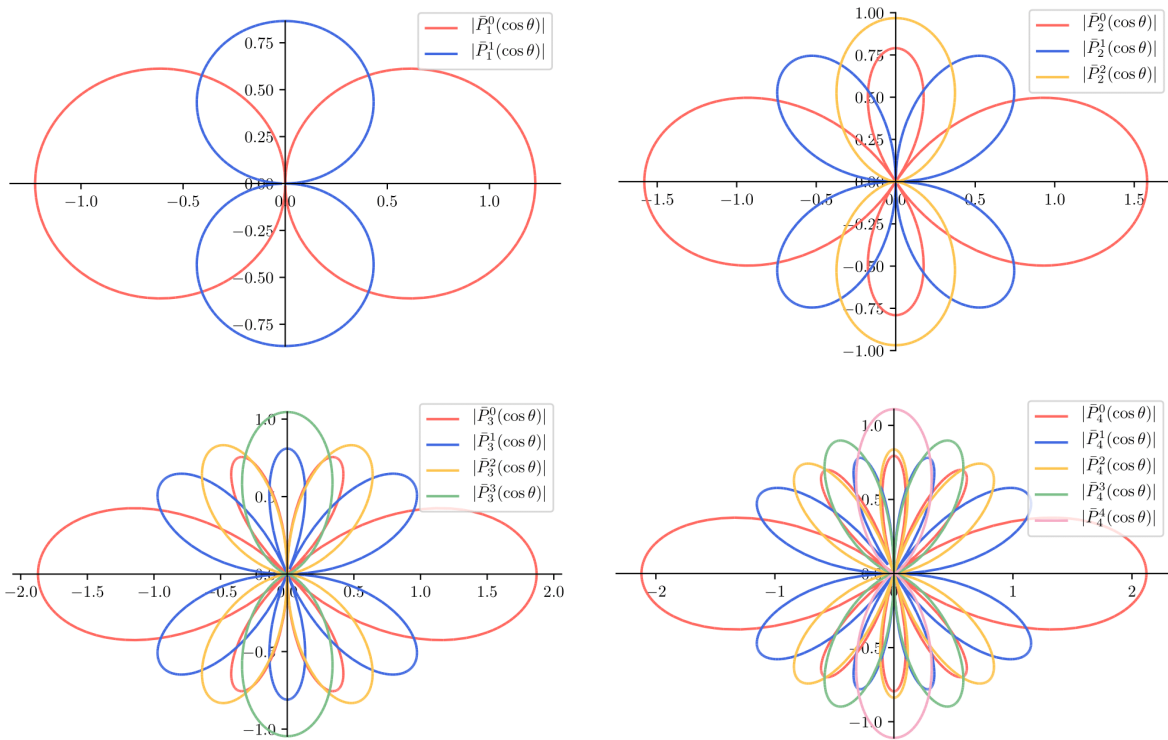


図 3.5 規格化された Legendre 陪関数 $\bar{P}_n^m(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta)$ 偏角 θ に対する $|\bar{P}_n^m(\cos \theta)|$ の値を原点からの距離として表現している

表 3.5 Legendre 陪関数 $P_n^m(\cos \theta)$ ($m \geq 0$)

$P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta$
$P_2^1(\cos \theta) = 3 \cos \theta \sin \theta$
$P_2^2(\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta$
$P_3^1(\cos \theta) = \frac{3}{2} (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta$
$P_3^2(\cos \theta) = 15 \cos \theta \sin^2 \theta$
$P_3^3(\cos \theta) = 15 \sin^3 \theta$
$P_4^1(\cos \theta) = \frac{5}{2} (7 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \sin \theta$
$P_4^2(\cos \theta) = \frac{15}{2} (7 \cos^2 \theta - 1) \sin^2 \theta$
$P_4^3(\cos \theta) = 105 \cos \theta \sin^3 \theta$
$P_4^4(\cos \theta) = 105 \sin^4 \theta$

■ 自己随伴形

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right\} \right] P_n^m(\cos \theta) = 0 \tag{3.2.30}$$

■ 直交性

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) P_{n'}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'} \tag{3.2.31}$$

3.3 球面調和関数

3.3.1 球面調和関数

Laplace 方程式 $\Delta\psi = 0$ を球座標系 (r, θ, φ) で $\psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ と変数分離してしかるべき条件^{*7}のもと解くと、方位角 φ について規格化された $\Phi(\varphi)$ と、天頂角 θ について規格化された $\Theta(\theta)$ はそれぞれ次のように求められる (問題 [2-2])。

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.3.1)$$

$$\Theta(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) \quad (-l \leq m \leq l) \quad (3.3.2)$$

したがって Laplace 方程式の解の球面上で規格化された角度依存性は

$$\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

と書けることになる。実は Laplace 方程式のみならず、Helmholtz 方程式 $(\Delta+k^2)\psi = 0$ や波動方程式 $(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})\psi = 0$ 、中心力場の Schrödinger 方程式などでもまったく同じ結果が得られる。そこでこの規格化された角度依存性に位相因子 $(-1)^m$ を付したものはしばしば球面調和関数とよばれ、 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ で表される^{*8}。位相因子 $(-1)^m$ は必要ないように感じられるが、このように定義しておく量子力学の角運動量の理論などにおいて有用になることが多い。教科書によっては $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ の定義が (3.3.5) のように書かれることがあるが、これは (3.3.4) と意味することは同じである^{*9}。基本的に $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ についての公式は、定義 (3.3.4) と $P_n^m(\cos\theta)$ についての公式を用いてすぐに導くことができる。

公式集

■定義

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad \left(\begin{array}{l} l = 0, 1, 2, \dots \\ -l \leq m \leq l \end{array} \right) \quad (3.3.4)$$

$$= (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (3.3.5)$$

■偶奇性

$$Y_{lm}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (3.3.6)$$

■対称性

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}(\theta, \varphi)^* \quad (3.3.7)$$

■昇降演算子

$$\text{上昇演算子} \quad e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{(l-m)(l+m+1)} Y_{l,m+1}(\theta, \varphi) \quad (3.3.8)$$

$$\text{下降演算子} \quad e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{(l+m)(l-m+1)} Y_{l,m-1}(\theta, \varphi) \quad (3.3.9)$$

*7 φ について一価関数であること、および $\theta = 0, \pi$ において有限であること。

*8 位相因子 $(-1)^m$ を付けない教科書もあるが、その場合 Legendre 陪関数の定義 (3.2.1) にこの因子をつけられることが多い。

*9 (3.3.5) についている $(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}$ が次のような性質を持つことは重要である。

$$(-1)^{\frac{m+|m|}{2}} = \begin{cases} (-1)^m & (m \geq 0) \\ 1 & (m \leq 0) \end{cases} \quad (3.3.3)$$

すなわち、 $m \geq 0$ のときは m の変化により正負の入れ替わりが起こるが、 $m \leq 0$ のときは常に正になるということである。教科書によってはこの意味を持つ定数として ϵ_m と定義するものも多い。

表 3.6 球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$

$Y_{00}(\theta, \varphi)$	$= \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
$Y_{10}(\theta, \varphi)$	$= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$
$Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi)$	$= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$
$Y_{20}(\theta, \varphi)$	$= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$
$Y_{2,\pm 1}(\theta, \varphi)$	$= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{\pm i\varphi}$
$Y_{2,\pm 2}(\theta, \varphi)$	$= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}$
$Y_{30}(\theta, \varphi)$	$= \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$
$Y_{3,\pm 1}(\theta, \varphi)$	$= \mp \sqrt{\frac{21}{64\pi}} (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta e^{\pm i\varphi}$
$Y_{3,\pm 2}(\theta, \varphi)$	$= \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \cos \theta \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}$
$Y_{3,\pm 3}(\theta, \varphi)$	$= \mp \sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\varphi}$

■微分方程式

$$-\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (3.3.10)$$

$$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm}(\theta, \varphi) = m Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (3.3.11)$$

■直交性

$$\iint Y_{lm}(\theta, \varphi)^* Y_{l'm'}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (3.3.12)$$

証明

■(3.3.4) \implies (3.3.5) (3.3.4) を Legendre 陪関数の対称性 (3.2.26) を用いて書き換えると

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\theta, \varphi) &= (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(\cos \theta) e^{im\varphi} \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} P_l^{-m}(\cos \theta) e^{im\varphi} \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

(3.3.4) と (3.3.13) はともに任意の m ($-l \leq m \leq l$) について成り立つ式である。そこで $m \geq 0$ のときは (3.3.4) を、 $m \leq 0$ のときは (3.3.13) を用いるという規則を設けることにすると、 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ は

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

とかけることが分かる*10。

□

*10 一般に

$$|m| = \begin{cases} m & (m \geq 0) \\ -m & (m \leq 0) \end{cases}$$

と書けることに注意せよ。

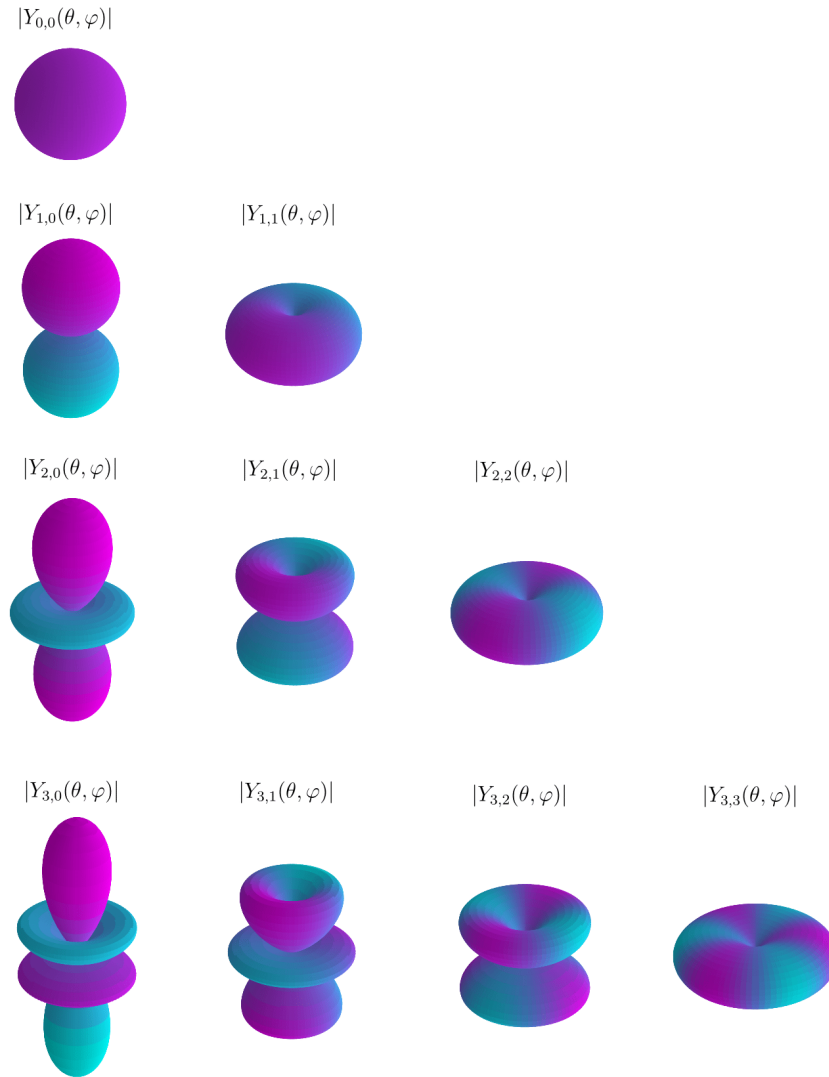


図 3.6 球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 。角度 (θ, φ) に対する $|Y_{lm}(\theta, \varphi)|$ の値を原点からの距離として表現している

■定義 \implies 偶奇性 定義 (3.3.4) より

$$\begin{aligned}
 Y_{lm}(\pi - \theta, \varphi + \pi) &= (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\pi - \theta)) e^{im(\varphi + \pi)} \\
 &= (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(-\cos \theta) \cdot (-1)^m e^{im\varphi} \\
 &= (-1)^l \cdot (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (\because (3.2.25)) \\
 &= (-1)^l Y_{lm}(\theta, \varphi)
 \end{aligned}$$

□

■定義 \Rightarrow 対称性 定義 (3.3.4) より

$$\begin{aligned}
 Y_{l,-m}(\theta, \varphi) &= (-1)^{-m} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} P_l^{-m}(\cos \theta) e^{-im\varphi} \\
 &= (-1)^{-m} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \cdot (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) e^{-im\varphi} \quad (\because (3.2.26)) \\
 &= (-1)^m \cdot (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{-im\varphi} \\
 &= (-1)^m Y_{lm}(\theta, \varphi)^*
 \end{aligned}$$

□

■定義 \Rightarrow 上昇演算子 定義 (3.3.4) より

$$\begin{aligned}
 e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) &= e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - m \cot \theta \right) (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{i(m+1)\varphi} \\
 &\downarrow P_n^m(\cos \theta) \text{ の上昇演算子 (3.2.27)} \\
 &= (-1)^{m+1} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^{m+1}(\cos \theta) e^{i(m+1)\varphi} \\
 &= \sqrt{(l-m)(l+m+1)} \cdot (-1)^{m+1} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m-1)!}{(l+m+1)!}} P_l^{m+1}(\cos \theta) e^{i(m+1)\varphi} \\
 &= \sqrt{(l-m)(l+m+1)} Y_{l,m+1}(\theta, \varphi)
 \end{aligned}$$

□

■定義 \Rightarrow 下降演算子 定義 (3.3.4) より

$$\begin{aligned}
 e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) &= e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \\
 &= \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} - m \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{i(m-1)\varphi} \\
 &\downarrow P_n^m(\cos \theta) \text{ の下降演算子 (3.2.28)} \\
 &= (l+m)(l-m+1) \cdot (-1)^{m-1} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^{m-1}(\cos \theta) e^{i(m-1)\varphi} \\
 &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)} \cdot (-1)^{m-1} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m+1)!}{(l+m-1)!}} P_l^{m-1}(\cos \theta) e^{i(m-1)\varphi} \\
 &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)} Y_{l,m-1}(\theta, \varphi)
 \end{aligned}$$

□

■定義 \Rightarrow 微分方程式 まず (3.3.10) に定義 (3.3.4) を代入して先に φ の微分を実行すると、 $P_n^m(\cos \theta)$ の微分方程式 (3.2.30) とまったく同じ形の式が現れるので、(3.3.10) が成立することが確認できる。同様に (3.3.11) にも定義 (3.3.4) を代入して φ の微分を実行することで、その成立を確かめることができる。

□

■直交性 $P_n^m(\cos \theta)$ の直交性 (3.2.31) および $e^{im\varphi}$ の直交性により直ちに示される。

□

表 3.7 軌道の定義式および具体的な表式

s	s	Y_{00}	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
p	p_y	$-\frac{1}{\sqrt{2}i}(Y_{11} + Y_{1,-1})$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta \sin \varphi$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{y}{r}$
	p_z	Y_{10}	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r}$
	p_x	$\frac{1}{\sqrt{2}}(-Y_{11} + Y_{1,-1})$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta \cos \varphi$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{x}{r}$
d	d_{xy}	$\frac{1}{\sqrt{2}i}(Y_{22} - Y_{2,-2})$	$\sqrt{\frac{15}{4\pi}} \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi$	$\sqrt{\frac{15}{4\pi}} \frac{xy}{r^2}$
	d_{yz}	$-\frac{1}{\sqrt{2}i}(Y_{21} + Y_{2,-1})$	$\sqrt{\frac{15}{4\pi}} \cos \theta \sin \theta \sin \varphi$	$\sqrt{\frac{15}{4\pi}} \frac{yz}{r^2}$
	d_{z^2}	Y_{20}	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{3z^2 - r^2}{r^2}$
	d_{zx}	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{21} - Y_{2,-1})$	$\sqrt{\frac{15}{4\pi}} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi$	$\sqrt{\frac{15}{4\pi}} \frac{zx}{r^2}$
	$d_{x^2 - y^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{22} + Y_{2,-2})$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \frac{x^2 - y^2}{r^2}$
f	$f_{y(3x^2 - y^2)}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}i}(Y_{33} + Y_{3,-3})$	$\sqrt{\frac{35}{32\pi}} \sin^3 \theta \sin \varphi (3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$	$\sqrt{\frac{35}{32\pi}} \frac{y(3x^2 - y^2)}{r^3}$
	f_{xyz}	$\frac{1}{\sqrt{2}i}(Y_{32} - Y_{3,-2})$	$\sqrt{\frac{105}{4\pi}} \cos \theta \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi$	$\sqrt{\frac{105}{4\pi}} \frac{xyz}{r^3}$
	f_{yz^2}	$-\frac{1}{\sqrt{2}i}(Y_{31} + Y_{3,-1})$	$\sqrt{\frac{21}{32\pi}} \sin \theta \sin \varphi (5 \cos^2 \theta - 1)$	$\sqrt{\frac{21}{32\pi}} \frac{y(5z^2 - r^2)}{r^3}$
	f_{z^3}	Y_{30}	$\sqrt{\frac{7}{16\pi}} \cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3)$	$\sqrt{\frac{7}{16\pi}} \frac{z(5z^2 - 3r^2)}{r^3}$
	f_{xz^2}	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{31} - Y_{3,-1})$	$\sqrt{\frac{21}{32\pi}} \sin \theta \cos \varphi (5 \cos^2 \theta - 1)$	$\sqrt{\frac{21}{32\pi}} \frac{x(5z^2 - r^2)}{r^3}$
	$f_{z(x^2 - y^2)}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{32} + Y_{3,-2})$	$\sqrt{\frac{105}{16\pi}} \cos \theta \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$	$\sqrt{\frac{105}{16\pi}} \frac{z(x^2 - y^2)}{r^3}$
	$f_{x(x^2 - 3y^2)}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{33} - Y_{3,-3})$	$\sqrt{\frac{35}{32\pi}} \sin^3 \theta \cos \varphi (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi)$	$\sqrt{\frac{35}{32\pi}} \frac{x(x^2 - 3y^2)}{r^3}$

3.3.2 量子力学への応用

3.3.2.1 軌道

表 3.6 から分かるように、一般に球面調和関数は複素関数であり、その視覚的なイメージがつかみにくくなっている。そこで球面調和関数同士で適当な線形結合を行うことで実関数をつくり、方向性などが読み取りやすい形に書き直すことがある。このようにして考えられる関数は軌道と呼ばれ、量子化学などの分野で広く扱われる。表 3.7 に軌道の具体的な定義および表式^{*11}、図 3.7 に角 (θ, φ) における軌道の絶対値を原点からの距離としてプロットしたものを示す。

3.3.2.2 軌道角運動量

量子力学において、軌道角運動量演算子 $\hat{L} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ は位置座標演算子 $\hat{r} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (x, y, z)$ および運動量演算子 $\hat{p} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z) = -i\hbar\nabla$ によって

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p} \quad (3.3.14)$$

と定義される。成分に分けて書くと

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \hat{L}_y &= \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \hat{L}_z &= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

^{*11} 軌道の表記は文献によりまちまちである。たとえば d_{z^2} 軌道は $d_{3z^2-r^2}$ 軌道と書かれることも多い。

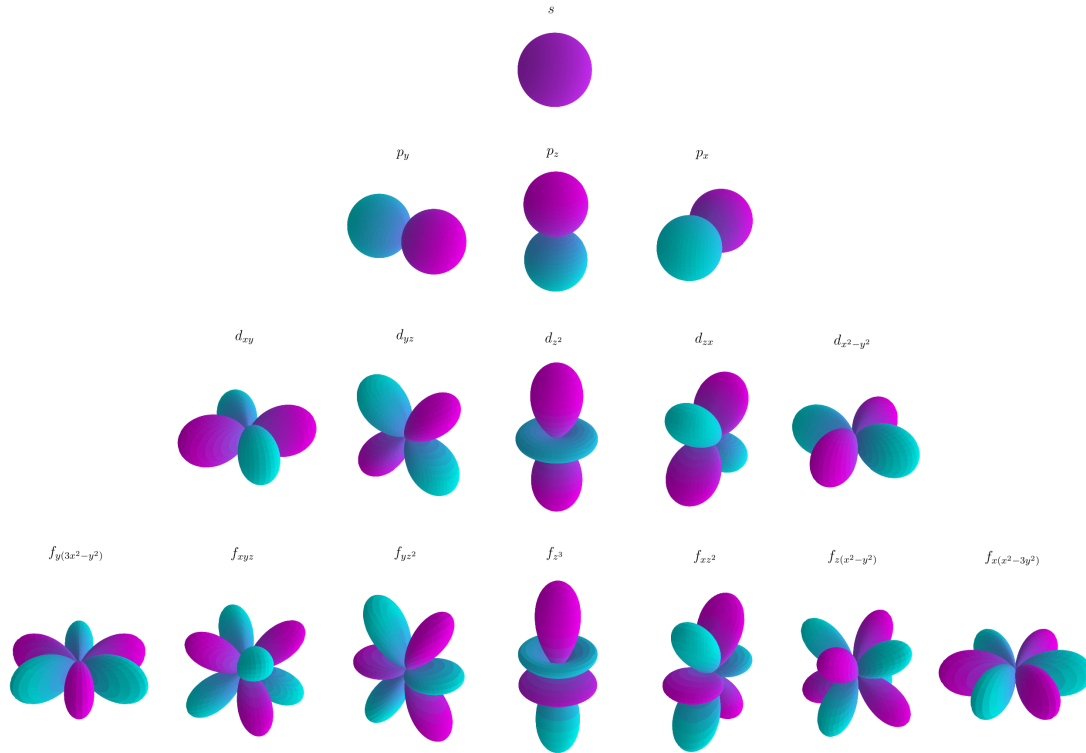


図 3.7 軌道。角 (θ, φ) における軌道の絶対値を原点からの距離として表現している。なお紫色の部分は正、水色の部分は負であることを表す

である。これらを球座標 (r, θ, φ) で表すと、少し長い計算を経て

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left(-\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \tag{3.3.15}$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \tag{3.3.16}$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{3.3.17}$$

となる。そして角運動量の 2 乗 \hat{L}^2 を $\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ によって定義すると、さらに長々しい計算を経て

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] \tag{3.3.18}$$

が得られる。

ここで球面調和関数の微分方程式 (3.3.10), (3.3.11) と角運動量の 2 乗 (3.3.18), z 成分 (3.3.17) を見比べてみるとまったく同じ形が現れていることが分かる。これより、 \hat{L}^2 , \hat{L}_z と球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ の間には

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{3.3.19}$$

$$\hat{L}_z Y_{lm}(\theta, \varphi) = m\hbar Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{3.3.20}$$

という関係が成り立つ。(3.3.19), (3.3.20) は、球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ が \hat{L}^2 と \hat{L}_z の同時固有関数であり、固有値がそれぞれ $l(l+1)\hbar^2, m\hbar$ であることを表している。これは中心力場の Schrödinger 方程式を議論する際に現れる。

また、軌道角運動量の昇降演算子は次のように定義される。

$$\text{上昇演算子 } \hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y = \hbar e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i \cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \tag{3.3.21}$$

$$\text{下降演算子 } \hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y = \hbar e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i \cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \tag{3.3.22}$$

これらと球面調和関数の昇降演算子 (3.3.8), (3.3.9) とを比べると、やはり同じ形が現れている。すなわち、軌道角運動量の昇降演算子と球面調和関数の間には次のような関係が成り立つことになる。

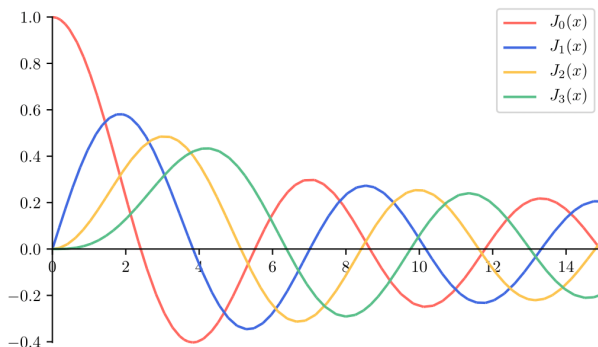
$$\hat{L}_+ Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{(l-m)(l+m+1)} \hbar Y_{l,m+1}(\theta, \varphi) \quad (3.3.23)$$

$$\hat{L}_- Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{(l+m)(l-m+1)} \hbar Y_{l,m-1}(\theta, \varphi) \quad (3.3.24)$$

このように、球面調和関数は量子力学で議論される角運動量を理解するうえで重要な役割を果たす。

第 4 章

Bessel 関数



Bessel 関数は円対称な系における波動・振動を解析するときなどに必ずといってよいほど出現し、物理学のみならず工学の諸分野においても頻繁に応用される。そのため、Bessel 関数はこれまで扱ってきた特殊関数と比べてはるかに重要度が高い関数であるといえる。ひとことで言えば Bessel 関数 $J_\nu(x)$ とは Bessel の微分方程式

$$y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

の基本解のひとつなのであるが、多くの物理現象ではこれと線形独立なもうひとつの解も重要視される。さらにこれと関連する変形 Bessel 関数も拡散現象を記述する際に必要に迫られ、また Bessel 関数の特殊な場合である球 Bessel 関数も球対称な現象を記述する際に重要となる。このように Bessel 関数には関連する関数が多いため、他の特殊関数と比べて内容が多くなっているが、それぞれの導出に必要な計算は比較的軽めになっている。ぜひ自分で手を動かして公式の体系を把握し、これらの関数に慣れ親しんでいきたいところである。

4.1 Bessel 関数

4.1.1 整数次の Bessel 関数（第 1 種 Bessel 関数）

整数次の Bessel 関数（第 1 種 Bessel 関数） $J_n(x)$ を母関数 (4.1.1) により定義する。一般項や漸化式、微分方程式の導出方法はこれまでに扱った特殊関数とほとんど同様にして導ける。積分表示 (4.1.8) が新たに登場しているが、この式の導出方法は二次元の円盤の Fourier 変換を計算する際に重要になる（問題 [4-1]）。

公式集

■母関数（定義）

$$g(t, x) = e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \tag{4.1.1}$$

■母関数 II

$$g(\theta, x) = e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{in\theta} \tag{4.1.2}$$

■偶奇性

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x) \tag{4.1.3}$$

■負の整数次

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{4.1.4}$$

■ $x = 0$ での特殊値

$$J_n(0) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases} \tag{4.1.5}$$

■Bessel 関数の級数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) = 1 \tag{4.1.6}$$

$$J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) = 1 \tag{4.1.7}$$

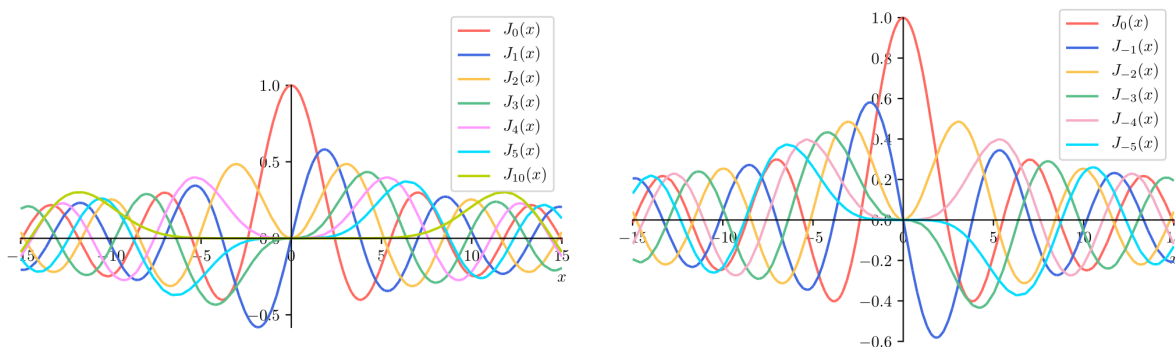


図 4.1 整数次の Bessel 関数 $J_n(x)$

■ Bessel の積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n \sin \theta - n\theta) d\theta \tag{4.1.8}$$

■ 一般項

$$J_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!(n+i)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2i} \tag{4.1.9}$$

■ 漸化式

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \tag{4.1.10}$$

■ 微分漸化式

$$2 \frac{dJ_n(x)}{dx} = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \tag{4.1.11}$$

■ 昇降演算子

$$\text{下降演算子} \quad \left(\frac{d}{dx} + \frac{n}{x}\right) J_n(x) = J_{n-1}(x) \tag{4.1.12}$$

$$\text{上昇演算子} \quad \left(\frac{d}{dx} - \frac{n}{x}\right) J_n(x) = -J_{n+1}(x) \tag{4.1.13}$$

■ 微分方程式

$$\frac{d^2 J_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_n(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0 \tag{4.1.14}$$

$$\frac{d^2 J_n(kx)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_n(kx)}{dx} + \left(k^2 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(kx) = 0 \tag{4.1.15}$$

■ 自己随伴形

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_n(x) \right] + \left(x - \frac{n^2}{x}\right) J_n(x) = 0 \tag{4.1.16}$$

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_n(kx) \right] + \left(k^2 x - \frac{n^2}{x}\right) J_n(kx) = 0 \tag{4.1.17}$$

■ 微分・積分公式

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x), \quad \int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x) + C \tag{4.1.18}$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x), \quad \int x^{-n} J_{n+1}(x) dx = -x^{-n} J_n(x) + C \tag{4.1.19}$$

証明

■母関数 \implies 母関数 II 母関数 (4.1.1) で t を $e^{i\theta}$ と置き換えることで直ちに (4.1.2) が得られる。 □

■母関数 \implies 偶奇性 母関数 (4.1.1) の中辺から $g(-t, -x) = g(t, x)$ が分かるので、(4.1.1) の右辺から

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-x)(-t)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \quad \therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-x)t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n(x)t^n$$

t^n ($n \in \mathbb{Z}$) の係数を比較して、

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$$

□

■母関数 \implies 負の整数次 母関数 (4.1.1) の中辺から $g(\frac{1}{t}, x) = g(-t, x)$ が分かるので、(4.1.1) の右辺から

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)(-t)^n \quad \therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{-n}(x)t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n(x)t^n$$

t^n ($n \in \mathbb{Z}$) の係数を比較して、

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

□

■母関数 \implies $x = 0$ での特殊値 母関数 (4.1.1) において $x = 0$ を代入すると、

$$g(t, 0) = 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(0)t^n$$

t^n ($n \in \mathbb{Z}$) の係数を比較して、

$$J_n(0) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

□

■母関数 \implies Bessel 関数の級数 母関数 (4.1.1) において $t = 1$ を代入すると直ちに

$$g(1, x) = 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)$$

ここで偶奇性 (4.1.3) を考慮すると、奇数次の項が打ち消しあって偶数次の項だけが残るので

$$J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) = 1$$

■母関数 II \implies Bessel の積分表示 母関数 II (4.1.2) の両辺に $e^{-in\theta}$ をかけて θ について $-\pi$ から π まで積分すると、右辺は n の項だけが残り*1

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \theta - n\theta)} d\theta = 2\pi J_n(x)$$

ここで被積分関数は

$$e^{i(x \sin \theta - n\theta)} = \cos(x \sin \theta - n\theta) + i \sin(x \sin \theta - n\theta)$$

*1 複素 Fourier 級数展開を行う際に利用した $e^{in\theta}$ の直交性による。すなわち

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta} e^{in\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi & (m = n) \\ \frac{1}{i(n-m)} [e^{i(n-m)\theta}]_{-\pi}^{\pi} = 0 & (m \neq n) \end{cases} = 2\pi \delta_{mn} \quad (4.1.20)$$

であり、第 2 項は θ についての奇関数であるので、 $-\pi$ から π の積分で消える。したがって、

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n \sin \theta - n\theta) d\theta$$

なお、 $\cos(x \sin \theta - n\theta)$ が θ についての偶関数であることを考慮すると、次のようにも書けることが分かる。

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n \sin \theta - n\theta) d\theta$$

□

■母関数 \implies 一般項 母関数 (4.1.1) の中辺を $\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i$ を用いて展開すると、

$$\begin{aligned} g(t, x) &= e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = e^{\frac{xt}{2}} e^{-\frac{x}{2t}} \\ &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{xt}{2}\right)^m \right] \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(-\frac{x}{2t}\right)^i \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+i} t^{m-i} \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

ここで $m-i$ を新たに n と置き換えて m, i についての二重和を n, i についての二重和に取りかえる。 m, i についての二重和は図 4.2 の黒丸で表した格子点すべてについて実行される。 $n = m-i$ であるとき、 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ に対応する全格子点は図 4.2 で示した直線上の点として捉えることができる。ここで (4.1.21) の二重和は本来 $m = n+i < 0$ を含まないが、この領域 (図 4.2 の白丸で表した格子点) においては $\frac{1}{m!} = 0$ であるのでこれも和に含めても差し支えない。したがって、(4.1.21) における二重和は、 n について $-\infty$ から ∞ まで、 i について 0 から ∞ についての二重和に取りかえることができる。よって、

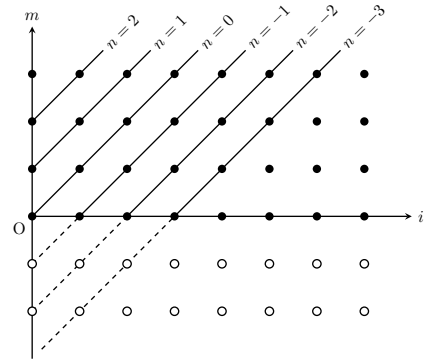


図 4.2 二重和の取りかえ方

$$g(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!(n+i)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2i} t^n$$

母関数 (4.1.1) の右辺と比較して

$$J_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!(n+i)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2i}$$

□

■母関数 \implies 漸化式 母関数 (4.1.1) の中辺を t について偏微分することで

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} = \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) g(t, x) \tag{4.1.22}$$

が成立することが分かる。いま、母関数 (4.1.1) の右辺から

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) t^{n-1}$$

であるので、これと母関数 (4.1.1) の右辺を (4.1.22) に代入して

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) t^{n-1} &= \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \\ \therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2n}{x} J_n(x) t^{n-1} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^{n-2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] t^{n-1} \end{aligned}$$

t^{n-1} の係数を比較して次を得る。

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)$$

□

■母関数 \implies 微分漸化式 母関数 (4.1.1) の中辺を x について偏微分することで

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) g(t, x) \tag{4.1.23}$$

が成立することが分かる。いま、母関数 (4.1.1) の右辺から

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{dJ_n(x)}{dx} t^n$$

であるので、これと母関数 (4.1.1) の右辺を (4.1.23) に代入して

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{dJ_n(x)}{dx} t^n &= \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2 \frac{dJ_n(x)}{dx} t^n &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^{n+1} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^{n-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] t^n \end{aligned}$$

t^n の係数を比較して次を得る。

$$2 \frac{dJ_n(x)}{dx} = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

□

■母関数, 微分漸化式 \implies 昇降演算子 まず下降演算子については $\frac{1}{2} [(4.1.11) + (4.1.10)]$ を計算して

$$\left(\frac{d}{dx} + \frac{n}{x} \right) J_n(x) = J_{n-1}(x)$$

上昇演算子については $\frac{1}{2} [(4.1.11) - (4.1.10)]$ を計算して

$$\left(\frac{d}{dx} - \frac{n}{x} \right) J_n(x) = -J_{n+1}(x)$$

□

■昇降演算子 \implies 微分方程式 上昇演算子 (4.1.13) の両辺に左から $\left(\frac{d}{dx} + \frac{n+1}{x} \right)$ を作用させると、左辺は

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} + \frac{n+1}{x} \right) \left(\frac{d}{dx} - \frac{n}{x} \right) J_n(x) &= \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} - \frac{n}{x} \right) + \frac{n+1}{x} \left(\frac{d}{dx} - \frac{n}{x} \right) \right] J_n(x) \\ &= \left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{n}{x^2} - \frac{n}{x} \frac{d}{dx} \right) + \left(\frac{n+1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{n^2+n}{x^2} \right) \right] J_n(x) \\ &= \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{n^2}{x^2} \right) J_n(x) \end{aligned}$$

一方右辺は $-\left(\frac{d}{dx} + \frac{n+1}{x} \right) J_{n+1}$ であるがこれは下降演算子 (4.1.12) から $-J_n(x)$ に等しい。よって、

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{n^2}{x^2} \right) J_n(x) = -J_n(x) \quad \therefore \frac{d^2 J_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_n(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) J_n(x) = 0$$

また、得られた微分方程式において $x \rightarrow kx$ と置き換えると

$$\frac{d^2 J_n(kx)}{d(kx)^2} + \frac{1}{kx} \frac{dJ_n(kx)}{d(kx)} + \left(1 - \frac{n^2}{(kx)^2} \right) J_n(kx) = 0$$

となり、 $\frac{d}{d(kx)} = \frac{dx}{d(kx)} \frac{d}{dx} = \frac{1}{k} \frac{d}{dx}$ に注意して整理すると (4.1.15) が得られる。さらに (4.1.14), (4.1.15) はそれぞれ (4.1.16), (4.1.17) のようにも書ける。 □

■昇降演算子 \implies 微分・積分公式 下降演算子 (4.1.12) の両辺に x^n をかけると

$$\left(x^n \frac{d}{dx} + nx^{n-1}\right) J_n(x) = x^n J_{n-1}(x) \quad \therefore \frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$$

これより積分公式は

$$\int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x) + C$$

同様に上昇演算子 (4.1.13) の両辺に x^{-n} をかけると

$$\left(x^{-n} \frac{d}{dx} - nx^{-n-1}\right) J_n(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad \therefore \frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

これより積分公式は

$$\int x^{-n} J_{n+1}(x) dx = -x^{-n} J_n(x) + C$$

□

4.1.2 一般次数の Bessel 関数 (第 1 種 Bessel 関数)

整数次の Bessel 関数 $J_n(x)$ は、一般項 (4.1.9) において整数 n を任意の実数 ν に置き換えることで一般次数まで拡張できる。これに伴い階乗 $(n+i)!$ はガンマ関数 $\Gamma(\nu+i+1)$ に拡張される。次数 ν が整数でないときは母関数は定義できない。 $J_\nu(x)$ の定義域は複素数までカバーできるが、 ν が整数でないときは $J_\nu(x)$ は負の実数上で定義されないことに注意が必要である*2。また、後で球 Bessel 関数についての重要な公式を導くために必要となる高階導関数表示もここで紹介する。これは $J_\nu(x)$ に関する微分公式を n 回用いるだけで導かれる。

公式集

■一般項 (定義)

$$J_\nu(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(\nu+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i} \quad (\nu \notin \mathbb{Z} \wedge x < 0 \text{ を除く}) \quad (4.1.24)$$

■漸化式

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) \quad (4.1.25)$$

■微分漸化式

$$2 \frac{dJ_\nu(x)}{dx} = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) \quad (4.1.26)$$

■昇降演算子

$$\text{下降演算子} \quad \left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x}\right) J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) \quad (4.1.27)$$

$$\text{上昇演算子} \quad \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x}\right) J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) \quad (4.1.28)$$

■微分方程式

$$\frac{d^2 J_\nu(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_\nu(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_\nu(x) = 0 \quad (4.1.29)$$

$$\frac{d^2 J_\nu(kx)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_\nu(kx)}{dx} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_\nu(kx) = 0 \quad (4.1.30)$$

■自己随伴形

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_\nu(x) \right] + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(x) = 0 \quad (4.1.31)$$

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_\nu(kx) \right] + \left(k^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(kx) = 0 \quad (4.1.32)$$

*2 指数関数 a^x は $x \in \mathbb{Z}$ を除いて $a < 0$ の領域で意味をなさない。

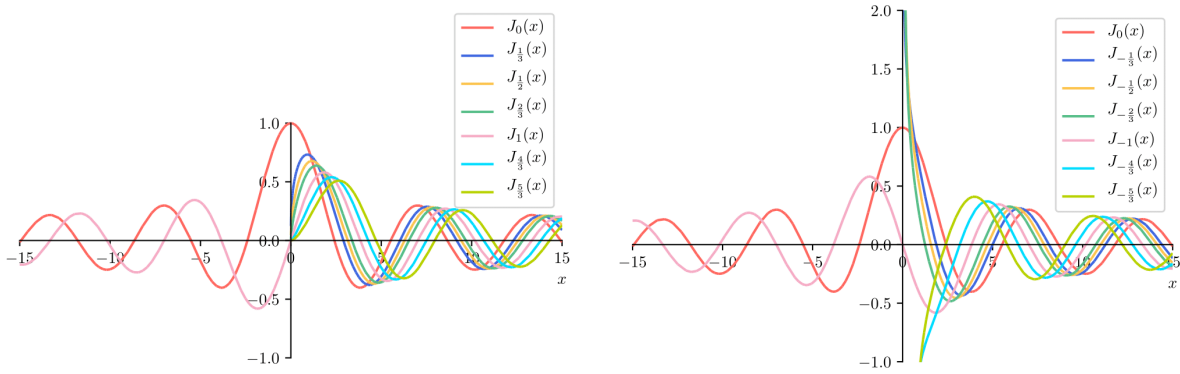


図 4.3 一般次数の Bessel 関数 $J_\nu(x)$

■微分・積分公式

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad \int x^\nu J_{\nu-1}(x)dx = x^\nu J_\nu(x) + C \quad (4.1.33)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x), \quad \int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)dx = -x^{-\nu} J_\nu(x) + C \quad (4.1.34)$$

■高階導関数表示 $n = 0, 1, 2, \dots$ とすると

$$x^{-\nu-n} J_{\nu+n}(x) = (-1)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n [x^{-\nu} J_\nu(x)] \quad (4.1.35)$$

$$x^{\nu-n} J_{\nu-n}(x) = \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n [x^\nu J_\nu(x)] \quad (4.1.36)$$

証明

一般項 (4.1.24) が整数次のときと同形の漸化式 (4.1.25) および微分漸化式 (4.1.26) を満たすことを確認すれば、後の昇降演算子や微分方程式、微分・積分公式は整数次のときとまったく同じ議論により自動的に証明される。最後の高階導関数表示だけは微分公式 (4.1.33), (4.1.34) から導く。

■一般項 \implies 漸化式 一般項 (4.1.24) を用いて $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)$ を計算する。

$$\begin{aligned} & J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(\nu+i)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(\nu+i+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i+1} \\ &= \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(\nu+i)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i-1} \right] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)! \Gamma(\nu+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i-1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(\nu+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i-1} [(\nu+i) - i] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \nu}{i! \Gamma(\nu+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \nu}{i! \Gamma(\nu+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i-1} = \frac{2\nu}{x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(\nu+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i} \\ &= \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \end{aligned}$$

□

■一般項 \Rightarrow 微分漸化式 一般項 (4.1.24) を用いて $2\frac{dJ_\nu(x)}{dx}$ を計算する。

$$\begin{aligned}
 2\frac{dJ_\nu(x)}{dx} &= 2\frac{d}{dx} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(\nu+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i} \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i(\nu+2i)}{i! \Gamma(\nu+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i-1} \\
 &= \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i(\nu+2i)}{i! \Gamma(\nu+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i-1} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} + \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i(\nu+i)}{i! \Gamma(\nu+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i i}{i! \Gamma(\nu+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i-1} \right] \\
 &= \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(\nu+i)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i-1} \right] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i-1)! \Gamma(\nu+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i-1} \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(\nu+i)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i-1} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(\nu+i+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i+1} \\
 &= J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)
 \end{aligned}$$

□

■微分公式 \Rightarrow 高階導関数表示 (4.1.34) の微分公式の両辺を x でわって

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu-1} J_{\nu+1}(x)$$

と変形すると、関数 $x^{-\nu} J_\nu(x)$ に 1 回 $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$ を作用させると x の指数が 1 減り、Bessel 関数の次数が 1 増え、符号が反転することが読み取れる。したがって $x^{-\nu} J_\nu(x)$ に対して $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$ を n 回作用させると

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n [x^{-\nu} J_\nu(x)] = (-1)^n x^{-\nu-n} J_{\nu+n}(x)$$

となるのが分かり、(4.1.35) が示される。同様に (4.1.33) の微分公式の両辺を x でわって

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^{\nu-1} J_{\nu-1}(x)$$

と変形すると、関数 $x^\nu J_\nu(x)$ に 1 回 $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$ を作用させると x の指数と Bessel 関数の次数がともに 1 ずつ減ることが読み取れるので、 $x^\nu J_\nu(x)$ に対して $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$ を n 回作用させると

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n [x^\nu J_\nu(x)] = x^{\nu-n} J_{\nu-n}(x)$$

となるのが分かり、(4.1.36) が示される。

□

4.1.3 Neumann 関数 (第 2 種 Bessel 関数)

Bessel の微分方程式 (4.1.29) は 2 階であるので、その基本解は $J_\nu(x)$ のほかにもう 1 つあるはずである。方程式中では ν が ν^2 の形で現れているので、もうひとつの基本解としては $J_{-\nu}(x)$ が考えられ、実際 ν が整数でないときは $J_\nu(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ は線形独立となり基本解に選ぶことができる。ところが ν が整数 n であるときは $J_n(x)$ と $J_{-n}(x)$ の間に (4.1.4) の関係があるため線形独立とならず、基本解として選べない。そこで ν が整数であるときでも Bessel の微分方程式 (4.1.29) の 2 つ目の基本解を構成できるものとして採用されるのが (4.1.39), (4.1.40) により定義される Neumann 関数 (第 2 種 Bessel 関数) $N_\nu(x)$ である*3。 $N_\nu(x)$ は以下に示すように $J_\nu(x)$ とまったく同形の漸化式、微分漸化式、昇降演算子、微分方程式、微分・積分公式、高階導関数表示が成立する。

*3 参考までに $J_\nu(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ のロンスキアン $W[J_\nu, J_{-\nu}](x)$ 、 $J_\nu(x)$ と $N_\nu(x)$ のロンスキアン $W[J_\nu, N_\nu](x)$ を記しておく。

$$W[J_\nu, J_{-\nu}](x) = J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J'_{\nu}(x)J_{-\nu}(x) = -\frac{2 \sin \pi \nu}{\pi x} \quad (4.1.37)$$

$$W[J_\nu, N_\nu](x) = J_\nu(x)N'_\nu(x) - N'_\nu(x)J_\nu(x) = \frac{2}{\pi \nu} \quad (4.1.38)$$

公式集

■ 定義

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu} \quad (\nu \notin \mathbb{Z}) \quad (4.1.39)$$

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(x) \quad (\nu = n \in \mathbb{Z}) \quad (4.1.40)$$

■ 整数次の表式

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \quad (4.1.41)$$

■ 非負整数次の一般項 (参考)*4

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \log \frac{x}{2} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!(n+i)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2i} [\psi(i+1) + \psi(n+i+1)] \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i-1)!}{i!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2i} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

■ 負の整数次

$$N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x) \quad (4.1.44)$$

■ 漸化式

$$\frac{2\nu}{x} N_\nu(x) = N_{\nu-1}(x) + N_{\nu+1}(x) \quad (4.1.45)$$

■ 微分漸化式

$$2 \frac{dN_\nu(x)}{dx} = N_{\nu-1}(x) - N_{\nu+1}(x) \quad (4.1.46)$$

■ 昇降演算子

$$\text{下降演算子} \quad \left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x} \right) N_\nu(x) = N_{\nu-1}(x) \quad (4.1.47)$$

$$\text{上昇演算子} \quad \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x} \right) N_\nu(x) = -N_{\nu+1}(x) \quad (4.1.48)$$

■ 微分方程式

$$\frac{d^2 N_\nu(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dN_\nu(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) N_\nu(x) = 0 \quad (4.1.49)$$

$$\frac{d^2 N_\nu(kx)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dN_\nu(kx)}{dx} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) N_\nu(kx) = 0 \quad (4.1.50)$$

■ 自己随伴形

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} N_\nu(x) \right] + \left(x - \frac{\nu^2}{x} \right) N_\nu(x) = 0 \quad (4.1.51)$$

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} N_\nu(kx) \right] + \left(k^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) N_\nu(kx) = 0 \quad (4.1.52)$$

*4 ここで $\psi(z)$ はディガンマ関数と呼ばれ、次のように定義される。

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad (4.1.42)$$

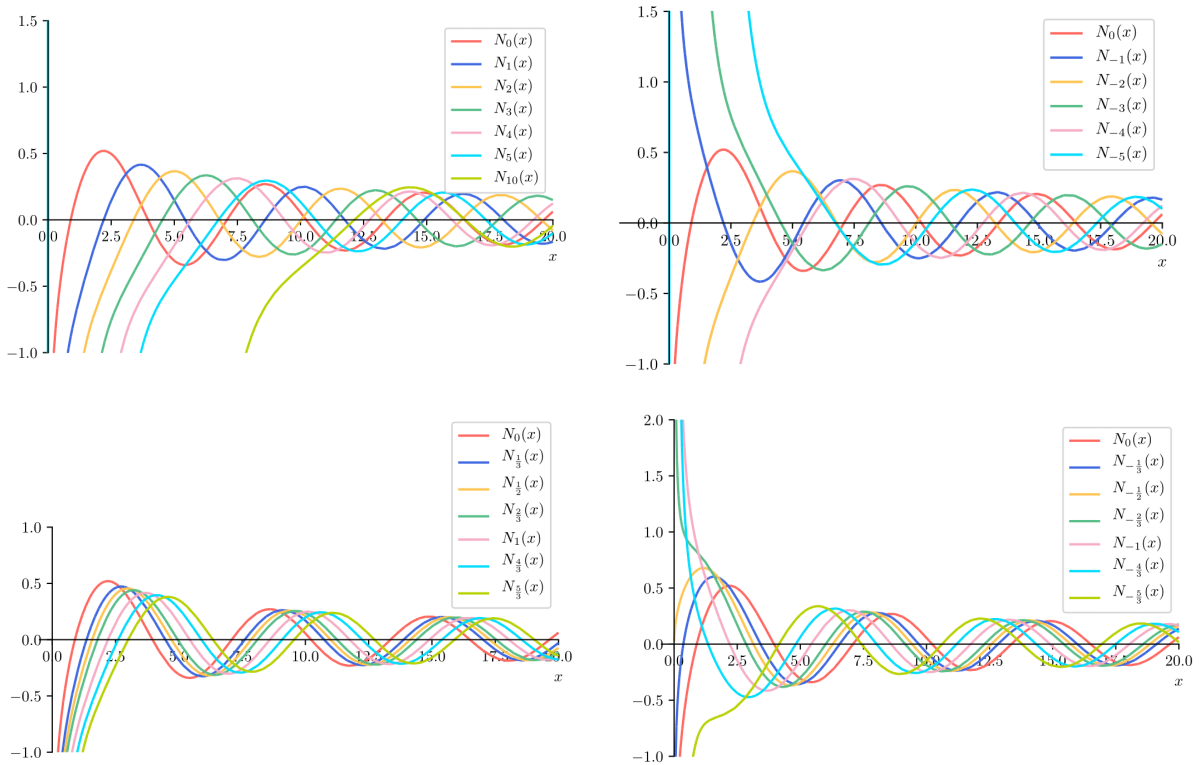


図 4.4 Neumann 関数 $N_\nu(x)$

■微分・積分公式

$$\frac{d}{dx}[x^\nu N_\nu(x)] = x^\nu N_{\nu-1}(x), \quad \int x^\nu N_{\nu-1}(x)dx = x^\nu N_\nu(x) + C \quad (4.1.53)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu} N_\nu(x)] = -x^{-\nu} N_{\nu+1}(x), \quad \int x^{-\nu} N_{\nu+1}(x)dx = -x^{-\nu} N_\nu(x) + C \quad (4.1.54)$$

■高階導関数表示 $n = 0, 1, 2, \dots$ とすると

$$x^{-\nu-n} N_{\nu+n}(x) = (-1)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n [x^{-\nu} N_\nu(x)] \quad (4.1.55)$$

$$x^{\nu-n} N_{\nu-n}(x) = \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n [x^\nu N_\nu(x)] \quad (4.1.56)$$

証明

まず定義 (4.1.39), (4.1.40) から整数次についての等式 (4.1.41)~(4.1.44) を示す。次に定義 (4.1.39) と整数次の表式 (4.1.41) から $J_\nu(x)$ と同じ漸化式 (4.1.45) および微分漸化式 (4.1.46) が成り立つことを確認する。すると残りの (4.1.49) ~ (4.1.56) はすべて $J_n(x), J_\nu(x)$ のときとまったく同じ議論により自動的に証明される。

■定義 \implies 整数次の表式 極限 (4.1.40) は $\frac{0}{0}$ 不定形であるので L'Hôpital の定理を用いることができる。

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu} \\ &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \cos \pi \nu - J_\nu(x) \pi \sin \pi \nu - \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}}{\pi \cos \pi \nu} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \end{aligned}$$

□

■整数次の表式 \implies 負の整数次 整数次の表式 (4.1.41) から

$$\begin{aligned}
 N_{-n}(x) &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^{-n} \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=-n} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial(-\nu)} - (-1)^n \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial(-\nu)} \right]_{\nu=n} \\
 &= (-1)^n \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \\
 &= (-1)^n N_n(x)
 \end{aligned}$$

□

■定義, 整数次の表式 \implies 漸化式 $\nu \notin \mathbb{Z}$ のとき, (4.1.39) から

$$\begin{aligned}
 N_{\nu-1}(x) + N_{\nu+1}(x) &= \frac{J_{\nu-1}(x) \cos \pi(\nu-1) - J_{-\nu+1}(x)}{\sin \pi(\nu-1)} + \frac{J_{\nu+1}(x) \cos \pi(\nu+1) - J_{-\nu-1}(x)}{\sin \pi(\nu+1)} \\
 &= \frac{J_{\nu-1}(x) \cos \pi\nu + J_{-\nu+1}(x)}{\sin \pi\nu} + \frac{J_{\nu+1}(x) \cos \pi\nu + J_{-\nu-1}(x)}{\sin \pi\nu} \\
 &= \frac{(J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)) \cos \pi\nu + (J_{-\nu-1}(x) + J_{-\nu+1}(x))}{\sin \pi\nu} \\
 &= \frac{2\nu}{x} \frac{J_\nu(x) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu} \quad ((4.1.25) \text{ を用いた}) \\
 &= \frac{2\nu}{x} N_\nu(x)
 \end{aligned}$$

次に $\nu = n \in \mathbb{Z}$ のとき, (4.1.41) から

$$\begin{aligned}
 N_{n-1}(x) + N_{n+1}(x) &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^{n-1} \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n-1} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^{n+1} \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n+1} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_{\nu-1}(x)}{\partial \nu} - (-1)^{n-1} \frac{\partial J_{-\nu+1}(x)}{\partial \nu} + \frac{\partial J_{\nu+1}(x)}{\partial \nu} - (-1)^{n+1} \frac{\partial J_{-\nu-1}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} (J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)) + (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} (J_{-\nu-1}(x) + J_{-\nu+1}(x)) \right]_{\nu=n} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \right) + (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{-2\nu}{x} J_{-\nu}(x) \right) \right]_{\nu=n} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{x} J_\nu(x) + \frac{2\nu}{x} \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \left\{ \frac{2}{x} J_{-\nu}(x) + \frac{2\nu}{x} \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right\} \right]_{\nu=n} \\
 &= \frac{2n}{x} \cdot \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \quad (J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \text{ を用いた}) \\
 &= \frac{2n}{x} N_n(x)
 \end{aligned}$$

□

■定義, 整数次の表式 \implies 微分漸化式 $\nu \notin \mathbb{Z}$ のとき, (4.1.39) から

$$\begin{aligned}
 N_{\nu-1}(x) - N_{\nu+1}(x) &= \frac{J_{\nu-1}(x) \cos \pi(\nu-1) - J_{-\nu+1}(x)}{\sin \pi(\nu-1)} - \frac{J_{\nu+1}(x) \cos \pi(\nu+1) - J_{-\nu-1}(x)}{\sin \pi(\nu+1)} \\
 &= \frac{J_{\nu-1}(x) \cos \pi\nu + J_{-\nu+1}(x)}{\sin \pi\nu} - \frac{J_{\nu+1}(x) \cos \pi\nu + J_{-\nu-1}(x)}{\sin \pi\nu} \\
 &= \frac{(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)) \cos \pi\nu - (J_{-\nu-1}(x) - J_{-\nu+1}(x))}{\sin \pi\nu} \\
 &= 2 \frac{d}{dx} \frac{J_\nu(x) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu} \quad ((4.1.26) \text{ を用いた}) \\
 &= 2 \frac{dN_\nu(x)}{dx}
 \end{aligned}$$

次に $\nu = n \in \mathbb{Z}$ のとき、(4.1.41) から

$$\begin{aligned}
 & N_{n-1}(x) - N_{n+1}(x) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^{n-1} \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n-1} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^{n+1} \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n+1} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_{\nu-1}(x)}{\partial \nu} - (-1)^{n-1} \frac{\partial J_{-\nu+1}(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial J_{\nu+1}(x)}{\partial \nu} + (-1)^{n+1} \frac{\partial J_{-\nu-1}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} (J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} (J_{-\nu-1}(x) - J_{-\nu+1}(x)) \right]_{\nu=n} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \left(2 \frac{dJ_\nu(x)}{dx} \right) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} \left(2 \frac{dJ_{-\nu}(x)}{dx} \right) \right]_{\nu=n} \\
 &= 2 \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \\
 &= 2 \frac{dN_n(x)}{dx}
 \end{aligned}$$

□

4.1.4 Hankel 関数 (第 3 種 Bessel 関数)

後述する漸近形の節で示すように、 x が十分大きい領域では $J_\nu(x)$ は \cos 、 $N_\nu(x)$ は \sin のように振舞うことが知られている。これまで三角関数 $\cos x, \sin x$ の代わりに指数関数 $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ を用いて議論すると、計算などにおいて便利になる場面が幾度もあった。同じように $J_\nu(x), N_\nu(x)$ の代わりに $J_\nu(x) \pm iN_\nu(x)$ を考えると便利になることがある。このように定義される関数を Hankel 関数 (第 3 種 Bessel 関数) という。正のほうは第 1 種 Hankel 関数と呼ばれ、負のほうは第 2 種 Hankel 関数と呼ばれる。

■定義

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \quad (\text{第 1 種 Hankel 関数}) \quad (4.1.57)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \quad (\text{第 2 種 Hankel 関数}) \quad (4.1.58)$$

4.1.5 円柱関数まとめ

$J_\nu(x), N_\nu(x), H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x)$ を総称して円柱関数と呼ぶ。

4.1.5.1 Bessel の微分方程式の一般解

Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (4.1.59)$$

の一般解は、

1. ν が整数でないならば

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x) \quad (4.1.60)$$

2. 一般には

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x) \quad \text{あるいは} \quad y = c_1 H_\nu^{(1)}(x) + c_2 H_\nu^{(2)}(x) \quad (4.1.61)$$

と書ける。

4.1.5.2 円柱関数の共通の性質

任意の円柱関数 $Z_\nu(x)$ は以下を共通で満たす。

■漸化式

$$\frac{2\nu}{x} Z_\nu(x) = Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x) \quad (4.1.62)$$

■微分漸化式

$$2 \frac{dZ_\nu(x)}{dx} = Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x) \quad (4.1.63)$$

■昇降演算子

$$\text{下降演算子} \quad \left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x} \right) Z_\nu(x) = Z_{\nu-1}(x) \quad (4.1.64)$$

$$\text{上昇演算子} \quad \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x} \right) Z_\nu(x) = -Z_{\nu+1}(x) \quad (4.1.65)$$

■微分方程式

$$\frac{d^2 Z_\nu(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dZ_\nu(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) Z_\nu(x) = 0 \quad (4.1.66)$$

$$\frac{d^2 Z_\nu(kx)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dZ_\nu(kx)}{dx} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) Z_\nu(kx) = 0 \quad (4.1.67)$$

■自己随伴形

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dZ_\nu(x)}{dx} \right] + \left(x - \frac{\nu^2}{x} \right) Z_\nu(x) = 0 \quad (4.1.68)$$

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dZ_\nu(kx)}{dx} \right] + \left(k^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) Z_\nu(kx) = 0 \quad (4.1.69)$$

■微分・積分公式

$$\frac{d}{dx} [x^\nu Z_\nu(x)] = x^\nu Z_{\nu-1}(x), \quad \int x^\nu Z_{\nu-1}(x) dx = x^\nu Z_\nu(x) + C \quad (4.1.70)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-\nu} Z_\nu(x)] = -x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x), \quad \int x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x) dx = -x^{-\nu} Z_\nu(x) + C \quad (4.1.71)$$

■高階導関数表示 $n = 0, 1, 2, \dots$ とすると

$$x^{-\nu-n} Z_{\nu+n}(x) = (-1)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n [x^{-\nu} Z_\nu(x)] \quad (4.1.72)$$

$$x^{\nu-n} Z_{\nu-n}(x) = \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n [x^\nu Z_\nu(x)] \quad (4.1.73)$$

4.1.6 漸近形 (参考)

■漸近形 十分大きな x に対して

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.1.74)$$

$$N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.1.75)$$

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left[i \left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (4.1.76)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left[-i \left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (4.1.77)$$

すなわち、 $J_\nu(x), N_\nu(x)$ は x が大きい領域では振幅が \sqrt{x} に反比例して小さくなる三角関数のように振舞う (図 4.5 参照)。

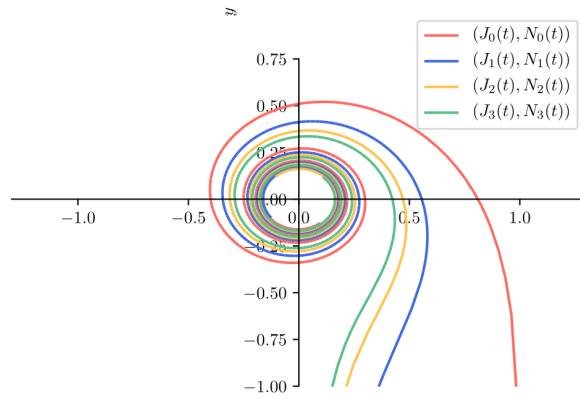


図 4.5 $(x, y) = (J_n(t), N_n(t))$ ($n = 0, 1, 2, 3$) とした図。 t が大きくなると半径を小さくしながら円に収束してゆく様子が分かる

4.1.7 Fourier-Bessel 展開

4.1.7.1 Bessel 関数の直交性

Bessel 関数は他の特殊関数と同様に直交性を持っている。ただし Bessel 関数の直交性は少し趣が異なっており、他の特殊関数のように異なる次数同士の関数の積を考えるのではなく、同じ次数であるが引数が異なるもの同士の関数の積を考えることになる。区間 $[0, a]$ に対する直交性を考えることができるが、その際 Bessel 関数の零点と呼ばれるものが重要な役割を果たすことになる。

Bessel 関数の直交性

一般次数の Bessel 関数 $J_\nu(x)$ ($\nu > -1$) について、 $J_\nu(\alpha) = 0$ を満たす正の数 α (Bessel 関数の零点という) を小さい順に $\alpha_{\nu 1}, \alpha_{\nu 2}, \dots$ とすると、次の直交性が成立する。

$$\int_0^a x J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}x\right) J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) dx = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu n})]^2 \delta_{mn} \tag{4.1.78}$$

[証明]

これまで直交性は母関数を積分することで証明をしてきたが、今回は一般次数に対する Bessel 関数の直交性を示すことになるので、母関数がそもそも存在せず、それゆえ別の方法を考えねばならない。このような時は自己随伴形の微分方程式 (4.1.32) を用いる^{*5 *6}。

直交性 (4.1.32) において k の代わりに $\frac{\alpha_{\nu m}}{a}, \frac{\alpha_{\nu n}}{a}$ としたものを並べてみると、

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}x\right) \right] + \left(\frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2}x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}x\right) = 0 \tag{4.1.79}$$

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) \right] + \left(\frac{\alpha_{\nu n}^2}{a^2}x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) = 0 \tag{4.1.80}$$

^{*5} 実は他の特殊関数の直交性も、自己随伴形の微分方程式から以下で行う処理と同様に示すことができる。ただしその方法では規格化の絶対値を導くことはできないので、他の特殊関数の直交性では母関数の積分により証明する手法を採用している。

^{*6} 以下の証明において困惑しがちな部分を先にここで指摘しておく。
 まず第一に $\left[\frac{df(x)}{dx} \right]_{x=a} = \frac{df(a)}{da}$ である。 $f(x)$ を x で微分した式に $x = a$ を代入したものと、先に $f(x)$ に $x = a$ を代入して、その後 a を 1 つの変数と見てそれで微分したものが等しくなることは少し考えると分かると思う。
 第二に $f'(ax) = \frac{df(ax)}{d(ax)} = \frac{1}{a} \frac{df(ax)}{dx}$ である。 $f'(ax) = \frac{df(ax)}{dx}$ ではない。元々 $f'(ax)$ とは関数 $f(x)$ を x で微分した式に対して x を ax に置き換えるという意味であった。すなわち $f'(ax) = \left[\frac{df(x)}{dx} \right]_{x \rightarrow ax}$ である。

ここで $J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) \times (4.1.79) - J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}x\right) \times (4.1.80)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} & J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}x\right) \right] - J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}x\right) \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) \right] \\ &= \frac{\alpha_{\nu n}^2 - \alpha_{\nu m}^2}{a^2} x J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}x\right) J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) \end{aligned} \quad (4.1.81)$$

(4.1.81) の両辺を x について 0 から a まで積分すると、左辺は部分積分により

$$\begin{aligned} & \int_0^a J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}x\right) \right] dx - \int_0^a J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}x\right) \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) \right] dx \\ &= \left[J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) x \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}x\right) \right]_0^a - \int_0^a \frac{d}{dx} \left[J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) \right] x \frac{d}{dx} \left[J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}x\right) \right] dx \\ &\quad - \left[J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}x\right) x \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) \right]_0^a + \int_0^a \frac{d}{dx} \left[J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}x\right) \right] x \frac{d}{dx} \left[J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) \right] dx \\ &= J_\nu(\alpha_{\nu n}) a \frac{d}{da} J_\nu(\alpha_{\nu m}) - J_\nu(\alpha_{\nu m}) a \frac{d}{da} J_\nu(\alpha_{\nu n}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.82)$$

となる*7。一方 (4.1.81) の右辺は

$$\frac{\alpha_{\nu n}^2 - \alpha_{\nu m}^2}{a^2} \int_0^a x J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}x\right) J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) dx$$

であるので、 $m \neq n$ であるとき

$$\int_0^a x J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}x\right) J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) dx = 0 \quad (4.1.83)$$

であることが確認される。

規格化 ところが $m = n$ であるときは、上の結果をそのまま用いると (4.1.81) の積分結果が $0 = 0$ となってしまう、意味を持たなくなってしまう。そこで左辺の積分については (4.1.82) まで戻って $\alpha_{\nu m} = \alpha_{\nu n} + \epsilon$ として計算し、最後に $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取ることを考えればよい。Taylor 展開により ϵ の 1 次の項まであらわに書くことにすると、(4.1.82) は

$$\begin{aligned} & J_\nu(\alpha_{\nu n}) a \frac{d}{da} J_\nu(\alpha_{\nu m}) - J_\nu(\alpha_{\nu m}) a \frac{d}{da} J_\nu(\alpha_{\nu n}) \\ &= \cancel{J_\nu(\alpha_{\nu n}) a \frac{d}{da} J_\nu(\alpha_{\nu n} + \epsilon)} - J_\nu(\alpha_{\nu n} + \epsilon) a \frac{d}{da} J_\nu(\alpha_{\nu n}) \\ &= -a \left[\cancel{J_\nu(\alpha_{\nu n})} + \epsilon J'_\nu(\alpha_{\nu n}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \cdot \frac{\alpha_{\nu n}}{a} \cdot J'_\nu(\alpha_{\nu n}) \\ &= -\epsilon \alpha_{\nu n} [J'_\nu(\alpha_{\nu n})]^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.1.84)$$

一方 (4.1.81) の右辺は

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_{\nu n}^2 - \alpha_{\nu m}^2}{a^2} \int_0^a x J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}x\right) J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) dx \\ &= \frac{\alpha_{\nu n}^2 - (\alpha_{\nu n} + \epsilon)^2}{a^2} \int_0^a x J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n} + \epsilon}{a}x\right) J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) dx \\ &= -\frac{\epsilon(2\alpha_{\nu n} + \epsilon)}{a^2} \int_0^a x J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n} + \epsilon}{a}x\right) J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) dx \end{aligned} \quad (4.1.85)$$

であるので、(4.1.84), (4.1.85) から

$$(2\alpha_{\nu n} + \epsilon) \int_0^a x J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n} + \epsilon}{a}x\right) J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) dx = a^2 \alpha_{\nu n} [J'_\nu(\alpha_{\nu n})]^2 + \mathcal{O}(\epsilon)$$

$\epsilon \rightarrow 0$ とすると

$$\int_0^a x \left[J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a}x\right) \right]^2 dx = \frac{a^2}{2} [J'_\nu(\alpha_{\nu n})]^2$$

*7 (4.1.82) を得る際に $[\cdot]_0^a$ の内部が $x = 0$ で 0 になることをあたかも自明であるかのように計算しているが、実はこれは $\nu > -1$ でなければいけない (一般項 (4.1.24) から $[\cdot]_0^a$ の内部が $x \sim 0$ でどうなるか考えてみよ)。これが公式 (4.1.78) を提示する際にさりげなく $\nu > -1$ という条件を設けた所以である。またこのことを考慮に入れると、Bessel 関数 $J_\nu(x)$ と同じ微分方程式を持つが直交性を持たない Neumann 関数 $N_\nu(x)$ が直交性を持たないことも分かると思う。

最後に上昇演算子 (4.1.28) から

$$J'_\nu(\alpha_{\nu n}) = \frac{\nu}{\alpha_{\nu n}} J_\nu(\alpha_{\nu n}) - J_{\nu+1}(\alpha_{\nu n}) = -J_{\nu+1}(\alpha_{\nu n})$$

であることを用いると、次が成り立つことが示される。

$$\int_0^a x \left[J_\nu \left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a} x \right) \right]^2 dx = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu n})]^2 \tag{4.1.86}$$

(4.1.83), (4.1.86) をまとめると (4.1.78) のように書ける。

□

4.1.7.2 Fourier-Bessel 展開

周期 L の複素指数関数 $e^{i\frac{2n\pi}{L}x}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) は次のような直交性を持っていた。

$$\int_0^L e^{-i\frac{2m\pi}{L}x} e^{i\frac{2n\pi}{L}x} dx = L \delta_{mn}$$

この直交性 (と完全性) から、区間 $[0, L]$ においてしかるべき条件*8を持つ関数 $f(x)$ は次のように Fourier 級数展開できるのであった。

$$\begin{aligned} \text{展開式} \quad f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi}{L}x} \\ \text{展開係数} \quad c_n &= \frac{1}{L} \int_0^L e^{-i\frac{2n\pi}{L}x} f(x) dx \end{aligned}$$

一般次数の Bessel 関数にも直交性 (4.1.78) があるので、Fourier 級数展開と同じようなことができる。これを **Fourier-Bessel 展開**と呼ぶことがある。Fourier-Bessel 展開は円型膜の振動を考えるとときなどに応用される (問題 [4-2])。

Fourier-Bessel 展開

一般次数の Bessel 関数 $J_\nu(x)$ ($\nu > -1$) の正の零点を小さい順に $\alpha_{\nu 1}, \alpha_{\nu 2}, \dots$ とする。区間 $[0, a]$ で定義された関数 $f(x)$ がしかるべき条件を持つとき、関数 $f(x)$ は次のように Fourier-Bessel 展開できる。

$$\text{展開式} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{\nu n} J_\nu \left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a} x \right) \tag{4.1.87}$$

$$\text{展開係数} \quad c_{\nu n} = \frac{2}{a^2 [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu n})]^2} \int_0^a x f(x) J_\nu \left(\frac{\alpha_{\nu n}}{a} x \right) dx \tag{4.1.88}$$

[例] x^ν ($\nu > -1$) の Fourier-Bessel 展開

簡単に手計算できる例として、区間 $[0, 1]$ における x^ν ($\nu > -1$) の Fourier-Bessel 展開を考えよう。上の公式で $f(x) = x^\nu$ ($\nu > -1$)、 $a = 1$ とすると、展開係数 $c_{\nu n}$ は $z = \alpha_{\nu n} x$, $dx = \frac{1}{\alpha_{\nu n}} dz$ なる置換により

x	0	→	1
z	0	→	$\alpha_{\nu n}$

$$\begin{aligned} c_{\nu n} &= \frac{2}{[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu n})]^2} \int_0^1 x^{\nu+1} J_\nu(\alpha_{\nu n} x) dx \\ &= \frac{2}{[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu n})]^2} \cdot \frac{1}{\alpha_{\nu n}^{\nu+2}} \int_0^{\alpha_{\nu n}} z^{\nu+1} J_\nu(z) dz \\ &= \frac{2}{[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu n})]^2} \cdot \frac{1}{\alpha_{\nu n}^{\nu+2}} [z^{\nu+1} J_{\nu+1}(z)]_0^{\alpha_{\nu n}} \quad (\because \text{積分公式 (4.1.33)}) \\ &= \frac{2}{\alpha_{\nu n} J_{\nu+1}(\alpha_{\nu n})} \quad (\because \nu > -1) \end{aligned}$$

よって区間 $[0, 1]$ における x^ν ($\nu > -1$) の Fourier-Bessel 展開は次のようになる。

$$x^\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_{\nu n} J_{\nu+1}(\alpha_{\nu n})} J_\nu(\alpha_{\nu n} x)$$

*8 区分的に滑らか、かつ絶対可積分であること。

4.2 変形 Bessel 関数

4.2.1 第1種変形 Bessel 関数

第1種変形 Bessel 関数 $I_\nu(x)$ は (4.2.1) のように Bessel 関数 $J_\nu(x)$ を用いて定義する。虚数単位 i を用いているが、このように定義しても $I_\nu(x)$ が $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を満たすことは Bessel 関数の一般項 (4.1.24) から容易に分かる。 $I_\nu(x)$ に関する公式は $J_\nu(x)$ に関する公式で x を ix に置き換えることで直ちに導かれる。なおここでは記さないが、一度整数次の $I_n(x)$ の母関数を証明しておく、通常の Bessel 関数のときと同様に整数次の $I_n(x)$ に関する関係式を示すことができ、また一般項を示すと一般次数の $I_\nu(x)$ に関する関係式を導くことができる。

公式集

■ 定義

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \quad (4.2.1)$$

■ 母関数

$$g(t, x) = e^{\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n \quad (4.2.2)$$

■ 偶奇性

$$I_n(-x) = (-1)^n I_n(x) \quad (4.2.3)$$

■ 負の整数次

$$I_{-n}(x) = I_n(x) \quad (4.2.4)$$

■ 一般項

$$I_\nu(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i! \Gamma(\nu + i + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i} \quad (4.2.5)$$

■ 漸化式

$$\frac{2\nu}{x} I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) \quad (4.2.6)$$

■ 微分漸化式

$$2 \frac{dI_\nu(x)}{dx} = I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) \quad (4.2.7)$$

■ 昇降演算子

$$\text{下降演算子} \quad \left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x}\right) I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) \quad (4.2.8)$$

$$\text{上昇演算子} \quad \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x}\right) I_\nu(x) = I_{\nu+1}(x) \quad (4.2.9)$$

■ 微分方程式

$$\frac{d^2 I_\nu(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dI_\nu(x)}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) I_\nu(x) = 0 \quad (4.2.10)$$

$$\frac{d^2 I_\nu(kx)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dI_\nu(kx)}{dx} - \left(k^2 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) I_\nu(kx) = 0 \quad (4.2.11)$$

■ 自己随伴形

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} I_\nu(x) \right] - \left(x + \frac{\nu^2}{x} \right) I_\nu(x) = 0 \quad (4.2.12)$$

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} I_\nu(kx) \right] - \left(k^2 x + \frac{\nu^2}{x} \right) I_\nu(kx) = 0 \quad (4.2.13)$$

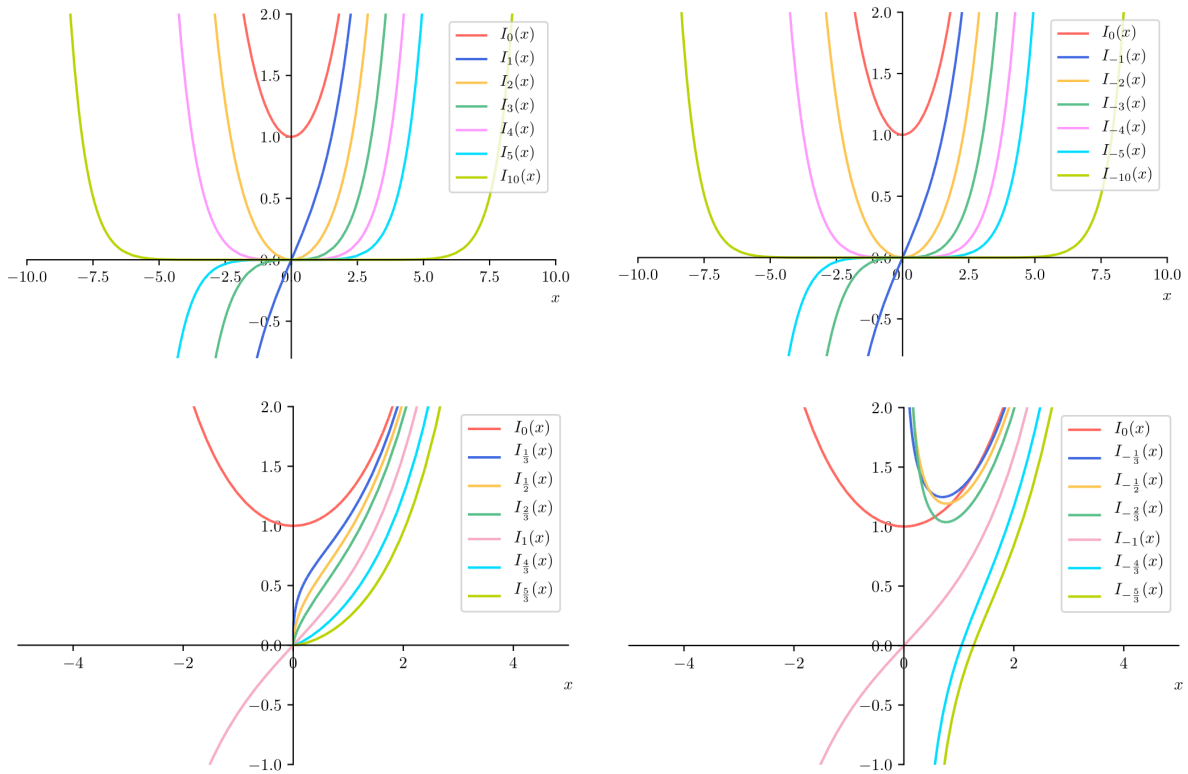


図 4.6 第 1 種変形 Bessel 関数 $I_\nu(x)$

■微分・積分公式

$$\frac{d}{dx}[x^\nu I_\nu(x)] = x^\nu I_{\nu-1}(x), \quad \int x^\nu I_{\nu-1}(x) dx = x^\nu I_\nu(x) + C \quad (4.2.14)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu} I_\nu(x)] = x^{-\nu} I_{\nu+1}(x), \quad \int x^{-\nu} I_{\nu+1}(x) dx = x^{-\nu} I_\nu(x) + C \quad (4.2.15)$$

■高階導関数表示 $n = 0, 1, 2, \dots$ とすると

$$x^{-\nu-n} I_{\nu+n}(x) = \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n [x^{-\nu} I_\nu(x)] \quad (4.2.16)$$

$$x^{\nu-n} I_{\nu-n}(x) = \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n [x^\nu I_\nu(x)] \quad (4.2.17)$$

証明

■母関数 Bessel 関数の母関数

$$\tilde{g}(t, x) = e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

において、 $t \rightarrow -it$, $x \rightarrow ix$ と置き換えて $g(t, x) \equiv \tilde{g}(-it, ix)$ とすると

$$g(t, x) = e^{\frac{ix}{2}(-it + \frac{1}{it})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(ix) (-it)^n \quad \therefore g(t, x) = e^{\frac{x}{2}(t + \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{-n} J_n(ix) t^n$$

変形 Bessel 関数の定義 (4.2.1) を用いて (4.2.2) を得る。 □

■偶奇性 $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$ を用いて

$$I_n(-x) = i^{-n} J_n(-ix) = i^{-n} (-1)^n J_n(ix) = (-1)^n I_n(x)$$

□

■負の整数次 $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ を用いて

$$I_{-n}(x) = i^n J_{-n}(ix) = i^n (-1)^n J_n(ix) = i^n \cdot i^{-2n} J_n(ix) = i^{-n} J_n(ix) = I_n(x)$$

□

■一般項 $J_\nu(x)$ に関する一般項 (4.1.24) を用いて

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= i^{-\nu} J_\nu(ix) \\ &= i^{-\nu} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(\nu + i + 1)} \left(\frac{ix}{2}\right)^{\nu+2i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i! \Gamma(\nu + i + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i} \end{aligned}$$

□

■漸化式 $J_\nu(x)$ に関する漸化式 (4.1.25) において $x \rightarrow ix$ とすると

$$\frac{2\nu}{ix} J_\nu(ix) = J_{\nu-1}(ix) + J_{\nu+1}(ix)$$

両辺を $i^{-\nu+1}$ 倍して

$$\frac{2\nu}{x} i^{-\nu} J_\nu(ix) = i^{-(\nu-1)} J_{\nu-1}(ix) - i^{-(\nu+1)} J_{\nu+1}(ix) \quad \therefore \frac{2\nu}{x} I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x)$$

□

■微分漸化式 $J_\nu(x)$ に関する微分漸化式 (4.1.26) において $x \rightarrow ix$ とすると

$$2 \frac{dJ_\nu(ix)}{d(ix)} = J_{\nu-1}(ix) - J_{\nu+1}(ix)$$

両辺を $i^{-\nu+1}$ 倍して

$$2 \frac{d(i^{-\nu} J_\nu(ix))}{dx} = i^{-(\nu-1)} J_{\nu-1}(ix) + i^{-(\nu+1)} J_{\nu+1}(ix) \quad \therefore 2 \frac{dI_\nu(x)}{dx} = I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x)$$

□

■下降演算子 $J_\nu(x)$ に関する下降演算子 (4.1.27) において $x \rightarrow ix$ とすると

$$\left(\frac{d}{d(ix)} + \frac{\nu}{ix}\right) J_\nu(ix) = J_{\nu-1}(ix)$$

両辺を $i^{-\nu+1}$ 倍して

$$\left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x}\right) i^{-\nu} J_\nu(ix) = i^{-(\nu-1)} J_{\nu-1}(ix) \quad \therefore \left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x}\right) I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x)$$

□

■上昇演算子 $J_\nu(x)$ に関する上昇演算子 (4.1.28) において $x \rightarrow ix$ とすると

$$\left(\frac{d}{d(ix)} - \frac{\nu}{ix}\right) J_\nu(ix) = -J_{\nu+1}(ix)$$

両辺を $i^{-\nu+1}$ 倍して

$$\left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x}\right) i^{-\nu} J_\nu(ix) = i^{-(\nu+1)} J_{\nu+1}(ix) \quad \therefore \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x}\right) I_\nu(x) = I_{\nu+1}(x)$$

□

■微分方程式 $J_\nu(x)$ に関する微分方程式 (4.1.29) において $x \rightarrow ix$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J_\nu(ix)}{d(ix)^2} + \frac{1}{ix} \frac{dJ_\nu(ix)}{d(ix)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{(ix)^2}\right) J_\nu(ix) &= 0 \\ \therefore \frac{d^2 J_\nu(ix)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_\nu(ix)}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_\nu(ix) &= 0 \end{aligned}$$

両辺を $i^{-\nu}$ 倍して (4.2.10) を得る。

また、得られた微分方程式において $x \rightarrow kx$ と置き換えると

$$\frac{d^2 I_\nu(kx)}{d(kx)^2} + \frac{1}{kx} \frac{dI_\nu(kx)}{d(kx)} - \left(1 + \frac{\nu^2}{(kx)^2}\right) I_\nu(kx) = 0$$

となり、 $\frac{d}{d(kx)} = \frac{1}{k} \frac{d}{dx}$ に注意して整理すると (4.2.11) が得られる。さらに (4.2.10), (4.2.11) はそれぞれ (4.2.12), (4.2.13) のようにも書ける。□

■微分・積分公式 $J_\nu(x)$ に関する微分公式 (4.1.33) において $x \rightarrow ix$ とすると

$$\frac{d}{d(ix)} [(ix)^\nu J_\nu(ix)] = (ix)^\nu J_{\nu-1}(ix)$$

両辺を $i^{-2\nu+1}$ 倍して

$$\frac{d}{dx} [x^\nu \cdot i^{-\nu} J_\nu(ix)] = x^\nu \cdot i^{-\nu+1} J_{\nu-1}(ix) \quad \therefore \frac{d}{dx} [x^\nu I_\nu(x)] = x^\nu I_{\nu-1}(x)$$

これより積分公式は

$$\int x^\nu I_{\nu-1}(x) dx = x^\nu I_\nu(x) + C$$

同様に $J_\nu(x)$ に関する微分公式 (4.1.34) において $x \rightarrow ix$ とすると

$$\frac{d}{d(ix)} [(ix)^{-\nu} J_\nu(ix)] = -(ix)^{-\nu} J_{\nu+1}(ix)$$

両辺を i 倍して

$$\frac{d}{dx} [x^{-\nu} \cdot i^{-\nu} J_\nu(ix)] = x^{-\nu} \cdot i^{-\nu-1} J_{\nu+1}(ix) \quad \therefore \frac{d}{dx} [x^{-\nu} I_\nu(x)] = x^{-\nu} I_{\nu+1}(x)$$

これより積分公式は

$$\int x^{-\nu} I_{\nu+1}(x) dx = x^{-\nu} I_\nu(x) + C$$

□

■高階導関数表示 $J_\nu(x)$ に関する高階導関数表示 (4.1.35) において $x \rightarrow ix$ とすると

$$(ix)^{-\nu-n} J_{\nu+n}(ix) = (-1)^n \left(\frac{1}{ix} \frac{d}{d(ix)}\right)^n [(ix)^{-\nu} J_\nu(ix)]$$

これより

$$x^{-\nu-n} \cdot i^{-\nu-n} J_{\nu+n}(ix) = \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n [x^{-\nu} \cdot i^{-\nu} J_\nu(ix)] \quad \therefore x^{-\nu-n} I_{\nu+n}(x) = \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n [x^{-\nu} I_\nu(x)]$$

同様に $J_\nu(x)$ に関する高階導関数表示 (4.1.36) において $x \rightarrow ix$ とすると

$$(ix)^{\nu-n} J_{\nu-n}(ix) = \left(\frac{1}{ix} \frac{d}{d(ix)}\right)^n [(ix)^\nu J_\nu(ix)]$$

両辺を $i^{-2\nu+2n}$ 倍して

$$x^{\nu-n} \cdot i^{-\nu+n} J_{\nu-n}(ix) = \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n [x^\nu \cdot i^{-\nu} J_\nu(ix)] \quad \therefore x^{\nu-n} I_{\nu-n}(x) = \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n [x^\nu I_\nu(x)]$$

□

4.2.2 第2種変形 Bessel 関数

変形された Bessel の微分方程式 (4.2.10) についても $I_\nu(x)$ と線形独立なもうひとつの基本解を構成することを考える。通常の Bessel の微分方程式と同じ事情により、 ν が整数でないときはもうひとつの基本解として $I_{-\nu}(x)$ を選ぶことができるが、 ν が整数であっても $I_\nu(x)$ と線形独立になる基本解を得るためにはその代わりに (4.2.20), (4.2.21) で定義される第2種変形 Bessel 関数 $K_\nu(x)$ を用いることになる^{*9}。 $K_\nu(x)$ についての微分方程式は $I_\nu(x)$ の場合と一致するが、漸化式、微分漸化式、昇降演算子は符号が逆になっていることに注意を要する。各公式の証明は $N_\nu(x)$ のときの方法とほとんど同じである。なお $K_\nu(x)$ は (4.2.22) のように Hankel 関数で表すこともできる。

公式集

■定義

$$K_\nu(x) = \frac{\pi I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{2 \sin \pi \nu} \quad (\nu \notin \mathbb{Z}) \quad (4.2.20)$$

$$K_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} I_\nu(x) \quad (\nu = n \in \mathbb{Z}) \quad (4.2.21)$$

■Hankel 関数表示

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) \quad (4.2.22)$$

■整数次の表式

$$K_n(x) = \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial I_{-\nu}(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \quad (4.2.23)$$

■非負整数次の一般項 (参考)

$$\begin{aligned} K_n(x) &= (-1)^{n+1} I_n(x) \log \frac{x}{2} \\ &+ \frac{(-1)^n}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!(n+i)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2i} [\psi(i+1) + \psi(n+i+1)] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{(n-i-1)!}{i!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2i} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

■負の次数^{*10}

$$K_{-\nu}(x) = K_\nu(x) \quad (4.2.25)$$

■漸化式

$$-\frac{2\nu}{x} K_\nu(x) = K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) \quad (4.2.26)$$

■微分漸化式

$$-2 \frac{dK_\nu(x)}{dx} = K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) \quad (4.2.27)$$

■昇降演算子

$$\text{下降演算子} \quad \left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x} \right) K_\nu(x) = -K_{\nu-1}(x) \quad (4.2.28)$$

$$\text{上昇演算子} \quad \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x} \right) K_\nu(x) = -K_{\nu+1}(x) \quad (4.2.29)$$

^{*9} $I_\nu(x)$ と $I_{-\nu}(x)$ のロンスキアン $W[I_\nu, I_{-\nu}](x)$ 、および $I_\nu(x)$ と $K_\nu(x)$ のロンスキアン $W[I_\nu, K_\nu](x)$ はそれぞれ

$$W[I_\nu, I_{-\nu}](x) = I_\nu(x) I'_{-\nu}(x) - I'_{\nu}(x) I_{-\nu}(x) = -\frac{2 \sin \pi \nu}{\pi x} \quad (4.2.18)$$

$$W[I_\nu, K_\nu](x) = I_\nu(x) K'_\nu(x) - I'_\nu(x) K_\nu(x) = -\frac{1}{x} \quad (4.2.19)$$

^{*10} $N_\nu(x)$ のときとは異なり、これは ν が整数でない一般の場合でも成立する。

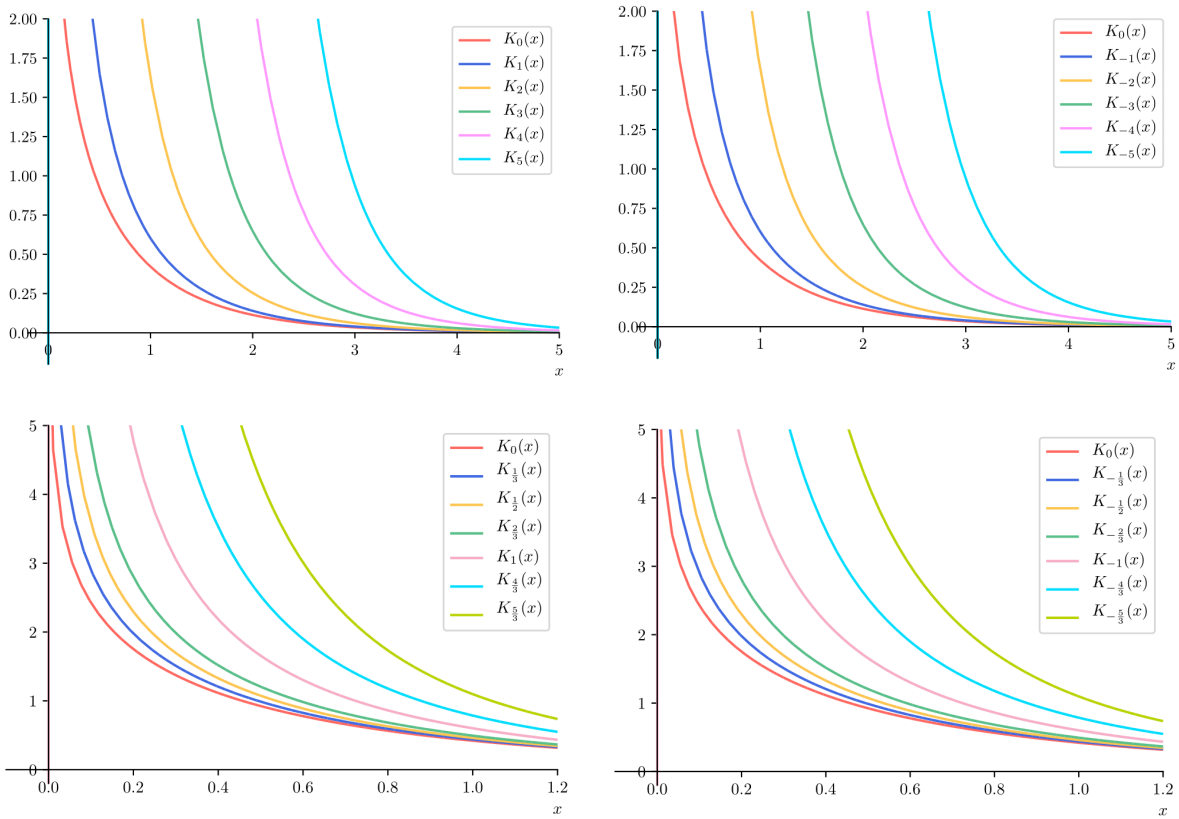


図 4.7 第 2 種変形 Bessel 関数 $K_\nu(x)$

■微分方程式

$$\frac{d^2 K_\nu(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dK_\nu(x)}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) K_\nu(x) = 0 \tag{4.2.30}$$

$$\frac{d^2 K_\nu(kx)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dK_\nu(kx)}{dx} - \left(k^2 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) K_\nu(kx) = 0 \tag{4.2.31}$$

■自己随伴形

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} K_\nu(x) \right] - \left(x + \frac{\nu^2}{x}\right) K_\nu(x) = 0 \tag{4.2.32}$$

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} K_\nu(kx) \right] - \left(k^2 x + \frac{\nu^2}{x}\right) K_\nu(kx) = 0 \tag{4.2.33}$$

■微分・積分公式

$$\frac{d}{dx} [x^\nu K_\nu(x)] = -x^\nu K_{\nu-1}(x), \quad \int x^\nu K_{\nu-1}(x) dx = -x^\nu K_\nu(x) + C \tag{4.2.34}$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-\nu} K_\nu(x)] = -x^{-\nu} K_{\nu+1}(x), \quad \int x^{-\nu} K_{\nu+1}(x) dx = -x^{-\nu} K_\nu(x) + C \tag{4.2.35}$$

■高階導関数表示 $n = 0, 1, 2, \dots$ とすると

$$x^{-\nu-n} K_{\nu+n}(x) = (-1)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n [x^{-\nu} K_\nu(x)] \tag{4.2.36}$$

$$x^{\nu-n} K_{\nu-n}(x) = (-1)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n [x^\nu K_\nu(x)] \tag{4.2.37}$$

証明

■定義 \implies Hankel 関数表示 $I_\nu(x)$ の定義 (4.2.1) を用いて $K_\nu(x)$ を $J_\nu(x)$ で表すと

$$\begin{aligned} K_\nu(x) &= \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \pi\nu} = \frac{\pi}{2} \frac{i^\nu J_{-\nu}(ix) - i^{-\nu} J_\nu(ix)}{\sin \pi\nu} \\ &= \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} \cdot \frac{i^{-2\nu+1} J_\nu(ix) - i J_{-\nu}(ix)}{\sin \pi\nu} \end{aligned}$$

ここで

$$i^{-2\nu+1} = i \cdot i^{-2\nu} = i e^{-i\pi\nu} = i(\cos \pi\nu - i \sin \pi\nu) = \sin \pi\nu + i \cos \pi\nu$$

であるから、

$$\begin{aligned} K_\nu(x) &= \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} \cdot \left[J_\nu(ix) + i \cdot \frac{J_\nu(ix) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(ix)}{\sin \pi\nu} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} (J_\nu(ix) + i N_\nu(ix)) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) \end{aligned}$$

□

■定義 \implies 整数次の表式 極限 (4.2.21) は $\frac{0}{0}$ 不定形であるので L'Hôpital の定理を用いることができる。

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \pi\nu} = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\pi}{2} \frac{\frac{\partial I_{-\nu}(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_\nu(x)}{\partial \nu}}{\pi \cos \pi\nu} \\ &= \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial I_{-n}(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_n(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \end{aligned}$$

□

■定義 \implies 負の次数 定義 (4.2.20) において ν を $-\nu$ に置き換えても式は変わらないので

$$K_{-\nu}(x) = K_\nu(x)$$

□

■定義 \implies 漸化式 $\nu \notin \mathbb{Z}$ のとき、(4.2.20) から

$$\begin{aligned} &K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu+1}(x) - I_{\nu-1}(x)}{\sin \pi(\nu-1)} - \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x)}{\sin \pi(\nu+1)} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{-I_{-\nu+1}(x) + I_{\nu-1}(x)}{\sin \pi\nu} - \frac{\pi}{2} \frac{-I_{-\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x)}{\sin \pi\nu} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{(I_{-\nu-1}(x) - I_{-\nu+1}(x)) + (I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x))}{\sin \pi\nu} \\ &= -\frac{2\nu}{x} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \pi\nu} \\ &= -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x) \end{aligned}$$

次に $\nu = n \in \mathbb{Z}$ のとき、(4.2.23) から

$$\begin{aligned}
& K_{n-1}(x) - K_{n+1}(x) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2} \left[\frac{\partial I_{-n}(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_n(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n-1} - \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left[\frac{\partial I_{-n}(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_n(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n+1} \\
&= \frac{(-1)^n}{2} \left[-\frac{\partial I_{-n+1}(x)}{\partial \nu} + \frac{\partial I_{n-1}(x)}{\partial \nu} + \frac{\partial I_{-n-1}(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_{n+1}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \\
&= \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} (I_{-n-1}(x) - I_{-n+1}(x)) + \frac{\partial}{\partial \nu} (I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x)) \right]_{\nu=n} \\
&= \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{-2\nu}{x} I_{-n}(x) \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{2\nu}{x} I_n(x) \right) \right]_{\nu=n} \\
&= \frac{(-1)^n}{2} \left[-\frac{2}{x} I_{-n}(x) - \frac{2\nu}{x} \frac{\partial I_{-n}(x)}{\partial \nu} + \frac{2}{x} I_n(x) + \frac{2\nu}{x} \frac{\partial I_n(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \\
&= -\frac{2n}{x} \cdot \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial I_{-n}(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_n(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \\
&= -\frac{2n}{x} K_n(x)
\end{aligned}$$

□

■定義 \implies 微分漸化式 $\nu \notin \mathbb{Z}$ のとき、(4.2.20) から

$$\begin{aligned}
& K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu+1}(x) - I_{\nu-1}(x)}{\sin \pi(\nu-1)} + \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x)}{\sin \pi(\nu+1)} \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{-I_{-\nu+1}(x) + I_{\nu-1}(x)}{\sin \pi\nu} + \frac{\pi}{2} \frac{-I_{-\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x)}{\sin \pi\nu} \\
&= -\frac{\pi}{2} \frac{(I_{-\nu-1}(x) + I_{-\nu+1}(x)) - (I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x))}{\sin \pi\nu} \\
&= -2 \frac{d}{dx} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_{\nu}(x)}{\sin \pi\nu} \\
&= -2 \frac{dK_{\nu}(x)}{dx}
\end{aligned}$$

次に $\nu = n \in \mathbb{Z}$ のとき、(4.2.23) から

$$\begin{aligned}
& K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2} \left[\frac{\partial I_{-n}(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_n(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left[\frac{\partial I_{-n}(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_n(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n+1} \\
&= -\frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial I_{-n+1}(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_{n-1}(x)}{\partial \nu} + \frac{\partial I_{-n-1}(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_{n+1}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \\
&= -\frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} (I_{-n-1}(x) + I_{-n+1}(x)) - \frac{\partial}{\partial \nu} (I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)) \right]_{\nu=n} \\
&= -\frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \left(2 \frac{dI_{-n}(x)}{dx} \right) - \frac{\partial}{\partial \nu} \left(2 \frac{dI_n(x)}{dx} \right) \right]_{\nu=n} \\
&= -2 \frac{d}{dx} \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial I_{-n}(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_n(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \\
&= -2 \frac{dK_n(x)}{dx}
\end{aligned}$$

□

■漸化式, 微分漸化式 \implies 昇降演算子 まず下降演算子については $-\frac{1}{2} [(4.2.27) + (4.2.26)]$ を計算して

$$\left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x} \right) K_{\nu}(x) = -K_{\nu-1}(x)$$

上昇演算子については $-\frac{1}{2} [(4.2.27) - (4.2.26)]$ を計算して

$$\left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x} \right) K_{\nu}(x) = -K_{\nu+1}(x)$$

□

■昇降演算子 \implies 微分方程式 上昇演算子 (4.2.29) の両辺に左から $\frac{d}{dx} + \frac{\nu+1}{x}$ を作用させると、左辺は

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu+1}{x}\right) \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x}\right) K_\nu(x) &= \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x}\right) + \frac{\nu+1}{x} \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x}\right)\right] K_\nu(x) \\ &= \left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\nu}{x^2} - \frac{\nu}{x} \frac{d}{dx}\right) + \left(\frac{\nu+1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\nu^2+\nu}{x^2}\right)\right] K_\nu(x) \\ &= \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}\right) K_\nu(x) \end{aligned}$$

一方右辺は $-\left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu+1}{x}\right) K_{\nu+1}(x)$ であるがこれは下降演算子 (4.2.28) から $K_\nu(x)$ に等しい。よって、

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}\right) K_\nu(x) = K_\nu(x) \quad \therefore \frac{d^2 K_\nu(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dK_\nu(x)}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) K_\nu(x) = 0$$

また、得られた微分方程式において $x \rightarrow kx$ と置き換えると

$$\frac{d^2 K_\nu(kx)}{d(kx)^2} + \frac{1}{kx} \frac{dK_\nu(kx)}{d(kx)} - \left(1 + \frac{\nu^2}{(kx)^2}\right) K_\nu(kx) = 0$$

となり、 $\frac{d}{d(kx)} = \frac{1}{k} \frac{d}{dx}$ に注意して整理すると (4.2.31) が得られる。さらに (4.2.30), (4.2.31) はそれぞれ (4.2.32), (4.2.33) のようにも書ける。□

■昇降演算子 \implies 微分・積分公式 下降演算子 (4.2.28) の両辺に x^ν をかけると

$$\left(x^\nu \frac{d}{dx} + \nu x^{\nu-1}\right) K_\nu(x) = -x^\nu K_{\nu-1}(x) \quad \therefore \frac{d}{dx} [x^\nu K_\nu(x)] = -x^\nu K_{\nu-1}(x)$$

これより積分公式は

$$\int x^\nu K_{\nu-1}(x) dx = -x^\nu K_\nu(x) + C$$

同様に上昇演算子 (4.2.29) の両辺に $x^{-\nu}$ をかけると

$$\left(x^{-\nu} \frac{d}{dx} - \nu x^{-\nu-1}\right) K_\nu(x) = -x^{-\nu} K_{\nu+1}(x) \quad \therefore \frac{d}{dx} [x^{-\nu} K_\nu(x)] = -x^{-\nu} K_{\nu+1}(x)$$

これより積分公式は

$$\int x^{-\nu} K_{\nu+1}(x) dx = -x^{-\nu} K_\nu(x) + C$$

□

■微分公式 \implies 高階導関数表示 (4.2.35) の微分公式の両辺を x でわって

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} [x^{-\nu} K_\nu(x)] = -x^{-\nu-1} K_{\nu+1}(x)$$

と変形すると、関数 $x^{-\nu} K_\nu(x)$ に 1 回 $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$ を作用させると x の指数が 1 減り、第 2 種変形 Bessel 関数の次数が 1 増え、符号が反転することが読み取れる。したがって $x^{-\nu} K_\nu(x)$ に対して $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$ を n 回作用させると

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n [x^{-\nu} K_\nu(x)] = (-1)^n x^{-\nu-n} K_{\nu+n}(x)$$

となることが分かり、(4.2.36) が示される。同様に (4.2.34) の微分公式の両辺を x でわって

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} [x^\nu K_\nu(x)] = -x^{\nu-1} K_{\nu-1}(x)$$

と変形すると、関数 $x^\nu K_\nu(x)$ に 1 回 $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$ を作用させると x の指数と第 2 種変形 Bessel 関数の次数がともに 1 ずつ減り、符号が反転することが読み取れるので、 $x^\nu K_\nu(x)$ に対して $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$ を n 回作用させると

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n [x^\nu K_\nu(x)] = (-1)^n x^{\nu-n} K_{\nu-n}(x)$$

となることが分かり、(4.2.37) が示される。□

4.2.3 変形 Bessel 関数まとめ

変形された Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{4.2.38}$$

の一般解は、

1. ν が整数でないならば

$$y = c_1 I_\nu(x) + c_2 I_{-\nu}(x) \tag{4.2.39}$$

2. 一般には

$$y = c_1 I_\nu(x) + c_2 K_\nu(x) \tag{4.2.40}$$

と書ける。

4.2.4 漸近形 (参考)

■漸近形 十分大きな x に対して

$$I_\nu(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \tag{4.2.41}$$

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \tag{4.2.42}$$

4.3 球 Bessel 関数

4.3.1 球 Bessel 関数

球 Bessel 関数 (第 1 種球 Bessel 関数) $j_n(x)$, 球 Neumann 関数 (第 2 種球 Bessel 関数) $n_n(x)$, 第 1 種球 Hankel 関数 $h_n^{(1)}(x)$, 第 2 種球 Hankel 関数 $h_n^{(2)}(x)$ を総称して球 Bessel 関数と呼び、 $z_n(x)$ と書くことにする。 $z_n(x)$ は対応する円柱関数 $Z_\nu(x)$ を用いて $z_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Z_{n+\frac{1}{2}}(x)$ と定義され、多くの物理系では $n = 0, 1, 2, \dots$ の場合が問題とされる。

球 Bessel 関数では高階導関数表示が重要であり、これによれば $z_n(x)$ が初等関数である三角関数や指数関数で書けることが読み取れる。これは円柱関数 $Z_\nu(x)$ が一般に初等関数で書けないことと対照的である。高階導関数表示は球 Bessel 関数 $z_n(x)$ がどのような初等関数で書けるか理解しやすいため、これを定義として採用する教科書も多い。

球 Bessel 関数は円柱関数の特殊な場合であるので、 $z_n(x)$ についての諸公式は一般次数の円柱関数 $Z_\nu(x)$ の諸公式から演繹できる。特に高階導関数表示、漸化式、微分漸化式、昇降演算子、微分方程式が任意の球 Bessel 関数 $z_n(x)$ について共通であることは注目に値する。

公式集

■定義 *11

$$z_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Z_{n+\frac{1}{2}}(x) \begin{cases} j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) & (4.3.1a) \\ n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-\frac{1}{2}}(x) & (4.3.1b) \\ h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) = j_n(x) + i n_n(x) & (4.3.1c) \\ h_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) = j_n(x) - i n_n(x) & (4.3.1d) \end{cases}$$

*11 (4.3.1b) で $\sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-\frac{1}{2}}(x)$ であることは Neumann 関数 $N_\nu(x)$ の定義 (4.1.39) を用いて確かめられる。

■一般項

$$j_n(x) = 2^n x^n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (n+i)!}{i! (2n+2i+1)!} x^{2i} \quad (4.3.2)$$

$$n_n(x) = -\frac{1}{2^n x^{n+1}} \left[\sum_{i=0}^n \frac{(2n-2i)!}{i! (n-i)!} x^{2i} + (-1)^n \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^i (-n+i)!}{i! (-2n+2i)!} x^{2i} \right] \quad (4.3.3)$$

$$= -\frac{1}{2^n x^{n+1}} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2n-2i)!}{i! (n-i)!} x^{2i} + (-1)^n \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(-1)^i (-n+i)!}{i! (-2n+2i)!} x^{2i} \right] \quad (4.3.4)$$

■ $x \sim 0$ での振舞

$$j_n(x) \sim \frac{x^n}{(2n+1)!!} \quad (4.3.5)$$

$$n_n(x) \sim -\frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}} \quad (4.3.6)$$

■ $n=0$ の表式

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (4.3.7)$$

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x} \quad (4.3.8)$$

$$h_0^{(1)}(x) = -i \frac{e^{ix}}{x} \quad (4.3.9)$$

$$h_0^{(2)}(x) = i \frac{e^{-ix}}{x} \quad (4.3.10)$$

■高階導関数表示

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n j_0(x), \quad j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (4.3.11)$$

$$n_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n n_0(x), \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x} \quad (4.3.12)$$

$$h_n^{(1)}(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n h_0^{(1)}(x), \quad h_0^{(1)}(x) = -i \frac{e^{ix}}{x} \quad (4.3.13)$$

$$h_n^{(2)}(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n h_0^{(2)}(x), \quad h_0^{(2)}(x) = i \frac{e^{-ix}}{x} \quad (4.3.14)$$

■漸化式

$$\frac{2n+1}{x} z_n(x) = z_{n-1}(x) + z_{n+1}(x) \quad (4.3.15)$$

■微分漸化式

$$\left(2 \frac{d}{dx} + \frac{1}{x} \right) z_n(x) = z_{n-1}(x) - z_{n+1}(x) \quad (4.3.16)$$

■昇降演算子

$$\text{下降演算子} \quad \left(\frac{d}{dx} + \frac{n+1}{x} \right) z_n(x) = z_{n-1}(x) \quad (4.3.17)$$

$$\text{上昇演算子} \quad \left(\frac{d}{dx} - \frac{n}{x} \right) z_n(x) = -z_{n+1}(x) \quad (4.3.18)$$

■微分方程式

$$\frac{d^2 z_n(x)}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dz_n(x)}{dx} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{x^2} \right] z_n(x) = 0 \quad (4.3.19)$$

$$\frac{d^2 z_n(kx)}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dz_n(kx)}{dx} + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{x^2} \right] z_n(kx) = 0 \quad (4.3.20)$$

表 4.1 球 Bessel 関数

	$j_n(x)$	$n_n(x)$	$h_n^{(1)}(x)$	$h_n^{(2)}(x)$
$n = 0$	$\frac{\sin x}{x}$	$-\frac{\cos x}{x}$	$-i \frac{e^{ix}}{x}$	$i \frac{e^{-ix}}{x}$
$n = 1$	$\frac{\sin x - x \cos x}{x^2}$	$-\frac{\cos x + x \sin x}{x^2}$	$-(x+i) \frac{e^{ix}}{x^2}$	$-(x-i) \frac{e^{-ix}}{x^2}$
$n = 2$	$\frac{(3-x^2) \sin x - 3x \cos x}{x^3}$	$-\frac{(3-x^2) \cos x + 3x \sin x}{x^3}$	$-[3x+i(3-x^2)] \frac{e^{ix}}{x^3}$	$-[3x-i(3-x^2)] \frac{e^{-ix}}{x^3}$

■自己随伴形

$$\frac{d}{dx} \left[x^2 \frac{d}{dx} z_n(x) \right] + [x^2 - n(n+1)] z_n(x) = 0 \tag{4.3.21}$$

$$\frac{d}{dx} \left[x^2 \frac{d}{dx} z_n(kx) \right] + [k^2 x^2 - n(n+1)] z_n(kx) = 0 \tag{4.3.22}$$

■微分・積分公式

$$\frac{d}{dx} [x^{n+1} z_n(x)] = x^{n+1} z_{n-1}(x), \quad \int x^{n+1} z_{n-1}(x) dx = x^{n+1} z_n(x) + C \tag{4.3.23}$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} z_n(x)] = -x^{-n} z_{n+1}(x), \quad \int x^{-n} z_{n+1}(x) dx = -x^{-n} z_n(x) + C \tag{4.3.24}$$

■漸近形 (参考)

$$j_n(x) \sim \frac{1}{x} \sin \left(x - \frac{n\pi}{2} \right) \tag{4.3.25}$$

$$n_n(x) \sim -\frac{1}{x} \cos \left(x - \frac{n\pi}{2} \right) \tag{4.3.26}$$

$$h_n^{(1)}(x) \sim (-i)^{n+1} \frac{e^{ix}}{x} \tag{4.3.27}$$

$$h_n^{(2)}(x) \sim i^{n+1} \frac{e^{-ix}}{x} \tag{4.3.28}$$

■Legendre 多項式との関係 (Whittaker の積分表示) (参考)

$$j_n(x) = \frac{1}{2i^n} \int_{-1}^1 e^{ixt} P_n(t) dt \tag{4.3.29}$$

■平面波の球面波展開 (Rayleigh の公式) (参考)

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \tag{4.3.30}$$

証明

以下の証明では任意の円柱関数 $Z_\nu(x)$ に対応する球 Bessel 関数を $z_n(x)$ と書くことにする。

■定義 \implies 一般項 まず $j_n(x)$ について、 $J_\nu(x)$ に関する一般項 (4.1.24) を用いて

$$\begin{aligned} j_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(n+i+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2i+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(n+i+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2i} \end{aligned}$$

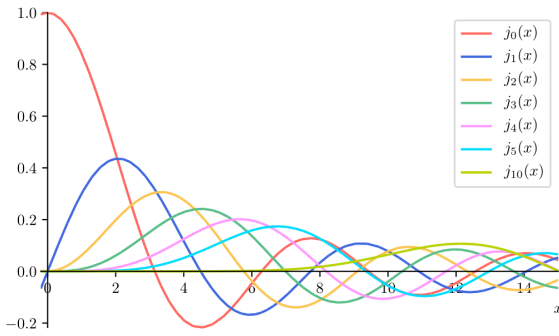


図 4.8 球 Bessel 関数 $j_n(x)$

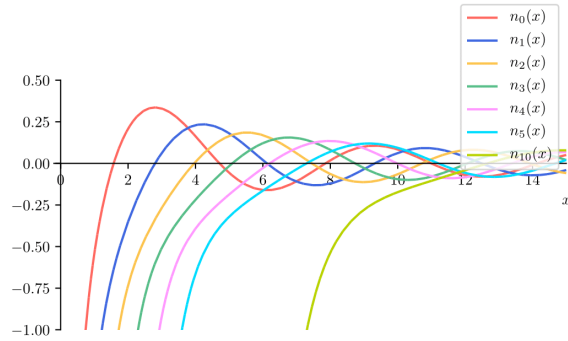


図 4.9 球 Neumann 関数 $n_n(x)$

ここで Legendre の倍数公式 (4.3.31) ^{*12} を用いてガンマ関数の引数を整数にすると、

$$\begin{aligned} j_n(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \Gamma(n+i+1)}{i! \cdot 2^{-2n-2i-1} \sqrt{\pi} \Gamma(2n+2i+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2i} \\ &= 2^n x^n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (n+i)!}{i! (2n+2i+1)!} x^{2i} \end{aligned}$$

$n_n(x)$ についても同様に $J_\nu(x)$ に関する一般項 (4.1.24) を用いて

$$\begin{aligned} n_n(x) &= (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(-n+i+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2i-\frac{1}{2}} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{\pi}}{x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(-n+i+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2i} \end{aligned}$$

Legendre の倍数公式 (4.3.31) を用いてガンマ関数の引数を整数にすると、

$$\begin{aligned} n_n(x) &= (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{\pi}}{x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \Gamma(-n+i)}{i! \cdot 2^{2n-2i+1} \sqrt{\pi} \Gamma(-2n+2i)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2i} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1} x^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \Gamma(-n+i+1)}{i! \Gamma(-2n+2i+1)} \cdot \frac{-2n+2i}{-n+i} x^{2i} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^n x^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \Gamma(-n+i+1)}{i! \Gamma(-2n+2i+1)} x^{2i} \end{aligned}$$

ここでガンマ関数を $\frac{(-n+i)!}{(-2n+2i)!}$ のようにそのまま階乗に書き直すのは、 $i < n$ の項において ∞ の形が現れてしまい不適切である。これを防ぐためには、 $i \leq n$ (あるいは $i < n$) の項に対して次の公式を適用する ^{*13 *14}。

$$\frac{(-n+i)!}{(-2n+2i)!} = (-1)^{n-i} \frac{(2n-2i)!}{(n-i)!} \tag{4.3.32}$$

^{*12} Legendre の倍数公式:

$$\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{-2z+1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)} \tag{4.3.31}$$

^{*13} ∞ が現れないようにするための手立てであるので、 $i \leq n$ に対して適用しても $i < n$ に対して適用しても式に意味を持たせることができる。ここで二通りの書き方をあえて記述したのは、次の「 $x \sim 0$ での振舞」を導く際には $i \leq n$ に対して適用した (4.3.3) を、「 $x = 0$ の表式」を導くには $i < n$ に対して適用した (4.3.4) を用いると分かりやすくなるからである。

^{*14} この証明にはガンマ関数の反射公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ を用いる。いま階乗記号を $z! = \Gamma(z+1)$ とガンマ関数の意味で用いることにすると、この反射公式は $z!(-z)! = \frac{\pi z}{\sin \pi z}$ と書き換えることができる。これより

$$\frac{(-n+i)!}{(-2n+2i)!} = \frac{(2n-2i)!}{(n-i)!} \cdot \frac{\pi(n-i)}{\sin \pi(n-i)} \cdot \frac{\sin \pi(2n-2i)}{\pi(2n-2i)} = \frac{(2n-2i)!}{(n-i)!} \cos \pi(n-i) = (-1)^{n-i} \frac{(2n-2i)!}{(n-i)!}$$

したがって、 $n_n(x)$ の一般項は次のように書ける：

$$\begin{aligned} n_n(x) &= -\frac{1}{2^n x^{n+1}} \left[\sum_{i=0}^n \frac{(2n-2i)!}{i!(n-i)!} x^{2i} + (-1)^n \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^i (-n+i)!}{i!(-2n+2i)!} x^{2i} \right] \\ &= -\frac{1}{2^n x^{n+1}} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2n-2i)!}{i!(n-i)!} x^{2i} + (-1)^n \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(-1)^i (-n+i)!}{i!(-2n+2i)!} x^{2i} \right] \end{aligned}$$

□

■一般項 $\implies x \sim 0$ での振舞 $x \sim 0$ では一般項 (4.3.2), (4.3.3) において $i = 0$ の項が最も支配的になる。まず $j_n(x)$ について

$$j_n(x) \sim 2^n x^n \cdot \frac{n!}{(2n+1)!} = \frac{x^n}{(2n+1)!!}$$

$n_n(x)$ についても同様に

$$n_n(x) \sim -\frac{1}{2^n x^{n+1}} \cdot \frac{(2n)!}{n!} = -\frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}}$$

□

■一般項 $\implies n = 0$ の表式 $j_n(x)$ の一般項 (4.3.2) で $n = 0$ とすると

$$j_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i} = \frac{\sin x}{x}$$

同様に $n_n(x)$ の一般項 (4.3.4) で $n = 0$ とすると

$$n_0(x) = -\frac{1}{x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i} = -\frac{\cos x}{x}$$

これらを用いると球 Hankel 関数についての式も直ちに得ることができ、

$$\begin{aligned} h_0^{(1)}(x) &= j_0(x) + i n_0(x) = \frac{\sin x}{x} - i \frac{\cos x}{x} = -\frac{i}{x} (\cos x + i \sin x) = -i \frac{e^{ix}}{x} \\ h_0^{(2)}(x) &= j_0(x) - i n_0(x) = \frac{\sin x}{x} + i \frac{\cos x}{x} = \frac{i}{x} (\cos x - i \sin x) = i \frac{e^{-ix}}{x} \end{aligned}$$

□

■高階導関数表示 $J_\nu(x)$ についての高階導関数表示 (4.1.35) において $\nu = \frac{1}{2}$ とすると

$$x^{-n-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left[x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x) \right]$$

両辺を $\sqrt{\frac{\pi}{2}} x^n$ 倍すると

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) &= (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left[\sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\frac{1}{2}}(x) \right] \\ \therefore j_n(x) &= (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n j_0(x) \end{aligned}$$

次に $J_\nu(x)$ についての高階導関数表示 (4.1.36) において $\nu = -\frac{1}{2}$ とすると

$$x^{-n-\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left[x^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(x) \right]$$

両辺を $(-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^n$ 倍すると

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-\frac{1}{2}}(x) &= (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-\frac{1}{2}}(x) \right] \\ \therefore n_n(x) &= (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n n_0(x) \end{aligned}$$

□

これらから球 Hankel 関数についての式も直ちに得ることができる。

■漸化式 円柱関数 $Z_\nu(x)$ についての漸化式 (4.1.62) において $\nu = n + \frac{1}{2}$ とすると

$$\frac{2n+1}{x} Z_{n+\frac{1}{2}}(x) = Z_{n-\frac{1}{2}}(x) + Z_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

よって両辺を $\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$ 倍することで、定義より (4.3.15) が示される。□

■微分漸化式 球 Bessel 関数の定義を用いて $2\frac{dz_n(x)}{dx}$ を展開すると、

$$\begin{aligned} 2\frac{dz_n(x)}{dx} &= 2\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}Z_{n+\frac{1}{2}}(x) \\ &= -\frac{1}{x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}Z_{n+\frac{1}{2}}(x) + \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot 2\frac{dZ_{n+\frac{1}{2}}(x)}{dx} \\ &= -\frac{1}{x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}Z_{n+\frac{1}{2}}(x) + \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left(Z_{n-\frac{1}{2}}(x) - Z_{n+\frac{3}{2}}(x)\right) \quad ((4.1.63) \text{ を用いた}) \\ &= -\frac{1}{x}z_n(x) + z_{n-1}(x) - z_{n+1}(x) \end{aligned}$$

移項して (4.3.16) を得る。□

■漸化式, 微分漸化式 \implies 昇降演算子 下降演算子については $\frac{1}{2}[(4.3.16) + (4.3.15)]$ を、上昇演算子については $\frac{1}{2}[(4.3.16) - (4.3.15)]$ を計算すると得られる。□

■昇降演算子 \implies 微分方程式 下降演算子 (4.3.17) の両辺に $(\frac{d}{dx} - \frac{n-1}{x})$ を左から作用させると左辺は

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d}{dx} - \frac{n-1}{x}\right)\left(\frac{d}{dx} + \frac{n+1}{x}\right)z_n(x) \\ &= \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} + \frac{n+1}{x}\right) - \frac{n-1}{x}\left(\frac{d}{dx} + \frac{n+1}{x}\right)\right]z_n(x) \\ &= \left[\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n+1}{x^2} + \frac{n+1}{x}\frac{d}{dx}\right) - \left(\frac{n-1}{x}\frac{d}{dx} + \frac{n^2-1}{x^2}\right)\right]z_n(x) \\ &= \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx} - \frac{n(n+1)}{x^2}\right]z_n(x) \end{aligned}$$

一方右辺は $(\frac{d}{dx} - \frac{n-1}{x})z_{n-1}(x)$ であるが、これは上昇演算子 (4.3.18) から $-z_n(x)$ に等しい。よって、

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx} - \frac{n(n+1)}{x^2}\right]z_n(x) = -z_n(x) \quad \therefore \frac{d^2z_n(x)}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dz_n(x)}{dx} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right]z_n(x) = 0$$

また、得られた微分方程式において $x \rightarrow kx$ と置き換えると

$$\frac{d^2z_n(kx)}{d(kx)^2} + \frac{2}{kx}\frac{dz_n(kx)}{d(kx)} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{(kx)^2}\right]z_n(kx) = 0$$

となり、 $\frac{d}{d(kx)} = \frac{1}{k}\frac{d}{dx}$ に注意して整理すると (4.3.20) が得られる。さらに (4.3.19), (4.3.20) はそれぞれ (4.3.21), (4.3.22) のようにも書ける。□

■昇降演算子 \implies 微分・積分公式 下降演算子 (4.3.17) の両辺に x^{n+1} をかけると

$$\left[x^{n+1}\frac{d}{dx} + (n+1)x^n\right]z_n(x) = x^{n+1}z_{n-1}(x) \quad \therefore \frac{d}{dx}[x^{n+1}J_z(x)] = x^{n+1}z_{n-1}(x)$$

これより積分公式は

$$\int x^{n+1}z_{n-1}(x)dx = x^{n+1}z_n(x) + C$$

同様に上昇演算子 (4.3.18) の両辺に x^{-n} をかけると

$$\left(x^{-n}\frac{d}{dx} - nx^{-n-1}\right)z_n(x) = -x^{-n}z_{n+1}(x) \quad \therefore \frac{d}{dx}[x^{-n}z_n(x)] = -x^{-n}z_{n+1}(x)$$

これより積分公式は

$$\int x^{-n}z_{n+1}(x)dx = -x^{-n}z_n(x) + C$$

□

4.3.2 球 Bessel 関数の直交性, Fourier-球 Bessel 展開

Bessel 関数の直交性 (4.1.78) において $\nu = l + \frac{1}{2}$ を代入して整理することにより、次の球 Bessel 関数の直交性を示すことができる^{*15}。

球 Bessel 関数の直交性

球 Bessel 関数 $j_l(x)$ の正の零点を小さい順に $\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, \dots$ とすると、次の直交性が成立する。

$$\int_0^a x^2 j_l\left(\frac{\alpha_{lm}}{a}x\right) j_l\left(\frac{\alpha_{ln}}{a}x\right) dx = \frac{a^3}{2} [j_{l+1}(\alpha_{ln})]^2 \delta_{mn} \quad (4.3.33)$$

さらに、球 Bessel 関数の直交性から、次の Fourier-球 Bessel 展開も可能であることが分かる。

Fourier-球 Bessel 展開

球 Bessel 関数 $j_l(x)$ の正の零点を小さい順に $\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, \dots$ とする。区間 $[0, a]$ で定義された関数 $f(x)$ がしかるべき条件を持つとき、関数 $f(x)$ は次のように Fourier-球 Bessel 展開できる。

$$\text{展開式} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{ln} j_l\left(\frac{\alpha_{ln}}{a}x\right) \quad (4.3.34)$$

$$\text{展開係数} \quad c_{ln} = \frac{2}{a^3 [j_{l+1}(\alpha_{ln})]^2} \int_0^a x^2 f(x) j_l\left(\frac{\alpha_{ln}}{a}x\right) dx \quad (4.3.35)$$

4.4 Bessel 関数を使って解ける微分方程式

物理系を記述する方程式として Bessel の微分方程式が現れた場合、その基本解はいうまでもなく Bessel 関数になる。しかし Bessel の微分方程式と形が異なる方程式が現れたとき、解法が確立されている形をしていたり、ほかのよく知られた特殊関数の微分方程式の形をしていたりしない限り、その解がどうなるかは知る由もない。ところがいくつかのケースにおいては Bessel 関数に帰着できることが知られている。次に示す処方箋は、この目安を与えるものである (問題 [4-3])。

Bessel 関数を使って解ける微分方程式

微分方程式

$$y'' + \left(A_0 + \frac{A_1}{x}\right) y' + \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2}\right) y = 0, \quad A_0 A_1 = 2B_1 \quad (4.4.1)$$

の一般解は

$$a = -\frac{A_0}{2}, \quad b = \frac{1 - A_1}{2}, \quad \nu = \sqrt{b^2 - B_2}, \quad \gamma = \sqrt{B_0 - a^2} \quad (4.4.2)$$

を用いて次のように Bessel 関数により表せる。

$$\nu \notin \mathbb{Z} \text{ のとき} \quad y = e^{ax} x^b \{c_1 J_\nu(\gamma x) + c_2 J_{-\nu}(\gamma x)\} \quad (4.4.3)$$

$$\text{一般に} \quad y = e^{ax} x^b \{c_1 J_\nu(\gamma x) + c_2 N_\nu(\gamma x)\} \quad (4.4.4)$$

ここで γ が純虚数であるときは $J_\nu(x), N_\nu(x)$ の代わりに $I_\nu(x), K_\nu(x)$ を用いる。

[証明]

Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2 Z_\nu(\gamma x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dZ_\nu(\gamma x)}{dx} + \left(\gamma^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) Z_\nu(\gamma x) = 0 \quad (4.4.5)$$

^{*15} Bessel 関数 $J_{l+\frac{1}{2}}(x)$ の正の零点 $\tilde{\alpha}_{l+\frac{1}{2},1}, \tilde{\alpha}_{l+\frac{1}{2},2}, \dots$ が球 Bessel 関数 $j_l(x)$ の正の零点 $\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, \dots$ と一致することに注意して確認してみよ。

に対して $Z_\nu(\gamma x) = e^{-ax} x^{-b} y$ とおく。

$$\begin{aligned}\frac{dZ_\nu(\gamma x)}{dx} &= (-axy - by + xy')e^{-ax} x^{-b-1} \\ \frac{d^2 Z_\nu(\gamma x)}{dx^2} &= [a^2 x^2 y + b(b+1)y + x^2 y'' + 2abxy - 2bxy' - 2ax^2 y'] e^{-ax} x^{-b-2}\end{aligned}$$

であるので、(4.4.5) にこれらを代入して整理すると

$$y'' + \left(-2a + \frac{1-2b}{x}\right) y' + \left[(a^2 + \gamma^2) + \frac{a(2b-1)}{x} + \frac{b^2 - \nu^2}{x^2}\right] y = 0$$

(4.4.1) と比較すると

$$\begin{aligned}A_0 &= -2a, & A_1 &= 1-2b, & B_0 &= a^2 + \gamma^2, & B_1 &= a(2b-1), & B_2 &= b^2 - \nu^2 \\ \therefore a &= -\frac{A_0}{2}, & b &= \frac{1-A_1}{2}, & \nu &= \sqrt{b^2 - B_2}, & \gamma &= \sqrt{B_0 - a^2}, & A_0 A_1 &= 2B_1\end{aligned}$$

となる。また γ が虚数になるときは方程式 (4.4.5) が変形された Bessel の微分方程式と一致することから $J_\nu(x), N_\nu(x)$ の代わりに $I_\nu(x), K_\nu(x)$ を用いればよいことが分かる。□

[例] 球 Bessel 微分方程式

上記の処方箋を用いて球 Bessel 微分方程式

$$y'' + \frac{2}{x} y' + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right] y = 0$$

を解いてみよう。

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 2, \quad B_0 = k^2, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = -n(n+1)$$

であるので $A_0 A_1 = 2B_1 = 0$ を満たし、

$$a = -\frac{A_0}{2} = 0, \quad b = \frac{1-A_1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \nu = \sqrt{b^2 - B_2} = n + \frac{1}{2}, \quad \gamma = \sqrt{B_0 - a^2} = k$$

であるから、一般解は次のように書ける。

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ C_1 J_{n+\frac{1}{2}}(kx) + C_2 N_{n+\frac{1}{2}}(kx) \right\}$$

ここで $C_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} c_1$, $C_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} c_2$ とおきなおすと一般解は

$$y = c_1 j_n(kx) + c_2 n_n(kx)$$

となり、予想された球 Bessel 関数により記述できることが分かった。

第5章

応用例

ここでは本稿で学んだ特殊関数が具体的にどのように応用されているのかについて、問題形式でいくつか紹介する。

5.1 Hermite 多項式

[1-1] 1次元調和振動子

次の1次元調和振動子の Schrödinger 方程式について考える。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right] \psi(x) = E \psi(x) \quad (5.1.1)$$

(a). $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$, $\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$ (ともに無次元量) とおくと次のようになることを示せ。

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi = 0 \quad (5.1.2)$$

(b). 方程式 (5.1.2) の解を $\psi = e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(\xi)$ とおくと次のようになることを示せ。

$$\frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{df(\xi)}{d\xi} + (\lambda - 1)f(\xi) = 0 \quad (5.1.3)$$

(c). 方程式 (5.1.3) の解 $f(\xi)$ について、 $\lambda - 1 = 2n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) でないときは $\psi = e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(\xi)$ が無限遠で発散してしまうので物理的に関心がない。これより (5.1.3) は Hermite の微分方程式となり、解は $f(\xi) = c_n H_n(\xi)$ (c_n : 任意定数) と書ける。以上のことを整理して、方程式 (5.1.1) を満たす規格化された波動関数 $\psi(x)$ とエネルギー固有値 E が次のように求められることを示せ。

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right), \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.1.4)$$

5.2 Legendre 関数

[2-1] 静電場の多重極展開

原点 O の近くの領域 V 内に静止した電荷分布 $\rho(\mathbf{r}')$ があるとき、原点から十分離れた領域 V 外部の点 \mathbf{r} においてはこの電荷分布による静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ がどのように見えるか考えよう。なお、電磁気学の理論により $\phi(\mathbf{r})$ は次式によって与えられることが分かっている。

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (5.2.1)$$

(a). \mathbf{r} と \mathbf{r}' のなす角を θ' とする。多重極展開により、(5.2.1) が次のように書きなおせることを示せ。

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_V r'^n P_n(\cos\theta') \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (5.2.2)$$

(b). (5.2.2) の $n = 0$ の項は次のようになることを示せ。

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (5.2.3)$$

$$\text{全電荷 } q \equiv \int_V \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (5.2.4)$$

(c). $n = 1$ の項は次のようになることを示せ。

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} \quad (5.2.5)$$

$$\text{電気双極子モーメント } \mathbf{p} \equiv \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (5.2.6)$$

(d). $n = 2$ の項は次のようになることを示せ。

$$\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{2} \frac{Q}{r^5} \quad (5.2.7)$$

$$\text{電気四重極モーメント } Q \equiv \int_V \left[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') - \frac{1}{3}(r r')^2 \right] \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (5.2.8)$$

[2-2] 球座標系の3次元 Laplace 方程式と球面調和関数

3次元 Laplace 方程式 $\Delta\psi = 0$ を球座標系 (r, θ, φ) で解くことを考える。球座標系での方程式は次のように書ける。

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \psi(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (5.2.9)$$

(a). $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$ において方程式 (5.2.9) を変数分離すると次のように書けることを示せ。

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0 \quad (5.2.10)$$

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) + \left\{ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right\} \right] \Theta(\theta) = 0 \quad (5.2.11)$$

$$\left[r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 2r \frac{d}{dr} - l(l+1) \right] R(r) = 0 \quad (5.2.12)$$

(b). まず方程式 (5.2.10) を解く。解 $\Phi(\varphi)$ が方位角 φ について1価となるためには $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ が必要である*1。この条件の下では、方位角 φ について規格化された方程式 (5.2.10) の基本解が次のようになることを示せ。

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5.2.13)$$

(c). 次に方程式 (5.2.11) を解く。これは Legendre の陪微分方程式であり、 m が整数であるときに解 $\Theta(\theta)$ が収束するためには、 l が $|m| \leq l$ を満たす整数でなければならないことが知られている。またこのとき、基本解のひとつである(第1種) Legendre 陪関数 $P_l^m(\cos \theta)$ はつねに収束し、もうひとつの基本解である第2種 Legendre 陪関数 $Q_l^m(\cos \theta)$ は $\theta = 0, \pi$ で発散することが分かっている*2。このことから、天頂角 θ について規格化された方程式 (5.2.11) の収束する基本解が次のようになることを示せ。

$$\Theta(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) \quad (-l \leq m \leq l) \quad (5.2.14)$$

これまでに得られた解 (5.2.13), (5.2.14) の積をとって位相因子 $(-1)^m$ をつけたものが球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ である。

(d). 最後に方程式 (5.2.12) を解く。Euler の方程式と呼ばれるこの方程式の基本解は r^l, r^{-l-1} となることを示せ。

以上のことから、球座標系の3次元 Laplace 方程式 (5.2.9) の収束する一般解は、 l に依存する任意定数 A_l, B_l をもちいて次のように書ける。

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (5.2.15)$$

*1 このような条件は周期境界条件と呼ばれることがある。

*2 本来はこのことも確かめる必要があるが、ふつうはこの事実を認めてしまっかまわない。

5.3 Laguerre 多項式

[3-1] 水素原子

次の中心力場の Schrödinger 方程式を考える。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) \right] \psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi) \quad (5.3.1)$$

ただし球座標系 (r, θ, φ) におけるラプラシアンは次の通りである。

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (5.3.2)$$

(a). $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ において方程式 (5.3.1) を変数分離すると次のように書けることを示せ。

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0 \quad (5.3.3)$$

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) + \left\{ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right\} \right] \Theta(\theta) = 0 \quad (5.3.4)$$

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (5.3.5)$$

(5.3.3) と (5.3.4) は問題 [2-2] で考えた Laplace 方程式のときとまったく同じであるから、解の (θ, φ) 依存性は球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ になる。

(b). 中心力場の特別な場合として水素様原子を考えよう*3。以下では束縛状態（すなわち $r \rightarrow \infty$ で $R(r) \rightarrow 0$ となる場合）についてのみ議論することにする。

価数 Z の原子核をもつ水素様原子のポテンシャルは次のように書ける。

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \quad (5.3.6)$$

いま $R(r)$ を

$$R(r) = z^l e^{-\frac{z}{2}} f(z), \quad z = 2\epsilon r, \quad \epsilon = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \quad (5.3.7)$$

と変数変換し、さらに定数 a_0 を

$$a_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m e^2} \quad (5.3.8)$$

と定義する*4。このとき方程式 (5.3.5) が次のように書き換えられることを示せ。

$$z f''(z) + (2l + 2 - z) f'(z) + \left(\frac{Z}{\epsilon a_0} - l - 1 \right) f(z) = 0 \quad (5.3.9)$$

(c). 方程式 (5.3.9) は Laguerre の陪微分方程式であり、その解は $\frac{Z}{\epsilon a_0}$ が $0 \leq l \leq \frac{Z}{\epsilon a_0} - 1$ をみたす整数であるときのみ $z \rightarrow \infty$ で $f(z) \rightarrow 0$ となることが知られている。そこで $n = \frac{Z}{\epsilon a_0}$ とすると、方程式 (5.3.9) の解は規格化因子を除いて次のように書けることを示せ。

$$f(z) = L_{n+l}^{2l+1}(z) \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq l \leq n-1 \\ n = 1, 2, \dots \end{array} \right) \quad (5.3.10)$$

(d). エネルギー固有値 E が次のように離散的な値のみ許されることを示せ。

$$E_n = -\frac{Z^2 \hbar^2}{2m a_0^2} \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.3.11)$$

*3 電子と陽子を1個ずつもつ水素原子に加え、1個の電子と複数個の陽子からなる多価イオンをまとめて水素様原子と呼んでいる。たとえば He^+ や Li^{2+} などがそれに当たる。

*4 ここで導入した定数 a_0 は基底状態の水素原子の半径を意味しており、**Bohr** 半径と呼ばれている。その大きさは約 0.529 \AA である。

(e). Laguerre 陪多項式の漸化式 (2.2.7) および直交性 (2.2.13) を用いて

$$\int_0^\infty x^{k+1} e^{-x} [L_n^k(x)]^2 dx = (2n+1-k) \frac{(n!)^3}{(n-k)!} \quad (5.3.12)$$

を確認し、規格化された固有関数 $\psi(r, \theta, \varphi)$ が次のようになることを示せ。

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = \frac{2}{n^2} \left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}} \left(\frac{2Z}{na_0} r\right)^l e^{-\frac{Z}{na_0} r} L_{n+l}^{2l+1} \left(\frac{2Z}{na_0} r\right) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (5.3.13)$$

5.4 Bessel 関数

[4-1] 円形開口の Fraunhofer 回折

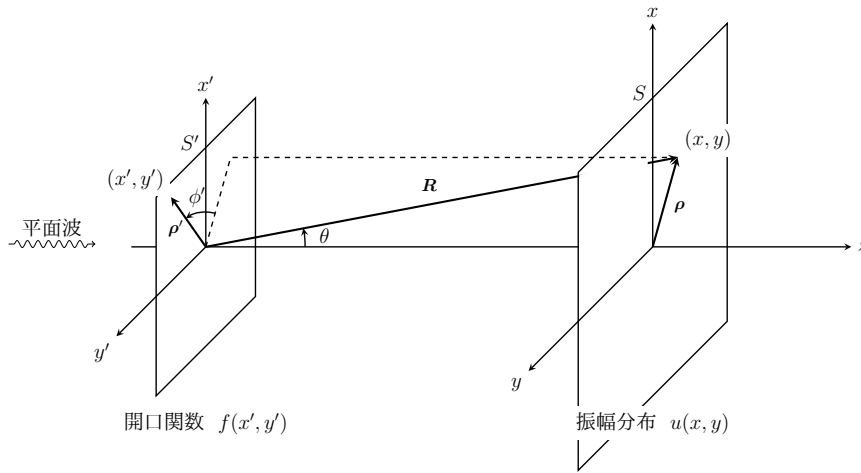


図 5.1 Fraunhofer 回折の概念図

図 5.1 のように z 軸負方向から波数 k の平面波が小さい平面開口 S' に入射すると回折現象が起こり、後方のスクリーン S 上に像ができる。開口の中心 $(x', y') = (0, 0)$ からスクリーン S 上の任意の点 (x, y) までの距離 R が十分大きいとみなせる場合の回折は特別に Fraunhofer 回折と呼ばれ、電磁気学の理論によればスクリーン S 上の回折光の振幅分布 $u(x, y)$ が次のように開口関数 $f(x', y')$ の 2 次元 Fourier 変換に比例することが知られている。

$$u(x, y) \propto \iint_{S'} f(x', y') e^{-ik(xx' + yy')/R} dx' dy' \quad (5.4.1)$$

(a). 次の等式を示せ。

$$\int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \phi'} d\phi' = 2\pi J_0(x) \quad (5.4.2)$$

(b). 開口 S' が半径 a の円であるとき、開口関数 $f(x', y')$ は

$$f(x', y') = \begin{cases} 1 & (x'^2 + y'^2 \leq a^2) \\ 0 & (x'^2 + y'^2 > a^2) \end{cases} \quad (5.4.3)$$

$$(5.4.4)$$

と書ける。スクリーン S の中心から S 上の点 (x, y) へ至るベクトルを ρ 、開口 S' の中心から S' 上の点 (x', y') へ至るベクトルを ρ' とし、 ρ と ρ' のなす角を ϕ' としたとき、 $xx' + yy' = \rho \cdot \rho' = \rho \rho' \cos \phi'$ と書ける。これを用いて円形開口の場合の (5.4.1) を計算し、振幅分布 $u(x, y)$ が次のようになることを示せ。

$$u(x, y) \propto \frac{2\pi a R}{k \rho} J_1 \left(\frac{ka}{R} \rho \right) \quad (5.4.5)$$

[4-2] 円型膜の振動

半径が a の円型膜の振動について考える。簡単のため円型膜の円周上は固定してあり、時刻 $t = 0$ において膜全体を高さ h だけ引っ張り上げて静止させるものと仮定する。すなわち、次の偏微分方程式を考えることになる。

$$\begin{cases} \text{波動方程式} & \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(r, \theta, t) = 0 & (5.4.6) \\ \text{境界条件} & \psi(a, \theta, t) = 0 & (5.4.7) \\ \text{初期条件} & \psi(r, \theta, 0) = h, \quad \left[\frac{\partial \psi}{\partial t}\right]_{t=0} = 0 & (5.4.8) \end{cases}$$

ここで c は膜の材質によって決まる正の定数である。また (r, θ) 座標系におけるラプラシアンは次の通りである。

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (5.4.9)$$

(a). $\psi(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ において方程式 (5.4.6) を変数分離すると次のように書けることを示せ。

$$\frac{d^2}{dt^2} T(t) + c^2 k^2 T(t) = 0 \quad (5.4.10)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \Theta(\theta) + m^2 \Theta(\theta) = 0 \quad (5.4.11)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \right] R(r) = 0 \quad (5.4.12)$$

(b). 方程式 (5.4.12) は次数 m についての Bessel の微分方程式であり、基本解は $J_m(kr)$ と $N_m(kr)$ である。しかし後者は $r \rightarrow 0$ で発散し解として不適切なので捨てる。いま m 次の Bessel 関数の正の零点を小さい順に $\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots$ とする。 $\Theta(\theta)$ についての周期境界条件 $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$ および r についての境界条件 (5.4.7) を考慮すると、定数 m や k は次の値のみが許されることを示せ。

$$k_{ml} = \frac{\alpha_{ml}}{a} \quad \left(\begin{array}{l} m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ l = 1, 2, \dots \end{array} \right) \quad (5.4.13)$$

これより、境界条件 (5.4.7) を満たす方程式 (5.4.6) の一般解は次のように書ける*5。

$$\begin{aligned} \psi_{ml}(r, \theta, t) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left[A_{ml} \cos\left(\frac{c\alpha_{ml}}{a} t\right) + B_{ml} \sin\left(\frac{c\alpha_{ml}}{a} t\right) \right] J_m\left(\frac{\alpha_{ml}}{a} r\right) \\ & \times (C_{ml} \cos m\theta + D_{ml} \sin m\theta) \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

(c). 初期条件 (5.4.8) を考慮すると、 $m \geq 1$ の項は不適切なので捨てられること、および $m = 0$ における任意定数が次のように定まることを示せ。

$$A_{0l} = \frac{2}{\alpha_{0l} J_1(\alpha_{0l})}, \quad B_{0l} = 0, \quad C_{0l} = h, \quad D_{0l} = 0 \quad (5.4.15)$$

これより、求める解は次のようになる。

$$\psi_l(r, \theta, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2h}{\alpha_{0l} J_1(\alpha_{0l})} \cos\left(\frac{c\alpha_{0l}}{a} t\right) J_0\left(\frac{\alpha_{0l}}{a} r\right) \quad (5.4.16)$$

(d). 半径 a の円型膜の代わりに、半径 a, b ($a > b$) のふたつの同心円で囲まれた環状の膜の振動について考えるとどうなるか説明せよ。初期条件により任意定数は確定しなくてよい。

*5 ここで $m < 0$ は $m > 0$ の場合と従属になるので和に加えていない。

[4-3] Airy 方程式

Airy 方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - xy = 0 \quad (5.4.17)$$

の解は第1種変形 Bessel 関数 $I_\nu(x)$ と Bessel 関数 $J_\nu(x)$ で表せることが知られている。このことを以下の手順にしたがって確認する。

(a). $x \geq 0$ のとき、方程式 (5.4.17) を $\xi = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ と変数変換すると次のようになることを示せ。

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{1}{3\xi} \frac{dy}{d\xi} - y = 0 \quad (5.4.18)$$

(b). Bessel 関数を使って解ける微分方程式の処方箋にしたがって、 $x \geq 0$ における (5.4.17) の解が次のように表せることを示せ。

$$y = \sqrt{x} \left[c_1 I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) + c_2 I_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \right] \quad (x \geq 0) \quad (5.4.19)$$

(c). 同様に $x \leq 0$ のとき $\zeta = \frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}$ と変数変換し、解が次のように表せることを示せ。

$$y = \sqrt{-x} \left[c_3 J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} (-x)^{\frac{3}{2}} \right) + c_4 J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} (-x)^{\frac{3}{2}} \right) \right] \quad (x \leq 0) \quad (5.4.20)$$

Airy 方程式 (5.4.17) の解 (5.4.19), (5.4.20) は $x = 0$ で滑らかにつながることが期待される。このことを要請して4つの任意定数を絞ることを考えよう。

(d). 上で得られた解 (5.4.19), (5.4.20) の導関数が次のようになることを示せ。

$$y' = \begin{cases} x \left[c_1 I_{-\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) + c_2 I_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \right] & (x > 0) \\ x \left[c_3 J_{-\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3} (-x)^{\frac{3}{2}} \right) - c_4 J_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3} (-x)^{\frac{3}{2}} \right) \right] & (x < 0) \end{cases} \quad (5.4.21)$$

$$\quad (5.4.22)$$

(e). $x = 0$ において解が滑らかにつながるという要請から (すなわち $\lim_{x \rightarrow +0} y = \lim_{x \rightarrow -0} y$ かつ $\lim_{x \rightarrow +0} y' = \lim_{x \rightarrow -0} y'$)、4つの任意定数の間に次の関係が成り立つことを示せ*6。

$$c_3 = -c_1, \quad c_4 = c_2 \quad (5.4.23)$$

以上の議論から、Airy 方程式 (5.4.17) の一般解は次のように求められる*7。

$$y = \begin{cases} \sqrt{x} \left[c_1 I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) + c_2 I_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \right] & (x \geq 0) \\ \sqrt{-x} \left[-c_1 J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} (-x)^{\frac{3}{2}} \right) + c_2 J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} (-x)^{\frac{3}{2}} \right) \right] & (x \leq 0) \end{cases} \quad (5.4.24)$$

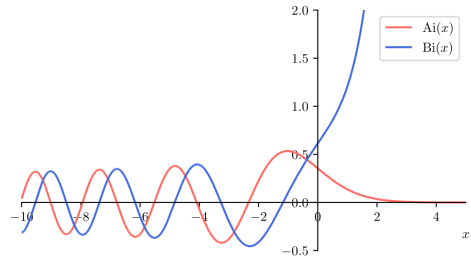
$$\quad (5.4.25)$$

*6 Bessel 関数や変形 Bessel 関数の $x \rightarrow \pm 0$ 極限を考える際はそれぞれの一般項を用いるとよい。

*7 [参考] 実用上の観点から、一般解 (5.4.24), (5.4.25) において $(c_1, c_2) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ とおいたものが広く用いられる。前者は Airy 関数 $\text{Ai}(x)$ (第1種 Airy 関数)、後者は Biry 関数 $\text{Bi}(x)$ (第2種 Airy 関数) と呼ばれる。すなわち、

$$\text{Ai}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{3} \left[-I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) + I_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \right] & (x \geq 0) \\ \frac{\sqrt{-x}}{3} \left[J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} (-x)^{\frac{3}{2}} \right) + J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} (-x)^{\frac{3}{2}} \right) \right] & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$\text{Bi}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{3} \left[I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) + I_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \right] & (x \geq 0) \\ \frac{\sqrt{-x}}{3} \left[-J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} (-x)^{\frac{3}{2}} \right) + J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} (-x)^{\frac{3}{2}} \right) \right] & (x \leq 0) \end{cases}$$



である。両者をまとめて Airy 関数と呼ぶこともある。Airy 関数は光学の回折理論や量子力学の WKB 近似などさまざまな分野で姿を現す特殊関数である。なお Airy とはイギリスの天文学者 G.B.Airy のことであるが、Biry はただの洒落である。

[4-4] 3次元井戸型ポテンシャル

次の3次元井戸型ポテンシャルの Schrödinger 方程式について考える。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi), \quad V(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \infty & (r > a) \end{cases} \quad (5.4.26)$$

ただし球座標系 (r, θ, φ) におけるラプラシアンは次の通りである。

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (5.4.27)$$

なお量子力学の理論から、つぎの境界条件が要請される。

$$\begin{cases} r < a \text{ において } \psi(r, \theta, \varphi) \text{ が有限である} \\ \psi(a, \theta, \varphi) = 0 \end{cases} \quad (5.4.28)$$

$$(5.4.29)$$

(a). $r > a$ の領域では $\psi(r, \theta, \varphi) = 0$ となるので、 $r < a$ の領域のみ考えればよい。このとき、 $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$ とおいて方程式 (5.4.26) を変数分離すると次のように書けることを示せ。

$$-\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y(\theta, \varphi) = l(l+1) Y(\theta, \varphi) \quad (5.4.30)$$

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \left\{ \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \right] R(r) = 0 \quad (5.4.31)$$

方程式 (5.4.30) は球面調和関数の微分方程式であり、 φ について一価、および $\theta = 0, \pi$ において有限であるという条件を課せば、 θ, φ について規格化された解は次のようになる。

$$Y(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad \left(\begin{array}{l} l = 0, 1, 2, \dots \\ -l \leq m \leq l \end{array} \right) \quad (5.4.32)$$

(b). 方程式 (5.4.31) は球 Bessel 微分方程式であり、基本解は $j_l \left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} r \right)$ と $n_l \left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} r \right)$ である。いま l 次の球 Bessel 関数の正の零点を小さい順に $\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, \dots$ とする。境界条件 (5.4.28), (5.4.29) を要請すると、方程式 (5.4.31) の基本解が規格化定数を除いて次の関数に限られることを示せ。

$$R(r) = j_l \left(\frac{\alpha_{ln}}{a} r \right) \quad \left(\begin{array}{l} n = 1, 2, \dots \\ l = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right) \quad (5.4.33)$$

(c). 最後に解 (5.4.33) を r について規格化し、波動関数およびエネルギー固有値が次のようになることを示せ。

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{a^3 [j_{l+1}(\alpha_{ln})]^2}} j_l \left(\frac{\alpha_{ln}}{a} r \right) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad E_{nl} = \frac{\hbar^2 \alpha_{ln}^2}{2ma^2} \quad \left(\begin{array}{l} n = 1, 2, \dots \\ l = 0, 1, 2, \dots \\ -l \leq m \leq l \end{array} \right) \quad (5.4.34)$$