Дифференциальные формы вместо плотностей

Винни-Пух

2017-10-10

Содержание

Крамольная мысль

Рассказать второму курсу, как преобразовывать одномерные и совместные функции плотности с помощью дифференциальных форм. Это позволит рассмотреть гамма и бета распределения, например.

Ни один определитель в ходе съёмок не пострадал :)

Кратко про дифференциальные формы

Неформальное определение. Дифференциальная форма — это объект, который приятно интегрировать. Обозначается так:

$$f(x, y)\, dx \wedge dy$$

Основное свойство дифференциальных форм:

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

Из основного свойства немедленно следует, что

$$dx \wedge dx = -dx \wedge dx = 0$$

Поехали!

Пример 1. Одномерная случайная величина

Вероятность попасть в отрезок $[x, x + dx]$ описывается формой с точностью до $o(dx)$:

$$P(X \in [x; x + dx]) \sim \begin{cases} 2xdx; \text{ если } x \in [0; 1] \\ 0; \text{ иначе.} \end{cases}$$

- Найдите примерно $P(X \in [0.7, 0.71])$
- Найдите точно вероятность $P(X \in [0.7, 0.71])$
- Найдите дифференциальную форму для $Y = X^3$.
- Найдите функцию плотности Y

Примерно:

$$P(X \in [0.7; 0.71]) \approx 2 \cdot 0.7 \cdot 0.01 = 0.014$$

Точно — через интеграл.

Выразим X через Y, $X = Y^{1/3}$ и подставим x в дифференциальную форму:

$$2xdx = 2(y^{1/3})d(y^{1/3}) = \frac{2}{3}y^{-1/3}dy$$

И полностью, с учётом границ:

$$P(Y \in [y; y + dy]) \sim \begin{cases} \frac{2}{3}y^{-1/3}dy, \text{ если } y \in [0; 1] \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Функция плотности — это то, что стоит перед dy:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}y^{-1/3}, \text{ если } y \in [0; 1] \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Пример 2. Переход к полярным координатам:

$$\int\int f(x, y)\, dx \wedge dy$$

Хотим сделать замену $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$. Получаем, что

$$\begin{aligned} dx \wedge dy = (\cos\phi dr - r\sin\phi d\phi) \wedge (\sin\phi dr + r\cos\phi d\phi) = \\ = (\text{неважно})\, dr \wedge dr + (r\cos^2\phi)\, dr \wedge d\phi + (-r\sin^2\phi) d\phi \wedge dr + (\text{неважно}) d\phi \wedge d\phi = \\ = (r\cos^2\phi)\, dr \wedge d\phi + (r\sin^2\phi) dr \wedge d\phi = r dr \wedge d\phi \end{aligned} \quad (1)$$

Отсюда получаем правило перехода к полярным медведям:

$$\int\int f(x, y)\, dx \wedge dy = \int\int f(r\cos\phi, r\sin\phi) r\, dr \wedge d\phi$$

Пример 3. Время за которое студент Вовочка решит две задачи — это две независимых экспоненциально распределенных случайных величины с параметром λ: X_1, X_2. Рассмотрим новую пару величин: суммарное время решения двух задач, $S = X_1 + X_2$, и долю времени на первую задачу, $Y_1 = X_1/S$.

- Найдите совместную плотность Y_1 и S;
- Являются ли Y_1 и S независимыми?
- Найдите частные плотности Y_1 и S с точностью до сомножителя

Поехали!

Выражаем X_1 и X_2 через новые переменные: $X_1 = Y_1 \cdot S$, $X_2 = (1 - Y_1)S$. Находим, что $dx_1 = sdy_1 + y_1 ds$, $dx_2 = (1 - y_1)ds - sdy_1$. И отсюда

$$\begin{multline} dx_1 \wedge dx_2 = (sdy_1 + y_1 ds) \wedge ((1-y_1)ds - sdy_1) = \\ = s(1-y_1)\, dy_1 \wedge ds - y_1 s\, ds \wedge dy_1 + (\text{неважно})\, ds \wedge ds + (\text{неважно})\, dy_1 \wedge dy_1 = \\ = s(1-y_1)\, dy_1 \wedge ds + y_1 s\, dy_1 \wedge ds = sdy_1 \wedge ds \quad (2) \end{multline}$$

Упрощаем дифференциальную форму в целом:

$$f(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2 = \lambda \exp(-\lambda x_1) \lambda \exp(-\lambda x_2)\, dx_1 \wedge dx_2 = \lambda^2 \exp(-\lambda s) s dy_1 \wedge ds$$

Отсюда новая совместная плотность равна:

$$f(y_1, s) = \begin{cases} \lambda^2 \exp(-\lambda s) s, \text{ если } y_1 \in [0; 1], s \geq 0 \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Поскольку функция плотности распадается в произведение плотностей, можно сделать вывод, что величины $S = X_1 + X_2$ и $Y_1 = X_1 / S$ независимы. Частные функции плотности с точностью до константы можно получить без интегрирования:

$$f(y_1) \propto 1 \text{ если } y_1 \in [0; 1]$$

Получается, что в данном случае константа пропорциональности равна 1, то есть

$$f(y_1) = 1 \text{ если } y_1 \in [0; 1]$$

И, следовательно,

$$f(s) = \lambda^2 \exp(-\lambda s) s \; s \geq 0$$

Задачки для самостоятельного решения

Занудная задача

Совместная функция плотности величин X и Y имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, \text{ если } x, y \in [0; 1]; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

- Выпишите дифференциальную форму вероятностей для пары X и Y
- Найдите дифференциальную форму для $S = X + Y$ и $R = X/(X + Y)$.
- Найдите совместную функцию плотности для $S = X + Y$ и $R = X/(X + Y)$.

Преобразование Бокса-Мюллера

Величины U_1 и U_2 независимы и равномерны $U[0;1]$. Рассмотрим пару величин $Y_1 = R \cdot \cos\alpha$, $Y_2 = R \cdot \sin\alpha$, где $R = \sqrt{-2\ln U_1}$, а $\alpha = 2\pi U_2$.

- Выпишите дифференциальную форму для пары U_1, U_2
- Выпишите дифференциальную форму для пары Y_1, Y_2
- Найдите совместный закон распределения Y_1 и Y_2;
- Верно ли, что Y_1 и Y_2 независимы?
- Как распределены Y_1 и Y_2 по отдельности?

Вывод плотности бета-распределения

В Пуассоновском потоке с интенсивностью λ время наступления k-го события распределено согласно гамма-распределению $Gamma(k, \lambda)$ и имеет вероятностную дифференциальную форму

$$P(Y \in [y; y+dy]) = const \cdot y^{k-1} \cdot \exp(-\lambda y), \text{ при } y \geq 0;$$

До прихода Ёжика Медвежонок сидел на крылечке один и насчитал k_1 падающую звезду. А после прихода Ёжика Медвежонок насчитал ещё k_2 падающих звёзд. Пусть Y_1 и Y_2 — время, которое которое наблюдал за звёздами Медвежонок до и после прихода Ёжика.

- Выпишите совместную дифференциальную форму для Y_1 и Y_2
- Найдите совместную дифференциальную форму для $S = Y_1 + Y_2$ и $Z = Y_1/S$.
- С точностью до сомножителя выпишите дифференциальную форму для доли времени, в течение которого Медвежонок наблюдал звёзды один.
- Выпишите функцию плотности бета-распределения

Источники мудрости

- Всё началось с одного ответа на форуме, whuber, there’s better way
- David Bachman Geometric approach to differential forms. Черновая версия опубликованной книжки.
- Jonathan Gratus A pictorial introduction to differential geometry. Ни одной формулы и только куча цветных картинок!
- Lorenzo Sadun Lecture Notes on Differential Forms. Приятные лекции.