中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
地址:中国安徽省合肥市 电话:0551-63602184 传真:0551-63631760 网址:http://www.ustc.edu.cn

- Ω：样本空间
- 上极限事件：$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n = \lim_{k\to\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n$

  下极限事件：$\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n = \lim_{k\to\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n$.

$$\begin{cases}\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n = \limsup_{n\to\infty}A_n\\ \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n = \liminf_{n\to\infty}A_n\end{cases}$$

- 事件运算满足：

→ 交换律：$A\cup B=B\cup A$. $AB=BA$.

→ 结合律 $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$.

→ 分配律 $(A\cup B)\cap C = AC\cup BC$.

→ 对偶原则 (De Morgan) $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$.
$(AB)^c = A^c\cup B^c$.

- 古典概型：

$P(\Omega)=1$. $P(\phi)=0$,

$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

- 组合数恒等式：
- Vandermonde 恒等式：

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k}.$$

- $\sum_{k=0}^{a-r}\binom{a}{k+r}\binom{b}{k}=\binom{a+b}{a-r}$.
- $\sum_{i=0}^{r}\binom{n}{i}\binom{n-i}{r-i}=\binom{n}{r}\cdot 2^r$.

- 计数模式：

①有编号分组：

n 个不同元素 → k 个不同组，$\sum_{i=1}^{k}n_i=n$.

$\Rightarrow \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$

⇔ n 个元素属于不同的 k 类，同类之间元素不可判辨，每类有 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 个，则 n 个元素全排列有 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ 种.

②.球盒模型 将 n 个球放入 k 盒子里.

1° 球可判辨，盒可判辨，$\sum n_i=n$

$\Rightarrow \frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$

2° 球不可判辨，盒可判辨.

(1)、有空盒：

$\sqcup\ 0\ 0 \cdot \sqcup \cdots\ 0\ 0\ \sqcup \cdots$
1　　2　　k

（固定 1 盒在最左侧，防止出现无盒中有球）

$\binom{n+k-1}{k-1}$.

(2)、无空盒：

$\sqcup\ 0^{\vee}0^{\vee}\cdots^{\vee}0 \Rightarrow \binom{n-1}{k-1}$.

(1) ⇒ $x_1+\cdots+x_k=n$ 有非负整数解个数

(2) ⇒ $x_1+\cdots+x_k=n$ 正整数解

③.不相邻问题.

④.可重排列与可重组合问题

1° 可重排列：k 种不同元素中取 n 个：k^n.

2° 可重组合：k 种不同元素中取 n 个，同种可重复使用，求所有不同的选取方式：

⇔ 求 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 个数，$n_1+\cdots+n_k=n$, $n_k\geq 0$

⇔ $\binom{n+k-1}{k-1}$ 种.

⑤. 大间距组合问题:

从 $1, 2, \cdots, n$ 中取 K 个 $j_1, \cdots, j_k < n$,
s.t $j_{i+1} - j_i > m$. $j_{i+1} > j_i$. 且 $(k-1)(m+1) < n$.

取法数: $\binom{n-(k-1)m}{k}$

ex: 10男4女站一列, 记A为事件: 每两位女士之间至少间隔两位男士. 求 $P(A)$

solu: $|A| = 4!\,10!\binom{14-(4-1)\times 2}{4}$
$|\Omega| = 14!$

- 几何概型: 等长度, 等体积, 等概率.

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}.\quad L\text{ 为 Lebesgue 测度.}$$

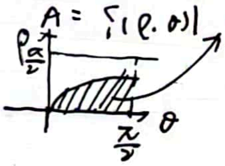
[Buffon投针问题] 平面上画满间距为 a 的平行直线, 向该平面投掷一枚长度为 l 的针, $(l<a)$, 求针和直线相交的概率.

记针与线夹角为 θ,
针中心与线距离为 ρ.

$\Omega = \{(\rho, \theta): 0 \le \rho \le \frac{a}{2}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$.

相交 $\Leftrightarrow$ $\frac{l}{2}\sin\theta \ge \rho$.

$A = \{(\rho, \theta) \mid \rho \le \frac{l}{2}\sin\theta\}$.



$$P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)} = \frac{2l}{a\pi}.$$

Ch2. 初等概率论

- 样本空间 Ω 的一些子集所构成的类 $\mathcal{F}$ 叫做事件 σ 域, 如果它满足
(1). $\Omega \in \mathcal{F}$.
(2). 只要 $E \in \mathcal{F}$, 就有 $E^c \in \mathcal{F}$.
(3). 只要 $\{E_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$, 就有 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \mathcal{F}$.

- 定理: Ω 为样本空间, 若 $\mathcal{F}$ 为其中的事件 σ 域, 则:
1°. $\phi \in \mathcal{F}$.
2°. $\{E_n, n \in N\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$.
3°. 若 $\{E_n, n = 1, \cdots, m\} \in \mathcal{F}$, 则 $\bigcap_{n=1}^{m} E_n \in \mathcal{F}$.
$\bigcup_{n=1}^{m} E_n \in \mathcal{F}$.
4°. $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$, 则 $E_1 - E_2 \in \mathcal{F}$.

- σ 域对可列交运算下封闭, 并运算下不封闭.

- 几类特殊 σ 域:
(1). 平凡域类, $\mathcal{F} = \{\phi, \Omega\}$
(2). 最小σ域 $\mathcal{F} = \{\ldots$

(3). 包含A的最小σ域: $\mathcal{F} = \{\phi, \ldots$

- 生成 σ 域: 给定子集类 $\mathcal{P}$. $\sigma(\mathcal{P})$.

Borel 域: $\mathcal{B}(R)$
$\mathcal{A}_1 = \{(-\infty, x), x \in R\}$, $\mathcal{A}_2 = \{(a, b), -\infty < a$.
$\mathcal{A}_3 = \{A: A \text{ 为}\mathbb{R}\text{中开集}\}$, $\mathcal{A}_4 = \{A: A \text{ 为}\text{闭集}\}$.
则 $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{A}_3) = \sigma(\mathcal{A}_4)$.

- 定义 概率

设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一个可测空间, 称集函数
$$P: \mathcal{F} \to [0, 1]$$
为 $\mathcal{F}$ 上一个概率, 若

规范性 非负性
(i) $P(\Omega) = 1$, $P(E) \ge 0$
(ii). 对任何两两互斥的 $A_n \in \mathcal{F}$, $n \ge 1$, 有
$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$. 可列可加性.

性质:
上述三条:
1°. 非负性
2°. 规范性
3°. 可列可加性
4°. $P(\phi) = 0$.
5°. 有限可加性: $\{E_k\}$ 两两不交, 则
$P(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} P(E_k)$.
6°. 可减性:
$E_1 \in \mathcal{F}$, $E_2 \in \mathcal{F}$, $E_1 \supset E_2$, 则
$P(E_1 - E_2) = P(E_1) - P(E_2)$.
7°. 单调性. $E_2 \subseteq E_1 \Rightarrow P(E_2) \le P(E_1)$.
8°. $P(E^c) = 1 - P(E)$.
9°. 加法定理.
$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} P(A_{j_1} A_{j_2} \cdots A_{j_k})$$
10°. 下连续性:
若 $E_n \subset E_{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots$, 则
$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$.
11°. 上连续性:
$E_n \supset E_{n+1}$, $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$.
12°. 次可加性:
$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$.

地址:中国安徽省合肥市 电话:0551-63602184 传真:0551-63631760 网址:http://www.ustc.edu.cn

· 利用概率性质解题 P46~P54.

→(无空盒问题):将 m 个小球等可能放入 n 个不同盒子, m>n. 试求"无空盒出现"(B)的概率.

A_k: 第 k 盒为空. 则 $B^c=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$.

$P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k})=\frac{(n-k)^m}{n^m}=(1-\frac{k}{n})^m$.

故 $P(B^c)=P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{1\le j_1<\cdots<j_i\le n}P(A_{j_1}\cdots A_{j_i})$

$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\binom{n}{i}(1-\frac{i}{n})^m$

$P(B)=1-P(B^c)$

(配对问题) 两副卡片共各 n 张, 分别编号为 1,2,…,n. 现分清洗后配摆. 若两摆中相应位置号码相同, 则称出现一个配对. 求"至少出现一个配对"的概率. A.

A_k: k 位置配对.

$P(A_{j_1}\cdots A_{j_k})=\frac{(n-k)!}{n!}$

$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$. $P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$

$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{1\le j_1<\cdots<j_i\le n}\frac{(n-i)!}{n!}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{1}{i!}$.

(续): n 份通知→n 个信封, 求"恰有 k 个配对"的概率.

D_k: 给定的 n-k 个信封不匹配. …

→(抽针问题续)

· 条件概率:

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$.

· 定理(概率乘法)

$P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_{n-1}A_{n-2}\cdots A_1)$

· 全概率公式: $\{A_1,\cdots,A_n\}$ 为 Ω 的一个分割.

$P(A_i)>0, i\ge1$. 则

$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)$.

· Bayes 公式

$P(A_k|B)=\frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)}$.

· 求概率的递推方法: 向前方法和向后方法.

· 事件独立性:

A, B 独立 ⟺ $P(AB)=P(A)P(B)$.

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立:

$P(\bigcap_{k=1}^{n}A_{j_k})=\prod_{k=1}^{n}P(A_{j_k})$.

· 用独立性求复杂事件的概率:

$A_1,\cdots,A_n$ 相互独立

$\Rightarrow P(A_1\cdots A_n)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i)$.

$P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))$.

Ch3. 随机变量

· 示性函数:

集合 A 的示性函数 $I_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A.\\ 0, & x\in A^c.\end{cases}$

· 二项分布

$X\sim B(n,p)$.

$P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$. $q=1-p$.

$EX=np$. $VarX=npq$.

变化规律:

$\frac{b(k;n,p)}{b(k-1;n,p)}=1+\frac{(n+1)p-k}{kq}$.

$\Rightarrow k<[(n+1)p]$, ↑, $k>[(n+1)p]$. ↓.

$k=[(n+1)p]$ 取 max.

"最大可能次数".

· 几何分布

$X\sim Geo(p)$ $\underbrace{\times\times\times\cdots\times}_{k次}\checkmark$

$\Rightarrow P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$. $k\ge1$.

· note that.

几何分布无记忆性,

$P(X-k\ge n|X\ge k)=P(X\ge n)$.

· 负二项分布（Pascal 分布）.

成功概率为 p. 成功：r 次. 最后一次成功.

试验总次数：X.

$X \sim NB(r,p)$

$P(X=n) = \binom{n-1}{n-r} p^r (1-p)^{n-r}$.

· $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r$, $Y_i \sim Geo(p)$.

→ Banach 火柴问题：某人口袋中有两盒火柴，每盒各有 n 个火柴. 他每次用时随机摸取一盒. 试求他取出一盒发现已空, 另一盒尚有 r 支概率.

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$. 摸盒1：成功.

共成功 $n+1$ 次. 失败 $n-r$ 次.

$X = 2n-r+1$.

$P(X=2n-r+1) = \binom{2n-r}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r+1}$

$P(A) = 2P(X=2n-r+1) = \binom{2n-r}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}$.

※. 考虑独立重复试验, 成功概率为 p.

求第 n 次成功在第 m 次失败之前的概率.

$X \sim NB(n,p)$.

$n \le X \le n+m-1$.

$\Rightarrow P = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$

· 期望：$EX = EY_1 + EY_2 + \cdots + EY_r = \frac{r}{p}$.

方差 $Var X = Var Y_1 + \cdots + Var Y_r = \frac{rq}{p^2}$.

· 均匀分布 $X \sim U[0,1]$.

$F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$

· 分布函数 cdf

$F(x) = P(X \le x)$.

性质. 满足这三条的 F 为 cdf.

① 单调增.

② 右连续性. $\lim_{t\to x^+} F(t) = F(x)$

③ 规范性. $F(-\infty)=0$. $F(+\infty)=1$.

· cdf 的反函数：

$F^{-1}(u) = \inf\{x \mid F(x) \ge u\}$. $u \in (0,1)$.

· cdf 的凸组合 $F(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F_k(x)$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$

· 定理：$F: R \to [0,1]$ 为一个 cdf.

对 $U \sim U(0,1)$. def $F^{-1}(y) = \inf\{x \mid$

$X = F^{-1}(U) \Rightarrow X \sim F$.

· 奇异连续随机变量：

F 为 cdf, F 连续, F 导数几乎处处为 0

· Lebesgue 分解：$\forall$ cdf F,

$F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3$. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$,

且 F_1：离散 cdf. F_2：绝对连续 cdf

F_3：奇异连续 cdf.

· pdf：

$f(x) = \begin{cases} F'(x), & \text{if } \exists. \\ 0 & \text{else}. \end{cases}$

$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

· Poisson 分布 $Poi(\lambda)$.

$B(n,p_n)$ 二项, $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$.

$n \to +\infty$. $b(k;n,p_n) \to Poi(\lambda)$.

$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. $X \sim Poi(\lambda)$.

$EX = \lambda$, $Var X = \lambda$.

pmf 单调性：

$\frac{P_\lambda(k)}{P_\lambda(k-1)} = \frac{\lambda}{k}$. 则 $k<\lambda$, ↑; $k>\lambda$, ↓.

$k = [\lambda]$, max.

· 指数分布 $Exp(\lambda)$.

$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $(x>0)$

$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \le 0 \\ 1-e^{-\lambda x} & 0 < x < +\infty. \end{cases}$

期望 $EX = \frac{1}{\lambda}$, 方差 $\frac{1}{\lambda^2}$.

· 无记忆性：

$P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$.

· 残存函数 $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

$\frac{p(x)}{\bar{F}(x)} = \lambda \Rightarrow$ 使用后下一刻失效概率稳

· Poision 分布与 $Exp(\lambda)$ 之间的关系. (P142)

· 伽玛分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$

pdf：$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x}$

$\alpha = n \in \mathbb{N}$. 有 $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$, $Y_i \sim Exp(\beta)$

$X \sim \Gamma(n,\beta)$. 则 $F = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta x}(\beta x)^k}{\cdots}$ $x>0$

Scanned with CamScanner

· 正态分布 $N(a,\sigma^2)$.

$N(a,\sigma^2)$: $\phi_{a,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}}$ $x\in R$.

$\Phi_{a,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\exp\left\{\frac{-(u-a)^2}{2\sigma^2}\right\}du$

$N(0,1)$: $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$

$\left\{\begin{array}{l}\Phi(-x)=1-\Phi(x),\\ \Phi_{a,\sigma}(x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)\end{array}\right.$ → 随机变量标准化.

$EX=a$. $Var X=\sigma^2$.

· $X\sim N(a,\sigma^2)\Rightarrow P(X\le x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$. $\frac{x-a}{\sigma}\sim N(0,1)$

· 3σ 原则:

$P(|X-a|\le 3\sigma)=\underline{0.9974}$.

$P(|X-a|\le 2\sigma)=\underline{0.9545}$

$P(|X-a|\le \sigma)=\underline{0.6827}$.

. 标准正态分布: $N(0,1)$. $\mu=0$, $\sigma=1$.

. 失效率函数

$X\sim F$, $F(0-)=0$, pdf 为 f.

失效率函数 def:

$\lambda(t)=\frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$, $\bar{F}(t)=1-F(x)$. 为生存函数.

· 卡方分布 χ_n^2、

. 定义: 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ i.i.d. r.v (独立同分布随机变量), 同时它们同分布于 $N(0,1)$. 称变量

$X=\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$. $n\in Z^+$.

· pdf:

$f_n(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$, $x>0$.

· 设 $X\sim Exp(\lambda)$. 则 $2\lambda X\sim\chi_2^2$.

· 设 $X\sim\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$. 则 $X\sim\chi_n^2$.

. 随机变量的截尾:

X 为随机变量. 若 X 上下方均无界, def:

$Y=\begin{cases}a, & X<a.\\ X, & a\le X\le b\\ b, & X>b.\end{cases}$

$\Rightarrow Y$ 为 X 的限尾随机变量.

$\Leftrightarrow Y=aI(X<a)+XI(a\le X\le b)+bI(X>b)$.

$F_Y(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ F_X(x) & a\le x<b\\ 1. & x\ge b.\end{cases}$

若做对称式限尾:

$Y=\begin{cases}0. & x<-c.\\ X, & -c\le x\le c\\ 1, & x>c\end{cases}$ $\Rightarrow F_Y(x)=F_X(x)I(x\ge -c)+(1-F_X(x))I(x\ge c)$.

. 切尾随机变量.

$Y=XI(a\le X\le b)$.

$F_Y(x)=\begin{cases}0. & x<-c,\\ F_X(x)-F_X(-c-0) & .-c\le x<0\\ F_X(x)+1-F_X(c) & ,0\le x<c\\ 1 & ,x\ge c.\end{cases}$

· 定理: $\underline{设\ X\sim F_X(x), F 连续,}$

$\underline{则\ Y:=F_X(X)\sim U(0,1).}$ #、

证明:

$P(Y\le t)=P(F_X(X)\le t)=P(X\le F_X^{-1}(t))$

$=F_X(F_X^{-1}(t))=t$.

$\Rightarrow \underline{Y\sim U(0,1)}$.

· 有关 $Exp(1)$:

若 $F(x)$ 满足 $F(x)<1$, $\forall x\in R$.

def $R(x)=-\ln(\bar{F}(x))=\ln\frac{1}{\bar{F}(x)}=\ln\frac{1}{1-F(x)}$.

$R(-\infty)=0$, $R(+\infty)=\infty$. 若 $F(x)$ 连续,

则 $Y=R(X)\sim E(1)$

• Cauchy 分布:

$$p(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}=g(x;\mu,\lambda).$$

• 定理: 设 X 服从连续型分布 $F_X(x)$，相应 pdf 为 $p_X(x)$，$a<x<b$。$u=g(x)$ 为 (a,b) 上严格单调且连续，$h(u)=g^{-1}(u)$ 为某区间 α,β 上可导函数，$Y=g(X)$ 为 r.v.，则其 pdf:

$$p_Y(x)=p_X(h(x))|h'(x)|,\quad x\in(\alpha,\beta).$$

①. $g(x)\uparrow$

$\Rightarrow F_Y(x)=F_X(h(x))$

②. $g\downarrow$.

$F_Y(x)=1-F_X(h(x))$.

• 对一般的 $Y=g(X)$，先求 Y 的 cdf，再求导求 pdf.

※ 由二项分布 → 正态分布:

$X\sim b(n,p)$，对 $d>0$，$P(|X-n$

为多少?

取 $p=\frac{1}{2}$:

$$b(i)=b(i;n,\tfrac{1}{2})=\binom{n}{i}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$

$$b\left(\tfrac{n}{2}\right)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$

$$\frac{b(\frac{n}{2}+d)}{b(\frac{n}{2})}\sim\exp\left\{-\frac{2d^2}{n}\right\}.$$

$$\Rightarrow b\left(\tfrac{n}{2}+d\right)\sim\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\exp\left\{-\frac{2d^2}{n}\right\}.$$

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{2}\right|\le\frac{c}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{-c\sqrt{n}\le i\le c\sqrt{n}} b\left(\tfrac{n}{2}+i\right)$$

$$\sim\sum_{-c\sqrt{n}\le i\le c\sqrt{n}}\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\exp\left\{-\frac{2i^2}{n}\right\}$$

$$=\sum_{-2c\le\frac{2i}{\sqrt{n}}\le 2c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{2i}{\sqrt{n}}\right)^2\right\}\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2c}^{2c}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx.$$

Ch4. 随机向量

· 随机向量定义:

$(X_1, \cdots, X_n)$ 为 n 维随机向量

$\Leftrightarrow$

$X_1, \cdots, X_n$ 为同一概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量.

· 多维分布:

$(X_1, \cdots, X_n)$ cdf: $F(x) = P(X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n)$.

性质:

① $F(x)$ 关于每个变量 x_i ↗.

② . 右连续.

③ . $F(x)$ 具有如下意义的非负性:

$$\Delta_{(a_1,\cdots,a_n)}^{(b_1,\cdots,b_n)} F = \sum_{*} (-1)^{\tau(x)} F(x_1, \cdots, x_n) \geq 0.$$

$$\tau(x) = \sum_{i=1}^{n} I\{x_i = a_i\}.$$

$$\Delta_{(a_1,\cdots,a_n)}^{(b_1,\cdots,b_n)} F = P(a_1 \le X_1 \le b_1, \cdots, a_n \le X_n \le b_n).$$

④ . $\lim_{x_i \to -\infty} F(x) = 0$. $\lim_{x_1 \to +\infty, \cdots, x_n \to +\infty} F(x) = 1$.

ex: $F(x, y) = \max\{F_1(x), F_2(y)\}$ 不为 cdf.

$F(x, y) = \min\{F_1(x), F_2(y)\}$ 为 cdf.

pf: $X_1 = F_1^{-1}(V)$. $X_2 = F_2^{-1}(V)$. $V \sim U(0,1)$.

$\Rightarrow P(X_1 \le x, X_2 \le y) = P(V \le F_1(x), V \le F_2(y)) = \min\{F_1(x), F_2(y)\}$
$= F(x, y)$.

· 边际分布:

联合分布 $\xrightarrow{\text{唯一}}$ 边际分布

$p(x, y) \rightarrow p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\,dy$.

$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\,dx$.

· 条件分布: $(X, Y) \sim p(x, y)$. 当 $p_2(y) > 0$,

有 $p_1(x|y) = \dfrac{p(x, y)}{p_2(y)}$

$p_2(y|x) = \dfrac{p(x, y)}{p_1(x)}$.

*. 设 $X_1, \cdots, X_n$ iid $\sim U(0,1)$. 则,

$Z = \{X_1 + X_2 + \cdots + X_n\} \sim U(0,1)$.

证明: 只需证 $\{X_1 + X_2\} \sim U(0,1)$.

· 多维均匀分布

D为n维 Borel 集, $0 < L(D) < \infty$,

$p(x_1, \cdots, x_n) = \dfrac{1}{L(D)}$. $(x_1, \cdots, x_n) \in D$.

· 二维正态分布:

$N(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$. 边际分布.

$X_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2)$. $X_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2)$.

$X_1\ X_2$ 相互独立 $\Leftrightarrow \sigma_1 = \sigma_2$.

条件分布: $[Y | X = x] \sim N(m(x), \sigma_2^2(1 - r^2))$.

$m(x) = a_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - a_1)$.

· 随机变量的和

① 二项: $X \sim B(n, p)$. $Y \sim B(m, p)$.

$\Rightarrow Z = X + Y \sim B(m+n, p)$.

卷积封闭性. 下略.

② Pascal 分布 $X \sim NB(r, p)$. $Y \sim NB(h, p)$

$Z = X + Y \sim NB(r+h, p)$.

③ . Poi(λ). $X \sim$ Poi(λ). $Y \sim$ Poi(μ)

$\Rightarrow X + Y \sim$ Poi$(\lambda + \mu)$.

④. 二维连续型: $Z = X + Y$.

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z - t, t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p(u, z - u)\,du.$$

若 X. Y 相互独立:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(z - t)\, p_Y(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(u)\, p_Y(z - u)\,du.$$

• X_1, X_2 相互独立,且 $\sim Exp(\lambda)$.
求 $Z=X_1-X_2$ 的 pdf.

$X=X_1$. $Y=-X_2$. $\Rightarrow p_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}, x>0$

$p_Y(y)=\lambda e^{\lambda y}, y<0$.

$p_{X_1-X_2}(x)=p_{X+Y}(x)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x-t)\,p_Y(t)\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0} p_X(x-t)\,\lambda e^{\lambda t}\,dt=\int_{-\infty}^{0}\lambda e^{\lambda(t-x)}\cdot\lambda e^{\lambda t}\,dt$$

$$=\begin{cases}\frac{\lambda}{2}e^{\lambda x}, & x<0.\\ \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

$\underline{p_Z(x)=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}}$. $-\infty<x<\infty$.
Laplace 分布.

• $\underline{F_{X+Y}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_Y(x-t)\,dF_X(t)}$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F_X(x-t)\,dF_Y(t).$$

$$=F_X * F_Y.$$

$\Rightarrow$ ①. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立,则

$F_{X_1+\dots+X_n}=F_{X_1}*F_{X_2}*\dots*F_{X_n}$.

$X_1,\dots,X_n\sim F$

$\Rightarrow F_{X_1+\dots+X_n}=F*\dots*F=F^{*n}$

☆ 加玛分布

$X_1,\dots,X_n$ iid $\sim Exp(\lambda)$.

$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\Gamma(n,\lambda)$.

其pdf为 $\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x}=\frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}$.

Γ分布再生性: $X\sim\Gamma(\alpha_1,\lambda)$.
$Y\sim\Gamma(\alpha_2,\lambda)$. X, Y 独立

$\Rightarrow X+Y\sim\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$.

· 正态分布再生性:

$X\sim N(a_1,\sigma_1^2)$
$Y\sim N(a_2,\sigma_2^2)$
X, Y 独立
$\Rightarrow X+Y\sim N(a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

$\boxed{\sum X_i\sim N(\sum a_i,\sum\sigma_i^2).}$

$X\sim N(a_1,\sigma_1^2)\Rightarrow aX+b\sim N(aa_1+b,\ a^2\sigma_1^2)$

• $(x_1,\dots,x_n)\to(y_1,\dots,y_n)$.

$$J=\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}.$$

$q(y_1,\dots,y_n)=p(h_1,\dots,h_n)|J|$, $(y_1,\dots,y_n)\in D$.

$F(y_1,\dots,y_n)=\int_{-\infty}^{y_n}\cdots\int_{-\infty}^{y_1}p(\dots,\dots)|J|\,du_1\cdots du_n$.

• U, V iid $\sim U(0,1)$.

$X=\sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V)$. $Y=\sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V)$

sol: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{-2\pi}{u}$. $\Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{u}{-2\pi}$

$$p(u,v)=\begin{cases}0\\ 1, & (u,v)\in(0,1)\times(0,1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{-2\ln u}\cos 2\pi v\\ y=\sqrt{-2\ln u}\sin 2\pi v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\\ v=\frac{\arctan(y/x)}{2\pi}\end{cases}$$

$$q(x,y)=p(u,v)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=\left|\frac{u}{-2\pi}\right|\cdot 1=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

• 次序统计量:

$X_1, X_2, \dots, X_n$ iid $\sim F$ 或 pdf f.

$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\dots\le X_{(n)}$.

记 $Y_1=X_{(1)}=\min\{X_1,\dots,X_n\}$.
$Y_2=\max\{X_1,\dots,X_n\}$.

$\Rightarrow (Y_1\le x)=\bigcup_{k=1}^{n}(X_k\le x)=1-\bigcap_{k=1}^{n}(X_k>x)$.

$(Y_2\le x)=\bigcap_{k=1}^{n}(X_k\le x)$.

独立同分布场景下:

$X_1,\dots,X_n$ iid $\sim F$. $\underline{Y_1=\min, Y_2=\max}$.

$\Rightarrow F_{Y_1}(x)=1-(1-F(x))^n$. $F_{Y_2}(x)=F^n(x)$.

$p_{Y_1}(x)=n(1-F(x))^{n-1}p(x)$.

$p_{Y_2}(x)=nF^{n-1}(x)p(x)$.

$$G(\underset{\min}{x},\underset{\max}{y})=\begin{cases}F^n(y)-[F(y)-F(x)]^n, & x<y.\\ F^n(y). & x\ge y.\end{cases}$$

$$g(\underset{\min}{x},\underset{\max}{y})=n(n-1)\left[F(y)-F(x)\right]^{n-2}p(x)p(y).\quad x<y.$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

随机变量的随机加权平均：

X_1, X_2 iid. $X_1 \sim F_1$. $X_2 \sim F_2$. U 为 Bernoulli 随机变量

$\Rightarrow Z = UX_1 + (1-U)X_2$. $P(U=1) = p$.

$F_Z(x) = pF_1(x) + (1-p)X_2$.

· 次序统计量的 pdf：

$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$.

$X_{(i)}$ 的 pdf：

$(X_{(i)} \le x) \Leftrightarrow X_1, \cdots X_n$ 中至少有 i 个不大于 x.

A_m：$X_1 \cdots X_n$ 中有 m 个不大于 x.

$(X_{(i)} \le x) = \sum_{m=i}^{n} A_m$.

$P(X_{(i)} \le x) = \sum_{m=i}^{n} \binom{n}{m} F^m(x)(1-F(x))^{n-m}$

$$p_{X_{(k)}}(x) = \frac{dP(X_{(i)} \le x)}{dx}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} F^{k-1}(x)(1-F(x))^{n-k} p(x)$$

$$p_{(X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots X_{(n)})}(x_1, \cdots x_n)$$

$$= n!\, p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n).$$

对该式积分，可得部分次序统计量的联合密度.

ex 1. 区间 $[0,1]$ 中随机取 3 个点，中间两点距离不小于 d 的概率.

X_1, X_2, X_3.

$g(s_1, s_2, s_3) = 6p(x_1)p(x_2)p(x_3) = 6.$ → 写 pdf.

$P(s_3 - s_2 > d;\ s_2 - s_1 > d)$ → 积分上下限.

$$= 6\int_{2d}^{1} dz \int_{d}^{z-d} dy \int_{0}^{y-d} dx$$

$$= (1-2d)^3.$$

注：一般地，当 $0 < d < \frac{1}{n-1}$，则向区间中随机抛 n 个点，其间两点距离均不小于 d 的概率为 $(1-(n-1)d)^n$

· 记录值

$\{X_n, n \ge 1\}$ iid. $\sim F$. X_n 为 n 时刻观测值

· X_1 为一个记录值.

· $n \ge 2$，若 $X_n > \max\{X_1, \cdots X_{n-1}\}$，则 X_n 为一个记录值.

$$I_j = \begin{cases} 1. & X_j \text{ 为记录值} \\ 0. & \text{else} \end{cases}$$

$Z_n = \sum_{j=1}^{n} I_j$. ⇒ n 个观测值中记录值出现次数.

$P(I_j = 1) = \frac{1}{j}$. $P(I_j = 0) = 1 - \frac{1}{j}$.

→ $R_n = \sum_{k=1}^{n} I(X_k \ge X_n)$.

则 R_n 为 X_n 在 $X_1, \cdots, X_n$ 中处于第 n 大位置.

Renyi 定理：$X_n \sim F$，则

$P(R_n = k) = \frac{1}{n}$, $k = 1, 2, \cdots, n$.

Q1: $X_1 \sim U(0,1)$

$X_2 \sim U(0, X_1)$

$\vdots$

$X_n \sim U(0, X_{n-1})$.

求 X_n 的边际分布.

solu: $X_1 \sim U(0,1)$.

$$p_{X_2|X_1}(x_2|x_1) = \frac{p(x_1,x_2)}{p_{X_1}(x_1)}$$

$$\Rightarrow p(x_1,x_2) = p_{X_1}(x_1)\,p_{X_2|X_1}(x_2|x_1) = 1\cdot\frac{1}{x_1}.$$

$$p_{X_2}(x_2) = \int_{x_2}^{1} p(x_1,x_2)\,dx_1 = \int_{x_2}^{1}\frac{1}{x_1}\,dx_1 = \ln\frac{1}{x_2}.$$

$$p(x_2,x_3) = p_{X_2}(x_2)\,p_{X_3|X_2}(x_3|x_2) = \ln\frac{1}{x_2}\cdot\frac{1}{x_2}$$

$$\Rightarrow p_{X_3}(x_3) = \int_{x_3}^{1}\frac{1}{x_2}\ln\frac{1}{x_2}\,dx_2 = -\frac{1}{2}(\ln x_2)^2\Big|_{x_3}^{1} = \frac{1}{2}(\ln x_3)^2.$$

以此类推…

$$p_{X_n}(x_n) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}(\ln x_n)^{n-1}.$$

steps: 1: 取条件: $\forall x_n$ 的 $F(x_n)$ 依赖于 x_{n-1}

2. 用条件概率公式计算联合分布.

3. 用联合分布 $\xrightarrow{积分}$ 边际分布.

*. $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. $\Gamma(n) = (n-1)!$ $\Gamma(1) = 1$.

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$$

· $X_1, \dots, X_n$ iid $\sim Exp(1)$.

$U_1, \dots, U_n \sim U(0,1)$.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $Y_m = \frac{S_m}{S_n}$. $0<m<n$.

$Z = (U_1U_2\cdots U_n)^{-Y_m}$.

求 Z 的分布.

solu: $\ln Z = Y_m(\ln\frac{1}{U_1} + \ln\frac{1}{U_2} + \cdots + \ln\frac{1}{U_n})$.

$U_i \sim U(0,1) \Rightarrow \underbrace{\ln\frac{1}{U_i} \sim Exp(1)}$.

记 $Z_i = \ln\frac{1}{U_i}$.

$\sum_{i=1}^{n}(\ln\frac{1}{U_i}) = \sum_{i=1}^{n} Z_i$. $Z_i \sim Exp(1)$.

$\ln Z = \frac{S_m}{S_n}\cdot\sum_{i=1}^{n} Z_i$.

$S_m \sim \Gamma(m,1)$. $S_n - S_m \sim \Gamma(n-m,1)$.

且显然有 S_m 与 S_{n-m} 独立.

$S_m = x$. $S_n - S_m = y$.

$$p(x,y) = \Gamma(m,1)\,\Gamma(n-m,1) = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}e^{-x}\cdot\frac{y^{n-m-1}}{(n-m-1)!}e^{-y}$$

$Y_m = \frac{S_m}{S_n} = \frac{x}{x+y}$ 记为 u.

记 $v = S_n = x+y$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = v - uv = v(1-u). \end{cases} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{vmatrix} = v.$$

$$q(u,v) = v\,p(uv, v(1-u))$$

$$= v\cdot\frac{u^{m-1}v^{m-1}e^{-uv}}{(m-1)!}\cdot\frac{v^{n-m-1}(1-u)^{n-m-1}}{(n-m-1)!}e^{-v(1-u)}$$

$$= \frac{u^{m-1}(1-u)^{n-m-1}}{(m-1)!(n-m-1)!}\cdot v^{n-1}e^{-v}$$

$$= \underbrace{\frac{(n-1)!\,u^{m-1}(1-u)^{n-m-1}}{(m-1)!(n-m-1)!}}_{q_U(u)}\cdot\underbrace{\frac{v^{n-1}e^{-v}}{(n-1)!}}_{q_V(v)}$$

$\Rightarrow$ u, v 独立.

$u = Y_m$. $v = S_n$.

$\Rightarrow \ln Z = uv$.

Ch 5 数字特征与特征函数

· 期望：若 $E|X| = \int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,dF(x) < \infty$，则 EX 存在，且

$$EX := \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x) \xlongequal{p(x)\exists} \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\,dx.$$

对离散型 rv： $EX = \sum_i a_i p_i$.

（若 $E|X| = \sum_i |a_i| p_i < \infty$）

→ Cauchy 分布不存在期望.

· 积分变换定理：X 为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量，$F(x)$ 为其 cdf，则对 $g(x)$，有

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dF(x) = \int_{\Omega} g(X)\,dP.$$

$$\Rightarrow E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dF(x) \xlongequal{\exists p(x)} \int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)\,dx.$$

$$E[g(X_1,\dots,X_n)] = \int g(x_1,\dots,x_n)\,dF(x_1,\dots,x_n).$$

· 期望的性质：

1° $EC = C$.

2° 线性性：

① $EcX = cEX$.

② $E(X+Y) = EX+EY$ ⇐ 不需要独立！

3° 若 $X \geq 0$，则 $EX \geq 0$.

4° 若 $X \geq Y$，则 $EX \geq EY$.

· 若 X, Y 相互独立，期望存在，则

$EXY = EXEY$.

· 常见分布的期望.

1. $X \sim B(n,p)$, $0<p<1$. $EX = np$. $Var X = np(1-p)$.
2. $X \sim Poi(\lambda)$, $\lambda>0$, $EX=\lambda$. $Var X=\lambda$.
3. $X \sim Geo(p)$, $0<p<1$. $EX = \frac{1-p}{p}$ $Var X = \frac{1-p}{p^2}$

   $P(X=k) = q^k p$.

   $X \sim Geo(p)$. $EX = \frac{1}{p}$. $Var X = \frac{1-p}{p^2}$

   $P(X=k) = q^{k-1} p$.
4. $X \sim NB(\alpha,p)$ $\alpha>0, 0<p<1$. 则

   $EX = \frac{\alpha(1-p)}{p}$.
5. $X \sim U(a,b)$, $EX = \frac{1}{2}(a+b)$. $Var X = \frac{(b-a)^2}{12}$
6. $X \sim Exp(\lambda)$. $EX = \frac{1}{\lambda}$. $Var X = \frac{1}{\lambda^2}$
7. $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$. $EX = \frac{\alpha}{\beta}$. $Var X = \frac{\alpha}{\beta^2}$
8. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. $EX = \mu$. $Var X = \sigma^2$.

· 求数学期望的方法：

1. 分解随机变量：

$Y = X_1+X_2+\dots+X_n$

$EY = EX_1+EX_2+\dots+EX_n$.

ex 1.1. 一盒中有 a 个白球和 b 个黑球，无放回取 n 个球，$n \leq a+b$. 记 X 为白球个数，求 EX.

$I_k = \begin{cases} 1, & 第k次取出白球 \\ 0, & else. \end{cases}$

$X = I_1+\dots+I_n$, $EI_k = a/(a+b)$. $\Rightarrow EX = \frac{na}{a+b}$.

ex 1.2. 一盒中小球编号为 $1\sim n$，从中取 m 个，X 为小球编号之和. $EX = ?$

解：Y_i：i 个小球编号.

$Y_i \sim U\{1,2,\dots,n\} \Rightarrow EY_i = \frac{n+1}{2}$.

$\Rightarrow EX = \sum_{i=1}^{m} EY_i = \frac{m(n+1)}{2}$

ex 1.3. n 把钥匙只能开 1 个锁，只有一把能打开. 逐一尝试且试完拿走. 记 X 为开锁时试开的次数.

$EX = ?$

解：A_i：第 i 次开. $X_i = \begin{cases} 1, & 前 i-1 次未能开锁 \\ 0, & else. \end{cases}$

$\Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. $X_1 = 1$. $EX_1 = 1$.

$EX_i = P(A_1^c \cdots A_{i-1}^c) = \frac{n-i+1}{n}$ $\Rightarrow EX = \frac{n+1}{2}$.

ex1.4. 一辆客车载有20个从机场开往市区，沿途有10个站点，如果到了一站有人下车，则停车。每个旅客在每站等可能下车，求客车停站次数 X 的期望。

解: ① ② ··· ⑩.

$I_k = \begin{cases}1, & k\text{th 站有人下车} \\ 0, & \text{无}\end{cases} \Rightarrow X = I_1+\cdots+I_{10}$

$EI_k = P(I_k=1) = 1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$.

$\Rightarrow EX = 10 - 10\left(\frac{9}{10}\right)^{20} \approx 8.787$.

$\boxed{\text{游程}}$: m个0，n个1排一行，其中相邻排列的0/1称为一个游程。

↳ ex1.5、m个0，n个1随机排成一行，求出现游程的个数Z的期望。

出现游程: $0\to1$, $1\to0$ (k位). $I_k = \begin{cases}1, & k\text{位出现} \\ 0\end{cases}$

⇒ 第k位 $(2\le k\le m+n)$ 出现 1-游程/0-游程.

$P(I_k=1) = mn/(m+n)(m+n-1)$.

$P(I_1=1) = n/(m+n)$: 1 游程

$P(I_1=0) = m/(m+n)$: 0 游程

X: 1-游程. Y: 0-游程

$EX = \frac{n+mn}{m+n}$ $EY = \frac{m+mn}{m+n}$

ex1.6. m个0，n个1排成一行，W为该序列中1首次出现的时刻，求EW.

解: $1\le W\le m+1$.

定义 $B_k = \{0_k\text{出现在所有}n\text{个1之前}\}$, $k=1,2,\dots,m$.

$1+\sum_{k=1}^{m} B_k = W$.

$EB_k = \frac{1}{n+1} \Rightarrow EX = 1+\frac{m}{n+1}$

· 随机变量的矩:

· r阶原点矩: $E[X^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \, dF(x)$.

r阶绝对矩: $E|X|^r$

关于a的r阶矩: $E(X-a)^r$.

关于a的r阶绝对矩: $E|X-a|^r$

r阶中心矩: $E(X-EX)^r$.

r阶中心绝对矩: $E|X-EX|^r$.

· 称随机变量r次可积，若 $E|X|^r<\infty$.

$\Rightarrow X\in L_r = \{X \mid E|X|^r<\infty, r>0\}$.

· 定义 $\mu_r = E|X-EX|^r$.

偏度系数: $\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$

峰度系数: $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^{2}}$

· C_r 不等式:

设 $r>0$, $X_i\in L_r$, $i=1,\dots,n$, 则

$$E\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|^r \le C_r\sum_{i=1}^n E|X_i|^r.$$

当 $r>1$ 时, $C_r = n^{r-1}$, 当 $r\in(0,1]$ 时, $C_r=1$.

$n=2$时, 即为

$E|X_1+X_2|^r \le C_r(E|X_1|^r + E|X_2|^r)$.

证明: $r>1$ 时, 利用 $f(x)=|x|^r$ 为凸函数,

$r\in(0,1)$ 时, 利用 $|x_1+x_2|^r \le |x_1|^r + |x_2|^r$.

· Jensen不等式: X为一个r.v., $E|X|<\infty$, g为一个Borel可测的凸函数, 则

$$E[g(X)] \ge g(EX).$$

⇓

定理. 若 $0<s<r$, $X\in L_r$, 则 $X\in L_s$, 且

$(E|X|^s)^{\frac{1}{s}} \le (E|X|^r)^{\frac{1}{r}}$

证明: 用Jensen不等式 取 $g(x)=|x|^{r/s}$.

· Hölder 不等式:

设 $p>1$, $1/p+\frac{1}{q}=1$, $X\in L_p$, $Y\in L_q$, 则

$E|XY| \le (E|X|^p)^{\frac{1}{p}}(E|Y|^q)^{\frac{1}{q}}$.

· Minkowski 不等式:

$(E|X+Y|^p)^{\frac{1}{p}} \le (E|X|^p)^{\frac{1}{p}} + (E|Y|^p)^{\frac{1}{p}}$.

· 使用Jensen不等式的例子:

ex1. $a_1,a_2,\dots,a_n$ 为正实数, $p_1,p_2,\dots,p_n>0$ 且 $\sum p_i=1$

则有 $\sum_{i=1}^n p_i a_i \ge \prod_{i=1}^n a_i^{p_i}$.

证明: $\sum_{i=1}^n p_i a_i = \sum_{i=1}^n p_i e^{\ln a_i}$

$\prod_{i=1}^n a_i^{p_i} = \prod_{i=1}^n e^{p_i\ln a_i} = e^{\sum_{i=1}^n p_i \ln a_i}$

$\Rightarrow g(x)=e^x$, 凸.

$E(g(X)) \ge g(EX) \Rightarrow \sum_{i=1}^n p_i e^{\ln a_i} \ge e^{\sum_{i=1}^n p_i\ln a_i}$ #

ex2. (熵). $P(X=k)=p_k$, $k=1,2,\dots,n$. $\sum p_k=1$.

则其熵为 $H(X) = -\sum_{k=1}^n p_k\ln p_k$. $U\sim U\{1,2,\dots,n\}$

用Jensen不等式 证明 $H(X)\le H(U)$.

证明: $H(X) = -\sum_{k=1}^n p_k\ln p_k = \sum_{k=1}^n p_k \ln\frac{1}{p_k}$.

$H(U) = \frac{1}{n}\ln n \cdot n = \ln n$.

$\underline{Y=p_k} \Rightarrow$ $H(X) = -nEg(Y)$, $g(x)=x\ln x$ 为凸函数 $\Rightarrow$ $Eg(Y) \ge g(EY) = g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}\ln n$

$-nEg(Y) \ge -\ln n$.

$Eg(Y) \le \ln n \Rightarrow H(X)\le H(U)$.

· 方差：$(X \in L_2)$.

$Var X = E(X-EX)^2$

性质：

1° $X \in L_2$ 时，$VarX = EX^2 - (EX)^2$.

2° $VarX = 0 \Leftrightarrow \exists c, P(X=c)=1$.

3° $Var(cX) = c^2 VarX$.

4° $VarX \le E(X-c)^2$.

5° 若 X 与 Y 相互独立，则 $Var(X+Y) = VarX + VarY$.

· 随机变量的标准化：

$X \in L_2$，$X^* = \dfrac{X-EX}{\sqrt{VarX}}$ 为 X 的标准化 r.v.

· 用方差大于0的性质证明不等式：

5.1.12. $x,y,z>0$，$x+y+z=1$，证明：$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z} \ge 36$.

解：$P(X=\frac{1}{x})=x$，$P(X=\frac{2}{y})=y$，$P(X=\frac{3}{z})=z$.

$\Rightarrow VarX = EX^2-(EX)^2$

$EX^2 = \frac{x}{x^2} + \frac{4y}{y^2} + \frac{9z}{z^2} = \frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$.

$EX = 6 \quad \Rightarrow VarX \ge 0$，$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z} \ge 36$.

5.1.6. 在一次聚会上，n个人将帽子混在一起，然后每个随机取帽，记 X 为能正确取到帽子的人数，求 $VarX$.

解. $I_k = \begin{cases} 1, & 第k个人成功拿到自己的帽子 \\ 0, & else \end{cases}$

$X = \sum_{k=1}^{n} I_k$. $EI_k = \frac{1}{n}$. $\Rightarrow EX = 1$.

$E(I_iI_j) = \frac{1}{n(n-1)}$ → 随机变量分解开后，计算方差.

$EX^2 = E(\sum_{k=1}^{n} I_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} E I_k^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} E(I_iI_j)$

$= 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)} \cdot 2 = 2$.

$\Rightarrow VarX = 1$.

· 中位数：ν 为 X 的中位数，若

$P(X \ge \nu) \ge \frac{1}{2}$，$P(X \le \nu) \ge \frac{1}{2}$.

p分位数：$P(X \le \mu_p) \ge p$，$P(X \ge \mu_p) \ge 1-p$.

上p分位数：$P(X \ge \mu_p') \ge p$，$P(X \le \mu_p') \ge 1-p$

· 条件期望：

$E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \, dF_{2|1}(y|x)$ (假设存在)

· 条件期望的平滑公式：("的"为定")

$E(E[Y|X]) = EY$. 全期望公式.

证明：$g(X) = E[Y|X]$. (也可用于计算特征函数).

$g(x) = E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \, p_2(y|x) dy$.

$E(E[Y|X]) = Eg(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_X(x)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p_1(x) dx$.

$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y \, p_2(y|x) p_1(x) \, dx \, dy$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} y dy \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y) dx}_{} = p_2(y)$ 不记得除 ↗ P(A)!

$= \int_{-\infty}^{+\infty} y \, p_2(y) dy = EY$.

· 对随机事件A：$E(X|A) = \dfrac{E(XI(A))}{P(A)}$

例5.2.2. X, Y iid $\sim B(n,p)$，求 $E[X|X+Y=m]$.

解：① $P(X=k|X+Y=m) = \dfrac{P(X=k)P(Y=m-k)}{P(X+Y=m)} = \dfrac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}}$

$\Rightarrow [X|X+Y=m] \sim$ 超几何分布.

$E[X|X+Y=m] = \frac{m}{2}$.

② $\boxed{对称性法}$ X, Y 对称，$E[X|Y+X=m] = E[Y|X+Y=m]$

$\Rightarrow \cdots = \frac{m}{2}$

例5.2.4. 袋中有a白，b黑，依次取球，直至取出一个白球为止. X为取出的黑球个数. $EX=?$

解：① $M_{a,b} = EX$，$Y=1$. 第一个球为白.

$M_{a,b} = E[X|Y=1]P(Y=1) + E[X|Y=0]P(Y=0)$

$= 0 + \frac{b}{a+b} \cdot (1 + M_{a,b-1})$.

$\Rightarrow M_{a,b} = \frac{b}{a+b}(1+M_{a,b-1})$.

$M_{a,0} = 0$，$M_{a,1} = \frac{1}{a+1}$.

$\Rightarrow \cdots \Rightarrow M_{a,b} = \frac{b}{a+1}$.

② $I_k = \begin{cases} 1, & k号黑球在白球前取出 \\ 0, & else. \end{cases}$ $EX = E\sum I_k$

则 $P(I_k=1) = \frac{1}{a+1}$，$EI_k = \frac{1}{a+1} \Rightarrow EX = \frac{b}{a+1}$.

例5.2.6. 连续抛一个均匀的骰子，直至连续抛出两个1点. 记X为所需要抛的次数. $EX=?$

解：Y：第一次抛的点数. Z：第2次…

$EX = E[X|Y=k] = E[X|Y=1]\frac{1}{6} + \frac{5}{6}(EX+1)$

$E[X|Y=1] = E[X|Y=1, Z=1]\frac{1}{6} + E[X|Y=1, Z\ne1] = \cdots = 2 + \frac{5}{6}E\cdots$

例5.2.6. 有n种卡片,每种数量无限,每次随机从n种中选择一张,选择每张卡片的概率相同.
现需要集齐n种卡片, X为摸卡次数, 求EX.

解: $X_1=1$ $\to$ X_2 … X_i … X_n $\to$ X_i: 集到第i种所用次数

$X_1=1$.

X_2: X_1对应的卡与其它类卡 ⇒ $X_2\sim Geo(\frac{n-1}{n})$

⋮

$X_n\sim Geo(\frac{1}{n})$ $EX=EX_1+\cdots+EX_n$
$=1+\frac{n}{n-1}+\cdots+\frac{n}{1}$.

例5.2.10. $X_1,X_2,\cdots$ i.i.d $\sim U(0,1)$. $Y=\min\{n:\sum_{i=1}^n X_i>1\}$. 求EY.

解: 设 $m(x)=E(Y_x)=E\min\{n:\sum_{i=1}^n X_i>x\}$ ← 两步走策略

$\Rightarrow E[Y_x|X_1=y]=\begin{cases}1, & y>x\\ 1+m(x-y), & y\le x\end{cases}$

$\Rightarrow E[Y_x]=\int_0^1 E[Y_x|X_1=y]dy$
$=\int_0^x 1+m(x-y)dy+\int_x^1 1\,dy=1+\int_0^x m(x-y)dy$
$\overset{u=x-y}{=} 1+\int_0^x m(u)du=m(x)$.

$\Rightarrow m(x)=ce^x$. $m(0)=1\Rightarrow c=1$, $m(x)=e^x$.
$m(1)=1=E[Y_1]$. #.

· 用条件概率求概率:

$P(A)=E\{E(I_A|Y)\}=E\{P(A|Y)\}$

· 离散 r.v: $P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A|Y=a_i)P(Y=a_i)$
· 连续 r.v: $P(A)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(A|Y=y)p_Y(y)dy$

$\Rightarrow P(A)=E(P(A|Y))$.

例5.2.15. $X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n$ i.i.d $\sim N(0,1)$, $n\ge2$,
定义 $Z=\frac{X_1Y_1+\cdots+X_nY_n}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_n^2}}$. 证明: $Z\sim N(0,1)$

证明:

$(Z\le x|Y_1=y_1,\cdots,Y_n=y_n)\Rightarrow Z=\frac{x_1y_1+\cdots+y_nx_n}{\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}}$.

$\Rightarrow Z\sim N(0,\frac{y_1^2+\cdots+y_n^2}{y_1^2+\cdots+y_n^2})=N(0,1)$.

$\Rightarrow P(Z\le x|Y_1=y_1,\cdots,Y_n=y_n)=\phi(x)$. (与 $y_1,\cdots,y_n$ 均无关)

$P(Z\le x)=E(\downarrow)=\phi(x)$.

· 条件方差:

$Var[X|Y]=E[X^2|Y]-(E(X|Y))^2$.

条件方差公式:

$Var X=Var(E(X|Y))+E(Var(X|Y))$.

例5.2.17. $X_1,X_2,\cdots$ i.i.d. $EX_1=\mu$, $VarX_1=\sigma^2$.
N为非负整值 r.v. 独立于$\{X_n:n\ge1\}$. $EN<\infty$.
$VarN=\tau^2<\infty$. 记 $S=\sum_{i=1}^N X_i$, 求 $Var(S)$.

解: $VarS=Var(E(S|N))+E(Var(S|N))$
$E(S|N=n)=\mu n\Rightarrow E(S|N)=\mu N$.
$Var(S|N=n)=n\sigma^2\Rightarrow Var(S|N)=N\sigma^2$

$\Rightarrow VarS$
$=Var(\mu N)+E(N\sigma^2)$
$=\mu^2\tau^2+\sigma^2EN$.

· 协方差

$Cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$.

性质:

1° $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$.
2° $Var(X+Y)=Var X+2Cov(X,Y)+Var Y$.
3° $Cov(X,Y)=EXY-EXEY$.
4° $Cov(X,Y)=EX(Y-EY)$.
5° $Cov(aX_1+bX_2,Y)=aCov(X_1,Y)+bCov(X_2,Y)$. 双线性性.

· 相关系数

$\rho=Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VarX\,VarY}}$.

· 引理: $X,Y\in L_2\Rightarrow(EXY)^2\le EX^2EY^2$.
且"="成立 ⇔ $X=tY$.

· $\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VarX\,VarY}}=E\left(\frac{(X-EX)}{\sqrt{VarX}}\cdot\frac{(Y-EY)}{\sqrt{VarY}}\right)$.

· 定理: $|\rho|\le1$. $|\rho|=1\Leftrightarrow\exists a,b\in\mathbb{R}$. $X=aY+b$.
且当 $\rho=1$ 时, $a>0$. $\rho=-1$ 时, $a<0$.

· 定理: 下列命题等价:
(1). X, Y 不相关 ($\rho=0$).
(2) $Cov(X,Y)=0$
(3) $EXY=EXEY$
(4). $Var(X+Y)=VarX+VarY$

· 定理: 独立 ⇒ 不相关 ($\not\Leftarrow$). ※ 对于多维正态分布, 独立性 ⇔ 不相关.

· 随机向量的数字特征:

$X^T=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$. $A=(X_{ij})_{n\times m}$. 则:

$EX=\begin{pmatrix}EX_1\\ \vdots\\ EX_n\end{pmatrix}$ $EA=\begin{pmatrix}EX_{11}&\cdots&EX_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ EX_{n1}&\cdots&EX_{nn}\end{pmatrix}$.

· 协方差阵:

$X_1,\cdots,X_n\in L_2$, 则 B 为协方差阵,

$B:=(Cov(X_i,X_j))_{n\times n}$.

$\Rightarrow B=E(X-EX)(X-EX)^T$

$=\begin{pmatrix}VarX_1 & Cov(X_1,X_2) & \cdots & Cov(X_1,X_n)\\ Cov(X_2,X_1) & VarX_2 & \cdots & Cov(X_2,X_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ Cov(X_n,X_1) & Cov(X_n,X_2) & \cdots & VarX_n\end{pmatrix}$.

· 定理: 协方差阵为半正定阵.

$a^T B a = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i a_j Cov(X_i,X_j) = Var(\sum_{i=1}^n a_i X_i) \ge 0$.

· 正态分布的协方差阵:

$(X,Y)\sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho) \Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$.

· 特征函数定义:

$E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF(x)$.

X为离散r.v.:

$f(t) = Ee^{itX} = \sum_{n=1}^\infty e^{ita_n} p_n$.

X有pdf $p(x)$:

$f(t) = Ee^{itX} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx\, p(x)\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \sin tx\, p(x)\,dx$.

$= E\cos tX + iE\sin tX$.

· 常见分布的特征函数:

· $X=a \Rightarrow f(t)=e^{ita}$

· $B(n,p) \Rightarrow f(t) = q+pe^{it}$, $q=1-p$.

· $X\sim Poi(\lambda) \Rightarrow$ c.f. $f(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}$

· $X\sim Geo(p)$ c.f.: $f(t)=\sum_{n=0}^\infty e^{itn} p(1-p)^n = \frac{p}{1-qe^{it}}$

· $X\sim Exp(\lambda)$. $f(t) = (1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$.

· 特征函数的性质(1).

1° $|f(t)|\le f(0)=1$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

2° $f(-t)=\overline{f(t)}$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

3° $f(t)$在$\mathbb{R}$上一致连续.

4° $f(t)$具有半正定性, $\forall n\ge 1$, $\forall t_1,\dots,t_n\in\mathbb{R}$, $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$,

$\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n z_k\bar{z}_j f(t_k-t_j)\ge 0$.

5° 随机变量线性函数的特征函数满足:

$f_{a+bX}(t) = e^{ita} f_X(bt)$.

· $X\sim U(a,b)$, $f_X(t) = \frac{e^{ibt}-e^{iat}}{it(b-a)}$.

· $X\sim N(0,1)$, $f(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$.

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $f(t)=e^{(i\mu t-\frac{\sigma^2}{2}t^2)}$

· 特征函数的Taylor展开:

$\left|e^{ix}-\sum_{k=0}^n\frac{(ix)^k}{k!}\right| \le \left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\right)\wedge\left(\frac{2|x|^n}{n!}\right)$.

$e^{itX} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(itX)^k}{k!}$, $\forall t, X\in\mathbb{R}$.

定理: 如果X的任阶矩皆存在, 且$\exists t_0>0$, s.t.

$\lim_{n\to\infty}\frac{|t|^n E|X|^n}{n!}=0$, $|t|\le t_0$

则X的特征函数具有展开式 $f(t)=\sum_{k=0}^\infty \frac{(it)^k}{k!}EX^k$

$|t|\le t_0$.

⇓

定理: $f^{(k)}(0) = i^k EX^k$.

推论: 若对某个$n\ge 1$, $E|X|^n<\infty$, 则X的c.f.

$f(t) = 1+\sum_{k=1}^n \frac{(it)^k}{k!}EX^k + o(t^n)$, $t\to 0$.

· 特征函数的性质(2).

1. r.v X,Y相独立, 则 由此可推!

$f_{X+Y}(t)=f_X(t)f_Y(t)$.

2. $f(t)$为c.f., 则对$\forall n\ge 1$, $f^n(t)$也为c.f.

3. $f(t)$为c.f., 则$|f(t)|^2$也为c.f.

4. c.f.的凸组合仍为c.f.

若$\sum_{i=1}^n a_i=1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i f_i$为c.f.

*. 反演公式, 唯一性定理.

cdf由c.f.唯一决定

定理: f为cdf F的c.f., 则

f为实值函数 ⟺ F为对称函.

证明: $f(t)=\overline{f(-t)}=f(-t)$ ⟺ X与$-X$同分布

⟺ F为对称的.

· 分布可加性 (使用c.f.的性质)

$N(\mu_1,\sigma_1^2)*N(\mu_2,\sigma_2^2) = N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

$Poi(\lambda_1)*Poi(\lambda_2)=Poi(\lambda_1+\lambda_2)$.

$B(n,p)*B(m,p)=B(m+n,p)$

Cauchy 分布：

$$Cauchy(\mu_1,\lambda_1) * Cauchy(\mu_2,\lambda_2) = Cauchy(\mu_1+\mu_2,\ \lambda_1+\lambda_2).$$

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\ \frac{1}{\lambda^2+(x-\mu)^2}$$

c.f. $f(t) = \exp\{i\mu t - \lambda|t|\}$.

多元特征函数

$X=(X_1,\cdots,X_n)^T$.

$$f(t_1,\cdots,t_n) = E\left(\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n} t_k X_k\right\}\right)$$
$$= E e^{it^T X}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right\} dF(x_1,\cdots,x_n)$$

· X, Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $e^{i(t_1X+t_2Y)} = Ee^{it_1X}\cdot Ee^{it_2Y}$, $\forall t_1,t_2\in\mathbb{R}$.

· 由多元 c.f：

X_1 的边缘 c.f 为

$$f_1(t) = f(t,0,\cdots,0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{it\,x_1\}dF.$$

· 多元正态分布：

$$X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\quad \mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix}.$$

· 定义：$X_1,\cdots,X_n$ i.i.d $\sim N(0,1)$，则称 $X=(X_1,\cdots,X_n)^T\sim N(0,I)$. $I=diag(1,\cdots,1)$.

· $A=a_{ij}$. $\mu\in\mathbb{R}^n$, $X\sim N(0,I)$

$\Rightarrow$ $Y=AX+\mu$. $Y\sim N(\mu,\Sigma)$, $\Sigma=AA^T$.

X 的联合 pdf：

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left\{-\frac{x^Tx}{2}\right\}$$
$$\downarrow$$
$$p(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y-\mu)^T(A^{-1})^TA^{-1}(y-\mu)\right\}.$$

· $Y\sim N(\mu,\Sigma)$，则 Y 的 c.f. 为

$$f(t) = \exp\left\{i\mu^Tt - \frac{1}{2}t^T\Sigma t\right\}$$

$X\sim N(0,I)$, $f_X(t) = \exp\left\{-\frac{t^Tt}{2}\right\}$.

由 $X\to Y$：

$$f_Y(t) = E e^{it^T(AX+\mu)} = e^{it^T\mu}Ee^{it^TAX}$$
$$= e^{it^T\mu}E\left(e^{i(A^Tt)^TX}\right)$$
$$= e^{it^T\mu}f_X(A^Tt) = e^{it^T\mu}e^{-\frac{t^TAA^Tt}{2}}$$
$$= e^{it^T\mu-\frac{t^T\Sigma t}{2}}.$$

· 定理：$Y\sim N_n(\mu,\Sigma)$

$Y=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\end{bmatrix}$, $\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}$.

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ $Y_1\sim N(\mu_1,\Sigma_{11})$.

P.f. 用特征函数，$f_Y(t_1,0)$.

$\Rightarrow$ 定理1. $X\sim N_n(\mu,\Sigma)$,

$X_1,\cdots,X_n$ 独立 $\Leftrightarrow$ 两两互不相关.

$\Rightarrow$ 定理2. $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$. $\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}$ $\Sigma=\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}$.

X_1, X_2 独立 $\Leftrightarrow$ $\Sigma_{12}=0$.

· 定理：

$X\sim N(\mu,\Sigma)$, $C=(c_{ij})_{m\times n}$，则

$Y=CX\sim N(C\mu,\ C\Sigma C^T)$.

推论：$X\sim N(\mu,\Sigma)$, $|\Sigma|\neq 0$，则 $\exists\, C$ 正交, s.t.

$Y=CX\sim N_m(C\mu,\Lambda)$, $\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

· 定理：$X\sim N(\mu,\Sigma)$ $\Leftrightarrow$ $\forall s\in\mathbb{R}^n$, $s^TX\sim N(s^T\mu,\ s^T\Sigma s)$.

P.f. 利用 $f_X(t)=\exp\{it^T\mu-\frac{1}{2}t^T\Sigma t\}$.

Ch6 极限定理

· **依概率收敛**

如果对 $\forall \varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n-X|\geq\varepsilon)=0$$

则称 $\{X_n, n\in\mathbb{N}\}$ 依概率收敛到 X. 记为

$$X_n \xrightarrow{P} X.$$

· **Chebyshev 不等式:**

$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上 ↗，且非负.

若 $E(g|Y|)<\infty$，则对 $\forall g(a)>0$ 的 $a>0$，有

$$P(|Y|\geq a)\leq \frac{Eg|Y|}{g(a)}.$$

⇒ 常见形式:

1. $X\in L_r$：$P(|X|\geq a)\leq \dfrac{E|X|^r}{a^r}$
2. $r=2$：$g(x)=x^2$.
$$P(|X-EX|\geq x)\leq\frac{\mathrm{Var}X}{x^2}\quad \forall x>0$$
3. Markov：$g(x)=x$
$$P(|Y|\geq x)\leq \frac{E|Y|}{x},\quad x>0.$$

例6.1.4. 证明: X 为非负 r.v. 则

$$1-EX\leq P(X=0)\leq\frac{\mathrm{Var}X}{(EX)^2}$$

证: 注意:

$P(X=0)=P(X-EX=-EX)\leq P(|X-EX|\geq|EX|)$.

$P(X=0)=1-P(X\geq1)$.

$$\left.\begin{aligned}P(X\geq1)&\leq\frac{E|X|}{1}=EX\\ P(|X-EX|\geq|EX|)&\leq\frac{\mathrm{Var}X}{(EX)^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow 得.$$

· **弱大数律:**

$\{X_n, n\geq1\}$ 为 r.v, $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$. 若 $\exists\{a_n\},\{b_n\}$, s.t.

$$\frac{S_n-a_n}{b_n}\xrightarrow{P}0$$

则称 $\{X_n\}$ 服从弱大数律.

$\{a_n\}$: 中心化数列

$\{b_n\}$: 正则化数列.

· **Markov 弱大数律**

若 $\{X_n, n\geq1\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{Var}S_n}{n^2}=0$

则 X_n 服从弱大数律, $a_n=ES_n$, $b_n=n$.

· Chebyshev 弱大数律:

$\{X_n\}$ 两两互不相关，且 $\exists C>0$, s.t.

$\mathrm{Var}(X_n)\leq C$, $\forall n\geq1$

则 $X_n\sim$ 弱大数律, $a_n=ES_n$, $b_n=n$.

· Bernoulli 的大数律: $Z_n\sim B(n,p)$, 则

$\dfrac{Z_n}{n}\xrightarrow{P}p$.　　$Z_n=\sum_{i=1}^n I_i$. $I_i\sim B(1,p)$.

例6.1.8. 有一列口袋, 第k个口袋中有1个白球和k-1个黑球. 自前n个口袋中各取一球, 记 Z_n 为所取出的n个球中白球个数. 则证明: $r>\frac{1}{2}$ 时,

$$\frac{Z_n-EZ_n}{\ln^r n}\xrightarrow{P}0.$$

证明: 注意到: $Z_n=\sum_{k=1}^n I_k$, $I_k=\begin{cases}1, & W\\ 0. & B.\end{cases}$

$EI_k=\frac{1}{k}$, $\mathrm{Var}I_k=\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}$.

$$\Rightarrow P\left(\frac{|Z_n-EZ_n|}{\ln^r n}\geq\varepsilon\right)=P(|Z_n-EZ_n|\geq\varepsilon\ln^r n)$$

$$\leq\frac{\mathrm{Var}|Z_n-EZ_n|}{(\varepsilon\ln^r n)^2}=\frac{\mathrm{Var}Z_n}{(\varepsilon\ln^r n)^2}=\frac{\sum_{k=1}^n(\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2})}{\varepsilon^2\ln^{2r}n}$$

$$\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}\right)\leq\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\leq C\ln n.$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{|Z_n-EZ_n|}{\ln^r n}\geq\varepsilon\right)\leq\frac{1}{\varepsilon^2\ln^{2r-1}n}\to0,\ n\to\infty.$$ 得

· **平均收敛 (L_r 收敛)**

设 $X_n\in L_r$, $r>0$, 称 $X_n\xrightarrow{L_r}X$, 若

$E|X_n-X|^r\to0$, $n\to\infty$.

· 定理: $X_n\xrightarrow{L_r}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{P}X$.

且对 $\forall X\in L_r$, $\exists\{X_n\}$, s.t. $X_n\xrightarrow{L_r}X$.

$$X_n=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k-1}{2^n}I\left(\frac{k-1}{2^n}\leq X<\frac{k}{2^n}\right).$$

但 $X_n\xrightarrow{P}X \not\Rightarrow X_n\xrightarrow{L_r}X$.

· 单调收敛定理: 设 $0\leq X_n\uparrow X$. 则 $E[X_n]\uparrow EX$

· Fatou-Lebesgue 引理: $\{X_n\}$ 为 r.v. 列, $Y, Z\in L$

$X_n\leq Z\Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty}E[X_n]\leq E[\limsup\limits_{n\to\infty}X_n]$

$X_n\geq Y\Rightarrow E[\liminf\limits_{n\to\infty}X_n]\leq\liminf\limits_{n\to\infty}EX_n$.

控制收敛定理：设 $|X_n| \le Y$，且 $EY<\infty$。若 $X_n \xrightarrow{P} X$，则 $E|X_n-X|\to 0$。且 $E[X_n]\to EX$。

· 一致可积：称一族 r.v 一致可积，是指 $a\to\infty$ 时，

$$\sup_{i\in I} E[|X_i|\, I(|X_i|>a)] = \sup_{i\in I}\int_{\{|X_i|>a\}}|X_i| \to 0.$$

· 由 $\{X_n\}$ 一致可积 $\Rightarrow \frac{1}{n}\max_{1\le k\le n}|X_k| \xrightarrow{P} 0$.

· $\{X_i\}$ 一致可积的充要条件时：

(1). $\{X_i, i\in I\}$ 一致绝对连续.

(2). 积分一致有界，即 $\sup_{i\in I} E|X_i|<\infty$.

· 弱收敛：设 $\{F_n, F\}$ 为有界单调右连续函数，记 $C(F)$ 为 F 的连续点集。若

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x),\quad \forall x\in C(F).$$

则称 F_n 弱收敛于 F。$F_n\xrightarrow{w}F$.

$F(x)$ 称为 $F_n(x)$ 的弱极限.

$\Rightarrow$ cdf 列的弱极限不一定为 cdf：

$$F_n(x)=\begin{cases}0 & x<-n\\ \frac{x+n}{2n}, & -n\le x<n\\ 1, & x\ge n.\end{cases} \Rightarrow F_n(x)\xrightarrow{w}F(x).$$

$F(x)=\frac{1}{2}$.

· 依分布收敛：

设 $\{F_n, F\}$ 为 cdf 序列，$F_n\xrightarrow{w}F$。则称 F_n 依分布收敛于 F。$F_n\xrightarrow{w}F \Rightarrow F_n\xrightarrow{d}F$.

$F_n\xrightarrow{d}F$.

$X_n\sim F_n,\ X\sim F,\ F_n\xrightarrow{d}F \Rightarrow X_n\xrightarrow{d}X$.

· 定理：$X_n\xrightarrow{P}X \Rightarrow X_n\xrightarrow{d}X$

$\not\Leftarrow$

$X_n\xrightarrow{d}c \Leftrightarrow X_n\xrightarrow{P}c,\ c\in\mathbb{R}$.

· $\boxed{\text{连续性定理}}$

1° 设 $F(x), F_n(x)$ 皆为 cdf。$f(t)$、$f_n(t)$ 为其对应的 c.f. 则如果 $F_n(x)\xrightarrow{d}F(x)$，有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(t)=f(t).\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

2°. $f_n(t)$ 为 c.f.，$f(t)\to F(x)$ 为 cdf，则 $F_n(x)\xrightarrow{d}F(x)$.

[$f(t)$ 在 0 处连续]

例 6.2.5. $X_n\sim N(0,n)$.

讨论该序列的依分布收敛性：

$f_n(t)=e^{-\frac{nt^2}{2}}$. 用连续性定理

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(t)=\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{nt^2}{2}}=\begin{cases}0, & t=0\\ 1, & t\ne 0\end{cases}$$

在 $t=0$ 处不连续 $\Rightarrow F(x)$ 不为 cdf.

X_n 不依分布收敛.

例 6.2.6. $\{X_n\}$ 为 r.v 序列，$n\to\infty$ 时，

$X_n\xrightarrow{d}N(a,\sigma^2)$，则 $\tau X_n+b\xrightarrow{d}N(\tau a+b, \tau^2\sigma^2)$.

证明：$f_{X_n}(t)=Ee^{itX_n}$

$$f_{\tau X_n+b}(t)=Ee^{it(\tau X_n+b)}$$

$$=e^{itb}Ee^{it\tau X_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_{\tau X_n+b}=e^{itb}\lim_{n\to\infty}Ee^{it\tau X_n}$$

$$=e^{itb}\lim_{n\to\infty}f_{X_n}(\tau t).$$

$$\lim_{n\to\infty}f_{X_n}(t)=e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}f_{\tau X_n+b}(t)=e^{i\tau at+ibt-\frac{\sigma^2\tau^2t^2}{2}}$$

$\tau X_n+b\xrightarrow{d}N(a+b, \tau^2\sigma^2)$. #

类似可证明：· $X_n\sim B(n,p_n)$，$np_n\to\lambda>0$，则 $X_n\xrightarrow{d}Poi(\lambda)$.

· $X_n\sim B(n,p)$. 则 $X_n/n\xrightarrow{d}p$.

· Khinchin 弱大数律

设 $\{X, X_n, n\in\mathbb{N}\}$ 为 iid r.v.

则当 $X\in\mathcal{L}_1$，$EX=a$ 时，

$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}a$.

· Slutsky 引理：

如果 $X_n\xrightarrow{d}X$，$Y_n\xrightarrow{P}0$，$W_n\xrightarrow{P}1$，则

$W_nX_n+Y_n\xrightarrow{d}X$.

若 $X_n\xrightarrow{d}X$，$Y_n\xrightarrow{P}0$，则 $X_nY_n\xrightarrow{P}0$.

· 中心极限定理（CLT）：

$\{X_n\}$ 为随机变量序列，$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

如果存在中心化数列 $\{a_n\}$，正则化数列 $\{b_n\}$，

s.t. $\frac{S_n-a_n}{b_n}\xrightarrow{d}N(0,1)$

即 $\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n-a_n}{b_n}\le x\right)=\Phi(x)$.

则 $\{X_n\}$ 服从中心极限定理.

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}E\exp\left\{it\frac{S_n-a_n}{b_n}\right\}=\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}$$

· **Levy 中心极限定理:**

设$\{X_n, n\geq 1\}$ iid, 满足 $EX_1=a$, $VarX_1=\sigma^2$.

则 $\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

例: $\{X, X_1, \cdots, X_n, \cdots\}$ iid, $EX=a$, $0<VarX=\sigma^2<+\infty$.

$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$.

则 $n\to\infty$, 有 $S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$.

证明: $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n ((X_i-a)+(a-\overline{X}_n))^2$

$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-a)^2 - \frac{n}{n-1}(\overline{X}_n-a)^2$.

由 Khinchin 弱大数律,

$\overline{X}_n - a \xrightarrow{P} 0$, $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-a)^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$.

$\Rightarrow S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$.

例6.3.14. $\{X, X_n\}$ iid, $EX=a$, $VarX=\sigma^2$,

其余与上题相同. 证明: $n\to\infty$, 有

$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - a)}{S_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

证明: $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n-a)}{S_n} = \frac{\sigma}{S_n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sqrt{n}\sigma}$

$\frac{\sigma}{S_n} \xrightarrow{P} 1$, $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} (0,1)$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n-a)}{S_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

· **Linde berg 条件:** (X_k 相独立)

r.v 序列$\{X_n\}$满足: $\forall \tau>0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^n E[(X_j-a_j)^2 I(|X_j-a_j| \geq \tau B_n)]=0.$$

其中, $EX_k=a_k$, $0<VarX_k=\sigma_k^2<\infty$.

$B_n^2 = Var S_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$.

由 Linderberg 条件:

$\Rightarrow$ (1). $\max_{1\leq k\leq n} \left|\frac{X_k-a_k}{B_n}\right| \xrightarrow{P} 0$.

(2). Feller 条件

$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} = 0$.

· 由 Lindeberg 条件: $\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$.

· **Lindeberg 中心极限定理:**

$\{X_n\}$ 满足 Lindeberg 条件

$\Rightarrow \frac{S_n - ES_n}{B_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

· 定理: 如果∃正的常数序列$L_n, n\geq 1$满足

$\max_{1\leq k\leq n}|X_k| \leq L_n$, $\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{B_n}=0$.

则 Lindeberg 条件成立. $\Rightarrow \frac{S_n-ES_n}{B_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$

· **Lyapunov 条件:**

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^n E|X_k-a_k|^{2+\delta}=0$

$EX_k = a_k$.

则 Lindeberg 条件成立.

· Feller 条件 $+ \frac{S_n-ES_n}{B_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$

$\Longleftrightarrow$ Linderberg 条件成立.

· 多元情形下的 CLT:

$X_n \xrightarrow{d} N_m(0, I_m) \Longleftrightarrow s^T X_n \xrightarrow{d} N(0,1)$, $\forall \|s\|=1$.

$Y \sim N_m(a, \Sigma) \Leftrightarrow s^T Y \sim N(s^T a, s^T\Sigma s)$, $\forall s\neq 0$.

§6.4. a.s. 收敛.

· a.s. 收敛

定义:

$$P\{\omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)=X(\omega)\}=1.$$

则 $\{X_n\}$ a.s 收敛到 X. $X_n \to X, a.s.$

$\Rightarrow X_n \to X. a.s. \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} P(\bigcup_{n=k}^{\infty} |X_n - X| \geq \varepsilon)=0,$
$\forall \varepsilon>0.$

推论:

$X_n \to X. a.s. \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X.$

$\not\Leftarrow \quad X_n \xrightarrow{P} X.$

命题: $X_n \xrightarrow{a.s.} X, \Leftrightarrow P(|X_n - X| \geq \varepsilon, i.o)=0.$
$\forall \varepsilon>0$

· Borel - Cantelli 引理:

(i). $\{A_n\}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)<\infty$, 则 $P(A_n, i.o)=0.$

(ii). $\{A_n\}$ 相互独立, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\infty \Leftrightarrow P(A_n, i.o)=1.$$

*. $\{A_n, i.o\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$

· a.s. 收敛的推论: 若 $X_n \xrightarrow{P} X$, 则 $\{X_n\}$ 存在 $\{X_{n_k}\}$, s.t $X_{n_k} \to X, a.s.$
(依概率收敛弱于 a.s. 收敛).

· $P(|X_n - X| \geq \varepsilon, i.o)=0 \;. \forall \varepsilon>0$
$\Leftrightarrow X_n \to X, a.s.$
若 $\exists\, \varepsilon_0>0$, $P(|X_n - X|>\varepsilon_0, i.o)=1$
$\Rightarrow X_n \not\to X, a.s.$

· 引理: $\{a_n\}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $b_n \geq 0$,

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k=\infty.$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}=a.$$

· Kronecker 引理:

$\{x_n\}$ 为实数序列, $\{b_n\}$ 为正实数序列, $b_n \uparrow +\infty$,
则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b_n}$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} x_k=0.$

· Kolmogorov 不等式

$\{X_k, k=1,2,\dots,n\}$ 为相互独立的 r.v 序列, 满足:

$EX_k=0$. $EX_k^2<\infty$. $|X_k| \leq c<\infty$.

$S_k=\sum_{i=1}^{k} X_i$. 则对 $\forall \varepsilon>0$

$$1-\frac{(c+\varepsilon)^2}{\sum_{k=1}^{n} EX_k^2} \leq P(\max_{1\leq k\leq n}|S_k| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n} EX_k^2.$$

· 强大数律:

$\{X_n\}$ 为 r.v 序列, $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$. 若 $\exists\ \{a_n\}, \{b_n\}$,
s.t $b_n>0$ 且 $\frac{S_n-a_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0.$
则 $X_n \sim$ 强大数律.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

卷积封闭性/再生性.

- 二项分布 $B(n,p)$. $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

$X\sim B(n,p)$, $Y\sim B(m,p)$, $X+Y\sim B(m+n,p)$

- Geo(p) 几何分布 $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$

无记忆性.

- 负二项分布 $NB(r,p)$ $P(X=n)=\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$.

$X\sim NB(r,p)$, $Y\sim NB(h,p)$, $X+Y\sim NB(r+h,p)$

- 泊松分布 $Poi(\lambda)$ $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

$X\sim Poi(\lambda)$, $Y\sim Poi(\mu)$, $X+Y\sim Poi(\lambda+\mu)$

- 指数分布 $X\sim Exp(\lambda)$ $p(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $F(x)=1-e^{-\lambda x}$.

- 伽玛分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$ $f_{\alpha,\beta}(x)=\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta x}$

$\boxed{X\sim\Gamma(a_1,\lambda),\ Y\sim\Gamma(a_2,\lambda),\ X+Y\sim\Gamma(a_1+a_2,\lambda)}$

- 正态分布 $N(a,\sigma^2)$ $\varphi_{a,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

$N(0,1)$ $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$X\sim N(a_1,\sigma_1^2)$
$Y\sim N(a_2,\sigma_2^2)$
$\Rightarrow X+Y\sim N(a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$
$aX+b\sim N(aa_1+b,a^2\sigma_1^2)$

- 卡方分布 χ_n^2 $f_n(x)=\frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}e^{-\frac{x}{2}}$.

- 次序统计量. $X=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$, $Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$. $X_1,\cdots,X_n\sim F,p$.
则 $p(x,y)=n(n-1)\{F(y)-F(x)\}^{n-2}p(x)p(y)$, $x<y$.

$$P(X_i\le x)=\sum_{m=i}^{n}\binom{n}{m}F^m(x)(1-F(x))^{n-m}.$$

~~$P_{X_k}(x)=\frac{d}{dx}P(X_k\le x)$~~ 1 可.

$$p_{X_{(1)},\cdots,X_{(n)}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n!\,p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n).$$

- $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(n)=(n-1)!$, $\Gamma(1)=1$.

$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt$.