

一、 (12分) 设 A, B 是某个概率空间中的两个事件, 满足 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 且 $P(B|A) > P(B)$, 试判断以下几个不等式是否正确, 并详细说明理由.

(1) $P(B^c|A^c) > P(B^c)$;

(2) $P(A^c|B^c) > P(A^c)$;

(3) $P(B|A^c) > P(B)$;

(4) $P(A|B) > P(A)$.



二、 (16分) 一个盒子中装有编号分别为 $1, 2, \dots, 10$ 的大小相同的小球, 现有放回地从盒中每次随机摸取一个球, 记录其号码, 试验一直进行到摸出 10 个偶数号码的小球才停止. 以 X 记号码 2 被摸出的次数, 以 Y 表示号码 1, 3, 5 一共被摸出的次数. 分别求 X 和 Y 的概率分布.

三、 (16分) 甲有硬币 15 枚, 乙有硬币 10 枚, 两人玩一场公平游戏. 在每一局中, 每人获胜的概率相同, 获胜者从对方手中拿走一枚硬币. 当一个人手中拥有所有的 25 枚硬币, 游戏结束, 且该人获得最终胜利. 求甲最终取胜的概率.



五、 (18分) 设 $\phi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 分别表示标准正态分布的概率密度函数和分布函数, 对任意常数 $\lambda, \gamma \in \mathfrak{R}$, 记函数

$$f(x) = 2\phi(x)\Phi(\lambda x), \quad x \in \mathfrak{R},$$

$$g(x, y) = 2\phi(x)\phi(y)\Phi(\lambda x + \mu y), \quad (x, y) \in \mathfrak{R}^2.$$

- (1) 证明: $f(x)$ 为某个随机变量的概率密度函数.
- (2) 证明: $g(x, y)$ 为某个二维随机向量的概率密度函数.
- (3) 若随机变量 X 的概率密度函数为如上定义的 $f(x)$, 试求 $|X|$ 的概率密度函数.