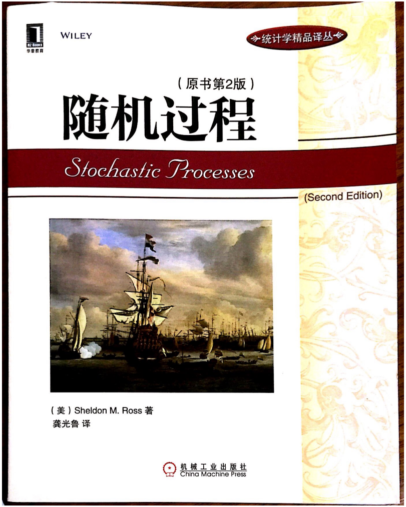
实用随机过程

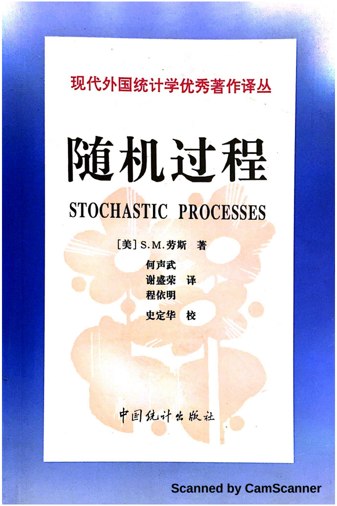
胡太忠
thu@ustc.edu.cn

安徽 合肥 中国科学技术大学

2024 年 2 月

教材


WILEY
统计学精品译丛
（原书第2版）
随机过程
Stochastic Processes
(Second Edition)
（美）Sheldon M. Ross 著
龚光鲁 译
机械工业出版社
China Machine Press


现代外国统计学优秀著作译丛
随机过程
STOCHASTIC PROCESSES
[美] S.M.劳斯 著
何声武
谢盛荣 译
程依明
史定华 校
中国统计出版社
Scanned by CamScanner

Sheldon M. Ross

S.M. Ross 世界著名的应用概率和统计学家，现为南加州大学工业与系统工程系讲座教授。1976 至 2004 年期间在加州大学伯克利分校任教，研究领域包括统计模拟、金融工程、应用概率模型、随机动态优化等。他的多种畅销书均产生了世界性的影响.

教材

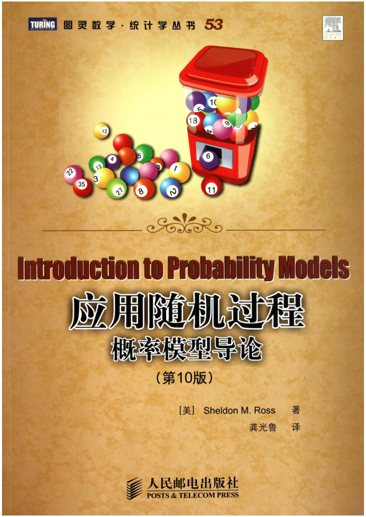
- Ross, S.M. (1995). *Stochastic Processes* (2nd Edition), John Wiley & Sons.

  [龚光鲁译，《随机过程》（第二版），机械工业出版社，2013 年]

- Ross, S.M. (1983). *Stochastic Processes* (1st Edition), John Wiley & Sons.

  [何声武、谢盛荣、程依明译，《随机过程》（第一版），中国统计出版社，1997 年]

参考书


TURING 图灵数学·统计学丛书 53
Introduction to Probability Models
应用随机过程
概率模型导论
（第10版）
[美] Sheldon M. Ross 著
龚光鲁 译
人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

参考书


中国科学院考研指定参考书
“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
中国科学技术大学数学教学丛书
随机过程
（第三版）
方兆本 缪柏其 编著
科学出版社
Scanned by CamScanner


郑坚坚／编著
随机过程
Stochastic Processes
中国科学技术大学出版社

参考书

1. Ross, S.M. (2016). *Introduction to Probability Models* (11th Edition), Elsevier Ltd.

   [龚光鲁译，《应用随机过程概率模型导论》（第 11 版），人民邮电出版社, 北京]

2. 方兆本、缪柏其，《随机过程》（第三版），科学出版社，2011 年.

3. 郑坚坚，《随机过程》，中国科学技术大学出版社，2016 年.

随机过程分级教学

中国科大本科随机过程课程根据难易程度分为 3 档：

- 统计学专业：《实用随机过程》（80 学时，4 学分）
- 金融学专业：《随机过程（A）》（60 学时，3 学分）
- 西区工科院系：《随机过程（B）》（40 学时，2 学分）

研究生阶段的《随机过程》课程基于测度论

成绩计算

平时作业（20%）+ 期中考试（30%）+ 期末考试（50%）

习题课的重要性

期中考试时间（第三章结束）

成绩计算

平时作业（20%）+ 期中考试（30%）+ 期末考试（50%）

习题课的重要性

期中考试时间（第三章结束）

课程目的

- 掌握常见几类随机过程的基本性质
- 培养解决实际问题的概率直观和洞察力（方法、思路和技巧）
- 激发对随机过程课程学习的兴趣

第 1 章　准备知识

微积分中实数序列的极限相关内容：

1. 单调序列 a_n 的极限存在性；
2. 任意序列 a_n 的上、下极限可以表示为单调序列的极限：

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k;$$

3. $\lim a_n$ 存在当且仅当 $\limsup a_n = \liminf a_n$.
4. 函数 $f(x)$ 于 x_0 点的连续性：左连续和右连续

实数序列 $\{a_n\}$	$\longrightarrow$	事件序列 $\{A_n\}$
$\limsup a_n$, $\liminf a_n$, $\lim a_n$	$\longrightarrow$	$\limsup A_n$, $\liminf A_n$, $\lim A_n$
函数左连续和右连续	$\longrightarrow$	概率 P 的下连续和上连续

微积分中实数序列的极限相关内容：

1. 单调序列 a_n 的极限存在性；
2. 任意序列 a_n 的上、下极限可以表示为单调序列的极限：

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k;$$

3. $\lim a_n$ 存在当且仅当 $\limsup a_n = \liminf a_n$.
4. 函数 $f(x)$ 于 x_0 点的连续性：左连续和右连续

实数序列 $\{a_n\}$	$\longrightarrow$	事件序列 $\{A_n\}$
$\limsup a_n$, $\liminf a_n$, $\lim a_n$	$\longrightarrow$	$\limsup A_n$, $\liminf A_n$, $\lim A_n$
函数左连续和右连续	$\longrightarrow$	概率 P 的下连续和上连续

事件序列的极限: 考虑事件序列 $\{A_n\}$, 定义

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{w : 有无穷多个\ A_k\ 包含\ w\} \stackrel{\text{def}}{=} \{A_n, \text{i.o.}\},$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{w : 除有限个\ A_k\ 外其余皆包含\ w\}.$$

可以证明:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=m}^{\infty} A_k.$$

事件序列 $\{A_n\}$ 收敛: $\limsup A_n = \liminf A_n$, 记为 $\lim A_n$.

- 若 $A_n \uparrow$, 则 $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; 若 $A_n \downarrow$, 则 $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
- $\limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{m\to\infty} \sup_{k\geq m} A_k$, $\liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{m\to\infty} \inf_{k\geq m} A_k$.

概率的性质

- 强可加性: $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)$. 更一般地,

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n}\mathrm{P}(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k}).$$

- 有限次可加性: $\mathrm{P}(\cup_{k=1}^{n}A_k)\le\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(A_k)$.
- σ-次可加性: $\mathrm{P}(\cup_{k=1}^{\infty}A_k)\le\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}(A_k)$.
- 下连续性: 若 $A_n\uparrow A$, 则 $\mathrm{P}(A_n)\to\mathrm{P}(A)$.
- 上连续性: 若 $A_n\downarrow A$, 则 $\mathrm{P}(A_n)\to\mathrm{P}(A)$.
- 连续性: 若 $A_n\to A$, 则 $\mathrm{P}(A_n)\to\mathrm{P}(A)$. 更一般地,

$$\mathrm{P}(\liminf A_n)\le\liminf\mathrm{P}(A_n)\le\limsup\mathrm{P}(A_n)\le\mathrm{P}(\limsup A_n).$$

Borel-Cantelli 引理

- 设事件序列 $\{E_n\}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(E_n) < \infty$, 则 $\mathrm{P}(E_n, \mathrm{i.o.}) = 0$.
- 设事件序列 $\{E_n\}$ 相互独立，且满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(E_n) = \infty$, 则 $\mathrm{P}(E_n, \mathrm{i.o.}) = 1$.

证明：(1) $\mathrm{P}(E_n, \mathrm{i.o.}) = \lim \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leq \lim \sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}(E_k) = 0$.

(2) 利用 $e^{-x} \geq 1 - x \, (x > 0)$，及事件独立性，得

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k^c\right) = \prod_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}(E_k^c) \leq \exp\left\{-\sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}(E_k)\right\} = 0. \blacksquare$$

Borel-Cantelli 引理

- 设事件序列 $\{E_n\}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(E_n) < \infty$，则 $\mathrm{P}(E_n, \mathrm{i.o.}) = 0$.
- 设事件序列 $\{E_n\}$ 相互独立，且满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(E_n) = \infty$，则 $\mathrm{P}(E_n, \mathrm{i.o.}) = 1$.

证明：(1) $\mathrm{P}(E_n, \mathrm{i.o.}) = \lim \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leq \lim \sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}(E_k) = 0$.

(2) 利用 $e^{-x} \geq 1 - x\ (x > 0)$，及事件独立性，得

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k^c\right) = \prod_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}(E_k^c) \leq \exp\left\{-\sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}(E_k)\right\} = 0. \blacksquare$$

Borel-Cantelli 引理的应用

- 【例 1.1(B)】 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 不必独立，满足

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n^2} = 1 - \mathrm{P}(X_n = 1), \quad \forall\, n \geq 1,$$

则 $\lim X_n = 1$, a.s..

- 【例 1.1(C)】 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 相互独立，满足

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n} = 1 - \mathrm{P}(X_n = 1), \quad \forall\, n \geq 1,$$

则 $\mathrm{P}(X_n = 0, \mathrm{i.o.}) = 1 = \mathrm{P}(X_n = 1, \mathrm{i.o.})$. 于是, X_n 的极限不存在.

Borel-Cantelli 引理是概率极限理论的基础

Borel-Cantelli 引理的应用

- 【例 1.1(B)】 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 不必独立，满足

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n^2} = 1 - \mathrm{P}(X_n = 1), \quad \forall\, n \geq 1,$$

则 $\lim X_n = 1$, a.s..

- 【例 1.1(C)】 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 相互独立，满足

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n} = 1 - \mathrm{P}(X_n = 1), \quad \forall\, n \geq 1,$$

则 $\mathrm{P}(X_n = 0, \mathrm{i.o.}) = 1 = \mathrm{P}(X_n = 1, \mathrm{i.o.})$. 于是, X_n 的极限不存在.

Borel-Cantelli 引理是概率极限理论的基础

Borel-Cantelli 引理的应用

- 【例 1.1(B)】 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 不必独立，满足

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n^2} = 1 - \mathrm{P}(X_n = 1), \quad \forall\, n \geq 1,$$

则 $\lim X_n = 1$, a.s..

- 【例 1.1(C)】 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 相互独立，满足

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n} = 1 - \mathrm{P}(X_n = 1), \quad \forall\, n \geq 1,$$

则 $\mathrm{P}(X_n = 0, \mathrm{i.o.}) = 1 = \mathrm{P}(X_n = 1, \mathrm{i.o.})$. 于是, X_n 的极限不存在.

Borel-Cantelli 引理是概率极限理论的基础

求期望的两种方法

- 方法一（随机变量的分解法）：若$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, 则

$$\mathrm{E}\,Y = \mathrm{E}\,X_1 + \mathrm{E}\,X_2 + \cdots + \mathrm{E}\,X_n.$$

- 方法二（两步走，即取条件期望）：

$$\mathrm{E}\,Y = \mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\,[Y|X]\right\}.$$

求方差或协方差的的两种方法

- 方法一（随机变量的分解法）：若$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, 则

$$\mathrm{Var}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\,(X_k) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j).$$

- 方法二（两步走，即取条件期望）：

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(\mathrm{E}\,[X|Z], \mathrm{E}\,[Y|Z]) + \mathrm{E}\,[\mathrm{Cov}(X, Y|Z)].$$

求期望的两种方法

- 方法一（随机变量的分解法）：若$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，则
$$\mathrm{E}\,Y = \mathrm{E}\,X_1 + \mathrm{E}\,X_2 + \cdots + \mathrm{E}\,X_n.$$
- 方法二（两步走，即取条件期望）：
$$\mathrm{E}\,Y = \mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\,[Y|X]\right\}.$$

求方差或协方差的的两种方法

- 方法一（随机变量的分解法）：若$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，则
$$\mathrm{Var}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\,(X_k) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j).$$
- 方法二（两步走，即取条件期望）：
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(\mathrm{E}\,[X|Z], \mathrm{E}\,[Y|Z]) + \mathrm{E}\,[\mathrm{Cov}(X, Y|Z)].$$

- 【例 1.3(A)】 在一次聚会上，n 个人将自己的帽子混在一起，会后每人随机取帽子，记 X 为能正确取到自己帽子的人数. 求 $\mathrm{E}\,X$ 和 $\mathrm{Var}\,(X)$.

解：首先，将 n 人编号，然后依序取帽. 定义

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{第 } k \text{ 人取到自己的帽子,} \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

则 $X = \sum_{i=1}^{n} I_k$. 利用

$$\mathrm{E}\, I_k = \frac{1}{n}, \qquad \mathrm{E}\,[I_i I_j] = \frac{1}{n(n-1)}, \quad \forall\, i < j,$$

于是

$$\mathrm{E}\, X = 1, \qquad \mathrm{Var}\,(X) = 1. \blacksquare$$

- 【例 1.3(A)】 在一次聚会上，n 个人将自己的帽子混在一起，会后每人随机取帽子，记 X 为能正确取到自己帽子的人数. 求 $\mathrm{E}\,X$ 和 $\mathrm{Var}\,(X)$.

解：首先，将 n 人编号，然后依序取帽. 定义

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{第 } k \text{ 人取到自己的帽子}, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

则 $X = \sum_{i=1}^{n} I_k$. 利用

$$\mathrm{E}\,I_k = \frac{1}{n}, \qquad \mathrm{E}\,[I_i I_j] = \frac{1}{n(n-1)}, \quad \forall\, i < j,$$

于是

$$\mathrm{E}\,X = 1, \qquad \mathrm{Var}\,(X) = 1. \ \blacksquare$$

- 【例】 一盒中有编号 $1, 2, \ldots, n$ 的小球，从中不放回任意取出 m $(m < n)$ 个，X 表示这 m 个小球上的号码之和，求 $\mathrm{E}\,X$.

解：记 Y_j 为第 j 次取出的小球上的号码，$j = 1, \ldots, m$, 则

$$X = \sum_{i=1}^{m} Y_i.$$

利用 Y_j 服从 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上的离散均匀分布，于是 $\mathrm{E}\,Y_j = (n+1)/2$, $\forall j$. 因此，

$$\mathrm{E}\,X = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}\,Y_i = \frac{m(n+1)}{2}. \quad \blacksquare$$

- 【例】 一盒中有编号 $1, 2, \ldots, n$ 的小球，从中不放回任意取出 m $(m < n)$ 个，X 表示这 m 个小球上的号码之和，求 $\mathrm{E}\,X$.

解：记 Y_j 为第 j 次取出的小球上的号码，$j = 1, \ldots, m$, 则

$$X = \sum_{i=1}^{m} Y_i.$$

利用 Y_j 服从 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上的离散均匀分布，于是 $\mathrm{E}\,Y_j = (n+1)/2$, $\forall j$. 因此，

$$\mathrm{E}\,X = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}\,Y_i = \frac{m(n+1)}{2}. \quad \blacksquare$$

- 【例】 现有 n 把外形相同的钥匙，其中只有一把能打开锁，用它们逐一去试开锁，每一次开锁是相互独立的，每把钥匙试开锁一次后拿走，记 X 表示打开锁时已经试开过锁的次数. 求 $\mathrm{E}X$.

解法一： 直观容易看出 X 服从 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上的均匀分布，亦可以如下来计算：对任意 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

因此，$\mathrm{E}X = (n+1)/2$.

- 【例】 现有 n 把外形相同的钥匙，其中只有一把能打开锁，用它们逐一去试开锁，每一次开锁是相互独立的，每把钥匙试开锁一次后拿走，记 X 表示打开锁时已经试开过锁的次数. 求 $\mathrm{E}\,X$.

解法一： 直观容易看出 X 服从 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上的均匀分布，亦可以如下来计算：对任意 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\mathrm{P}\,(X = k) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

因此，$\mathrm{E}\,X = (n+1)/2$.

解法二： 记 A_i 表示第 i 次取出的钥匙恰好能打开锁，并定义

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{前 } i-1 \text{ 次摸取的钥匙未能打开锁;} \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

于是，$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. 显然，$X_1 = 1$, $\mathrm{E}\, X_1 = 1$,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\, X_i &= \mathrm{P}\,(A_1^c \cdots A_{i-1}^c) = \mathrm{P}\,(A_{i-1}^c | A_{i-2}^c \cdots A_1^c) \cdots \mathrm{P}\,(A_2^c | A_1^c) \mathrm{P}\,(A_1^c) \\ &= \frac{n-i+1}{n-i+2} \cdots \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n-i+1}{n} \end{aligned}$$

因此，

$$\mathrm{E}\, X = 1 + \sum_{i=2}^{n} \mathrm{E}\, X_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i+1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

解法三：引进一个新随机变量 Y:

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{第一次打开锁;} \\ 0, & \text{第一次未打开锁,} \end{cases}$$

则 $\mathrm{P}(Y=1) = 1/n$, $\mathrm{P}(Y=0) = 1-1/n$. 记 $M_n = \mathrm{E}[X_n]$, X_n 对应有 n 把钥匙的情形下的 X. 对 Y 取条件，得

$$\begin{aligned} M_n &= \mathrm{E}\{\mathrm{E}[X_n|Y]\} = \frac{1}{n}\mathrm{E}[X_n|Y=1] + \frac{n-1}{n}\mathrm{E}[X_n|Y=0] \\ &= \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}[1+M_{n-1}], \end{aligned}$$

化简得

$$M_n = 1 + \frac{n-1}{n}M_{n-1}.$$

利用归纳法就可以直接验证了。 ∎

- 【例】 设 $Y \sim U(0,1)$, $[X|Y=p] \sim B(n,p)$, 其中 $0<p<1$, 求 X 的分布.

解：对任意 $k=0,1,\ldots,n$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=k) &= \mathrm{E}\left[\mathrm{P}(X=k|Y)\right] \\
&= \int_0^1 \mathrm{P}(X=k|Y=p)dp \\
&= \int_0^1 \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}dp = \frac{1}{n+1},
\end{aligned}
$$

即 X 服从 $\{0,1,\ldots,n\}$ 上的离散均匀分布. ∎

- 【例】 设 $Y \sim U(0,1)$, $[X|Y=p] \sim B(n,p)$, 其中 $0<p<1$, 求 X 的分布.

解：对任意 $k=0,1,\dots,n$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=k) &= \mathrm{E}\left[\mathrm{P}(X=k|Y)\right] \\
&= \int_0^1 \mathrm{P}(X=k|Y=p)dp \\
&= \int_0^1 \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}dp = \frac{1}{n+1},
\end{aligned}$$

即 X 服从 $\{0,1,\dots,n\}$ 上的离散均匀分布. ∎

- 【例 1.5(D)】(卷积) 设 $X \sim F$, $Y \sim G$ 且 $X \perp Y$, 求 $X+Y$ 的 cdf H.

解：对任意 $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathrm{P}(X+Y \le z) = \mathrm{E}\left[\mathrm{P}(X+Y \le z|Y)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(X+Y \le z|Y=y)\,\mathrm{d}G(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(z-y)\,\mathrm{d}G(y). \end{aligned}$$

※

$$\mathrm{E}[\eta(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(y)\,\mathrm{d}G(y).$$

- 【例 1.5(D)】 (卷积) 设 $X \sim F$, $Y \sim G$ 且 $X \perp Y$, 求 $X+Y$ 的 cdf H.

解：对任意 $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathrm{P}(X+Y \leq z) = \mathrm{E}\left[\mathrm{P}(X+Y \leq z | Y)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(X+Y \leq z | Y=y)\, \mathrm{d}G(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(z-y)\, \mathrm{d}G(y). \end{aligned}$$

※

$$\mathrm{E}[\eta(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(y)\, \mathrm{d}G(y).$$

- 【例 1.5(D)】(卷积) 设 $X \sim F$, $Y \sim G$ 且 $X \perp Y$, 求 $X+Y$ 的 cdf H.

解：对任意 $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathrm{P}(X+Y \le z) = \mathrm{E}\left[\mathrm{P}(X+Y \le z|Y)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(X+Y \le z|Y=y)\,\mathrm{d}G(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(z-y)\,\mathrm{d}G(y). \end{aligned}$$

※

$$\mathrm{E}[\eta(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(y)\,\mathrm{d}G(y).$$

- 【例】 (例 1.3(A)续, 匹配问题)

  在一次聚会上，n 个人将自己的帽子混在一起，会后每人随机取帽. 记 X_n 为总匹配个数，L 表示第一人未匹配. 求 $\mathrm{E}[X_n|L]$.

解：对第一人是否匹配情况取条件，

$$\mathrm{E}\,X_n = \mathrm{E}[X_n|L]\cdot\mathrm{P}(L) + \mathrm{E}[X_n|L^c]\cdot\mathrm{P}(L^c)$$

$\Longrightarrow$ (利用 $[X_n|L^c] = 1 + X_{n-1}$)

$$1 = \mathrm{E}[X_n|L]\cdot\frac{n-1}{n} + 2\cdot\frac{1}{n}$$

于是，

$$\mathrm{E}[X_n|L] = \frac{n-2}{n-1}. \quad \blacksquare$$

- 【例】(例 1.3(A)续，匹配问题)

  在一次聚会上，n 个人将自己的帽子混在一起，会后每人随机取帽．记 X_n 为总匹配个数，L 表示第一人未匹配．求 $\mathrm{E}[X_n|L]$.

解：对第一人是否匹配情况取条件，

$$\mathrm{E}\,X_n = \mathrm{E}[X_n|L]\cdot \mathrm{P}(L) + \mathrm{E}[X_n|L^c]\cdot \mathrm{P}(L^c)$$

$\Longrightarrow$ (利用 $[X_n|L^c] = 1 + X_{n-1}$)

$$1 = \mathrm{E}[X_n|L]\cdot \frac{n-1}{n} + 2\cdot \frac{1}{n}$$

于是，

$$\mathrm{E}[X_n|L] = \frac{n-2}{n-1}. \quad ∎$$

- 【例】(例 1.3(A)续, 匹配问题)

  在一次聚会上，n 个人将自己的帽子混在一起，会后每人随机取帽. 记 X_n 为总匹配个数，L 表示第一人未匹配. 求 $\mathrm{E}[X_n|L]$.

解：对第一人是否匹配情况取条件，

$$\mathrm{E}\,X_n = \mathrm{E}\left[X_n|L\right]\cdot \mathrm{P}\left(L\right) + \mathrm{E}\left[X_n|L^c\right]\cdot \mathrm{P}\left(L^c\right)$$

$\Longrightarrow$ (利用 $[X_n|L^c] = 1 + X_{n-1}$)

$$1 = \mathrm{E}\left[X_n|L\right]\cdot \frac{n-1}{n} + 2\cdot\frac{1}{n}$$

于是，

$$\mathrm{E}\left[X_n|L\right] = \frac{n-2}{n-1}. \quad \blacksquare$$

- 【例 1.5(F)】 (例 1.3(A)续) 在一次聚会上，n 个人将自己的帽子混在一起，会后每人随机取帽. 记 $E_n = \{n$ 人完全不匹配$\}$. 求 $P_n := \mathrm{P}(E_n)$.

解：将 n 人编号，依序取帽. 记 $M_j = \{$1st 人取得 jth 人的帽子 $C_j\}$, $j = 1, \ldots, n$.

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(E_n|M_i) \cdot \mathrm{P}(M_i) = \frac{n-1}{n} \mathrm{P}(E_n|M_2).$$

$[E_n|M_2]$ 分解：

- 2nd 人取 1st 人帽子 C_1, 其余 $n-2$ 个人皆未匹配； 概率 $\frac{1}{n-1} P_{n-2}$
- 2nd 人取到的帽子非 C_1, 其余 $n-2$ 个人皆未匹配. 概率 P_{n-1}

  (看法：视 1st 的帽子 C_1 即为 2nd 人的帽子)

- 【例 1.5(F)】(例 1.3(A)续) 在一次聚会上，n 个人将自己的帽子混在一起，会后每人随机取帽. 记 $E_n = \{n \text{ 人完全不匹配}\}$. 求 $P_n := \mathrm{P}(E_n)$.

解：将 n 人编号，依序取帽. 记 $M_j = \{1\text{st 人取得 } j\text{th 人的帽子 } C_j\}$, $j = 1, \ldots, n$.

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(E_n|M_i) \cdot \mathrm{P}(M_i) = \frac{n-1}{n} \mathrm{P}(E_n|M_2).$$

$[E_n|M_2]$ 分解：

- 2nd 人取 1st 人帽子 C_1, 其余 $n-2$ 个人皆未匹配； 概率 $\frac{1}{n-1} P_{n-2}$
- 2nd 人取到的帽子非 C_1, 其余 $n-2$ 个人皆未匹配. 概率 P_{n-1}

  (看法：视 1st 的帽子 C_1 即为 2nd 人的帽子)

于是,

$$\mathrm{P}\left(E_n \middle| M_2\right) = \frac{1}{n-1} P_{n-2} + P_{n-1}$$

$\Longrightarrow$

$$P_n = \frac{1}{n} P_{n-2} + \frac{n-1}{n} P_{n-1}$$

$$P_n - P_{n-1} = -\frac{1}{n}(P_{n-1} - P_{n-2}), \quad n \geq 3$$

利用初始条件 $P_1 = 0$, $P_2 = 1/2$, 得

$$P_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}. \quad \blacksquare$$

§1.3 + §1.5 期望与条件期望

- 【例 1.5(C)】(匹配问题) 在一次聚会上，n 个人将自己的帽子混在一起，会后每人随机取帽. 正确取到自己帽子的人离开，没有正确取帽的人将帽子重新混在一起，再进行一轮随机取帽子. 该过程一直进行到所有人都正确取到自己的帽子. 记 R_n 为所取帽子的轮数. 求 $\mathrm{E}\,R_n$.

分析：记 M 为第一轮正确取帽的人数，则 $\mathrm{E}\,M = 1$. 于是猜测

$$\mathrm{E}\,R_n = n. \tag{$*$.1}$$

解：归纳证明 $(*.1)$. 当 $n=1$ 时，显然. 假设 $\mathrm{E}\,R_k = k, \forall\, k \le n-1$. 对 M 取条件，得

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,R_n &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}\,[R_n | M = i] \cdot \mathrm{P}\,(M = i) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}\,[1 + R_{n-i}] \cdot \mathrm{P}\,(M = i) \\
&= 1 + \mathrm{E}\,R_n \mathrm{P}\,(M = 0) + \sum_{i=1}^{n} (n-i) \mathrm{P}\,(M = i) \\
&= \mathrm{E}\,R_n \cdot \mathrm{P}\,(M = 0) + n\,[1 - \mathrm{P}\,(M = 0)] \implies \mathrm{E}\,R_n = n. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

- 【例 1.5(C)】 (匹配问题) 在一次聚会上，n 个人将自己的帽子混在一起，会后每人随机取帽. 正确取到自己帽子的人离开，没有正确取帽的人将帽子重新混在一起，再进行一轮随机取帽子. 该过程一直进行到所有人都正确取到自己的帽子. 记 R_n 为所取帽子的轮数. 求 $\mathrm{E}\, R_n$.

分析：记 M 为第一轮正确取帽的人数，则 $\mathrm{E}\, M = 1$. 于是猜测

$$\mathrm{E}\, R_n = n. \tag{$*.1$}$$

解：归纳证明 $(*.1)$. 当 $n=1$ 时，显然. 假设 $\mathrm{E}\, R_k = k, \forall\, k \le n-1$. 对 M 取条件，得

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\, R_n &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}\,[R_n | M = i] \cdot \mathrm{P}\,(M = i) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}\,[1 + R_{n-i}] \cdot \mathrm{P}\,(M = i) \\
&= 1 + \mathrm{E}\, R_n \mathrm{P}\,(M = 0) + \sum_{i=1}^{n} (n - i) \mathrm{P}\,(M = i) \\
&= \mathrm{E}\, R_n \cdot \mathrm{P}\,(M = 0) + n\,[1 - \mathrm{P}\,(M = 0)] \implies \mathrm{E}\, R_n = n. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

- 【例 1.5(C)】(匹配问题) 在一次聚会上，n 个人将自己的帽子混在一起，会后每人随机取帽. 正确取到自己帽子的人离开，没有正确取帽的人将帽子重新混在一起，再进行一轮随机取帽子. 该过程一直进行到所有人都正确取到自己的帽子. 记 R_n 为所取帽子的轮数. 求 $\mathrm{E}\,R_n$.

分析：记 M 为第一轮正确取帽的人数，则 $\mathrm{E}\,M = 1$. 于是猜测

$$\mathrm{E}\,R_n = n. \tag{$*$.1}$$

解：归纳证明 ($*$.1). 当 $n = 1$ 时，显然. 假设 $\mathrm{E}\,R_k = k, \forall\, k \le n-1$. 对 M 取条件，得

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,R_n &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}\,[R_n | M = i] \cdot \mathrm{P}\,(M = i) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}\,[1 + R_{n-i}] \cdot \mathrm{P}\,(M = i) \\
&= 1 + \mathrm{E}\,R_n \mathrm{P}\,(M = 0) + \sum_{i=1}^{n} (n-i) \mathrm{P}\,(M = i) \\
&= \mathrm{E}\,R_n \cdot \mathrm{P}\,(M = 0) + n\,[1 - \mathrm{P}\,(M = 0)] \implies \mathrm{E}\,R_n = n. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

- 【例 1.5(C) 续】（匹配问题） n 个人随机取帽，该过程经过多轮一直进行到所有人都正确取到自己的帽子. 记 S_n 为 n 个人所需取帽子的总次数. 求 $\mathrm{E}\, S_n$.

错误分析：记 M 为第一轮正确取帽的人数，则 $\mathrm{E}\, M = 1$. 于是猜测

$$\mathrm{E}\, S_n = n + (n-1) + \cdots + 2 = n(n+1)/2 - 1. \qquad (*.2)$$

原因：$S_2/2 \sim \mathrm{Geo}(1/2) \implies \mathrm{E}\, S_2 = 4.$

解：对 M 取条件，得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\, S_n &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}\,[S_n | M = i] \cdot \mathrm{P}\,(M = i) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}\,[n + S_{n-i}] \cdot \mathrm{P}\,(M = i) \\ &= n + \mathrm{E}\, S_n \cdot \mathrm{P}\,(M = 0) + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\,[S_{n-i}] \cdot \mathrm{P}\,(M = i).\end{aligned}$$

- 【例 1.5(C) 续】(匹配问题) n 个人随机取帽，该过程经过多轮一直进行到所有人都正确取到自己的帽子. 记 S_n 为 n 个人所需取帽子的总次数. 求 $\mathrm{E}\, S_n$.

错误分析：记 M 为第一轮正确取帽的人数，则 $\mathrm{E}\, M = 1$. 于是猜测

$$\mathrm{E}\, S_n = n + (n-1) + \cdots + 2 = n(n+1)/2 - 1. \qquad (*.2)$$

原因：$S_2/2 \sim \mathrm{Geo}(1/2) \implies \mathrm{E}\, S_2 = 4.$

解：对 M 取条件，得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\, S_n &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}\left[S_n | M = i\right] \cdot \mathrm{P}\left(M = i\right) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}\left[n + S_{n-i}\right] \cdot \mathrm{P}\left(M = i\right) \\ &= n + \mathrm{E}\, S_n \cdot \mathrm{P}\left(M = 0\right) + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[S_{n-i}\right] \cdot \mathrm{P}\left(M = i\right).\end{aligned}$$

- 【例 1.5(C) 续】(匹配问题) n 个人随机取帽，该过程经过多轮一直进行到所有人都正确取到自己的帽子. 记 S_n 为 n 个人所需取帽子的总次数. 求 $\mathrm{E}\, S_n$.

错误分析：记 M 为第一轮正确取帽的人数，则 $\mathrm{E}\, M = 1$. 于是猜测

$$\mathrm{E}\, S_n = n + (n-1) + \cdots + 2 = n(n+1)/2 - 1. \qquad (*.2)$$

原因：
$$S_2/2 \sim \mathrm{Geo}(1/2) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{E}\, S_2 = 4.$$

解：对 M 取条件，得

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\, S_n &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}\,[S_n | M = i] \cdot \mathrm{P}\,(M = i) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}\,[n + S_{n-i}] \cdot \mathrm{P}\,(M = i) \\
&= n + \mathrm{E}\, S_n \cdot \mathrm{P}\,(M = 0) + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\,[S_{n-i}] \cdot \mathrm{P}\,(M = i).
\end{aligned}$$

往下归纳证明:

$$\mathrm{E}\, S_n = n + \frac{n^2}{2}, \quad n \geq 2. \qquad (*.3)$$

$n = 2$ 情形 $\surd$. 假设 $\mathrm{E}\, S_k = k + k^2/2$, $\forall\, k = 2, \ldots, n-1$. 记

$$p_j = \mathrm{P}\,(M = j).$$

注意到 $\mathrm{E}\, S_0 = 0$, $\mathrm{E}\, S_1 = 1$, $p_{n-1} = 0$, 于是

$$\mathrm{E}\, S_n = n + \mathrm{E}\, S_n \cdot p_0 + \sum_{i=1}^{n} \left[n - i + \frac{1}{2}(n-i)^2 \right] \cdot p_i$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{E}\, S_n = n + \mathrm{E}\, S_n \cdot p_0 + \left(n + \frac{n^2}{2} \right)(1 - p_0) - (n+1)\,\mathrm{E}\, M + \frac{1}{2}\mathrm{E}\, M^2$$

$\Longrightarrow \quad (*.3) \qquad$ (利用 $\mathrm{E}\, M = 1$, $\mathrm{E}\, M^2 = 2$)

往下归纳证明:

$$\mathrm{E}\, S_n = n + \frac{n^2}{2}, \quad n \geq 2. \tag{$*$.3}$$

$n = 2$ 情形 $\surd$. 假设 $\mathrm{E}\, S_k = k + k^2/2$, $\forall\, k = 2, \dots, n-1$. 记

$$p_j = \mathrm{P}\,(M = j).$$

注意到 $\mathrm{E}\, S_0 = 0$, $\mathrm{E}\, S_1 = 1$, $p_{n-1} = 0$, 于是

$$\mathrm{E}\, S_n = n + \mathrm{E}\, S_n \cdot p_0 + \sum_{i=1}^{n} \left[n - i + \frac{1}{2}(n-i)^2 \right] \cdot p_i$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{E}\, S_n = n + \mathrm{E}\, S_n \cdot p_0 + \left(n + \frac{n^2}{2} \right)(1 - p_0) - (n+1)\, \mathrm{E}\, M + \frac{1}{2} \mathrm{E}\, M^2$$

$\Longrightarrow$ $(*.3)$ (利用 $\mathrm{E}\, M = 1$, $\mathrm{E}\, M^2 = 2$)

往下归纳证明:

$$\mathrm{E}\, S_n = n + \frac{n^2}{2}, \quad n \geq 2. \tag{$*$.3}$$

$n = 2$ 情形 $\surd$. 假设 $\mathrm{E}\, S_k = k + k^2/2$, $\forall\, k = 2, \ldots, n-1$. 记

$$p_j = \mathrm{P}\,(M = j).$$

注意到 $\mathrm{E}\, S_0 = 0$, $\mathrm{E}\, S_1 = 1$, $p_{n-1} = 0$, 于是

$$\mathrm{E}\, S_n = n + \mathrm{E}\, S_n \cdot p_0 + \sum_{i=1}^{n} \left[n - i + \frac{1}{2}(n-i)^2 \right] \cdot p_i$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{E}\, S_n = n + \mathrm{E}\, S_n \cdot p_0 + \left(n + \frac{n^2}{2} \right)(1 - p_0) - (n+1)\,\mathrm{E}\, M + \frac{1}{2}\mathrm{E}\, M^2$$

$\Longrightarrow \quad (*.3) \qquad$ (利用 $\mathrm{E}\, M = 1$, $\mathrm{E}\, M^2 = 2$)

- 【例 1.5(C) 续】 (匹配问题) n 个人随机取帽，该过程经过多轮一直进行到所有人都正确取到自己的帽子. 记 Y_j 为 第 j 个人错误取帽的次数. 求 $\mathrm{E}\, Y_j$.

解：注意到

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} (1 + Y_j) = n + \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

且 $\mathrm{E}\, Y_1 = \cdots = \mathrm{E}\, Y_n$, 于是

$$\mathrm{E}\, Y_j = \frac{n}{2}, \quad j = 1, \ldots, n. \quad \blacksquare$$

- 【例 1.5(C) 续】 (匹配问题) n 个人随机取帽，该过程经过多轮一直进行到所有人都正确取到自己的帽子. 记 Y_j 为 第 j 个人错误取帽的次数. 求 $\mathrm{E}\, Y_j$.

解：注意到

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}(1 + Y_j) = n + \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

且 $\mathrm{E}\, Y_1 = \cdots = \mathrm{E}\, Y_n$, 于是

$$\mathrm{E}\, Y_j = \frac{n}{2}, \quad j = 1, \ldots, n. \quad \blacksquare$$

- 【例 1.5(E)】(选票问题) 一次选举有两位候选人 A 和 B, A 得 n 张选票，B 得 m 张选票, $n > m$. 在唱票前假设选票是随机排列，证明

$$\mathrm{P}\big(\underbrace{\text{在唱票过程中 A 始终领先于 B}}_{\text{记为 } E_{n,m}}\big) = \frac{n-m}{n+m}.$$

证明：记 $P_{n,m} = \mathrm{P}(E_{n,m})$, $D = \{\text{A 得最后一票}\}$. 对最后一张票归属取条件，得

$$P_{n,m} = \mathrm{P}(E_{n,m}|D) \cdot \mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(E_{n,m}|D^c) \cdot \mathrm{P}(D^c)$$

$\Longrightarrow$

$$P_{n,m} = P_{n-1,m} \cdot \frac{n}{n+m} + P_{n,m-1} \cdot \frac{m}{n+m}$$

$\Longrightarrow$ (归纳证明)

$$P_{n,m} = \frac{n-m}{n+m}, \qquad P_{n,m} = 1 - \frac{m}{n+1} \text{ (舍去，因 } P_{n,n} = 0).$$

§1.3 + §1.5 期望与条件期望

- 【例 1.5(E)】（选票问题）一次选举有两位候选人 A 和 B, A 得 n 张选票，B 得 m 张选票, $n > m$. 在唱票前假设选票是随机排列，证明

$$\mathrm{P}\big(\underbrace{\text{在唱票过程中 A 始终领先于 B}}_{\text{记为 } E_{n,m}}\big) = \frac{n-m}{n+m}.$$

证明：记 $P_{n,m} = \mathrm{P}(E_{n,m})$, $D = \{\text{A 得最后一票}\}$. 对最后一张票归属取条件，得

$$P_{n,m} = \mathrm{P}(E_{n,m}|D)\cdot\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(E_{n,m}|D^c)\cdot\mathrm{P}(D^c)$$

$\Longrightarrow$

$$P_{n,m} = P_{n-1,m}\cdot\frac{n}{n+m} + P_{n,m-1}\cdot\frac{m}{n+m}$$

$\Longrightarrow$（归纳证明）

$$P_{n,m} = \frac{n-m}{n+m}, \qquad P_{n,m} = 1 - \frac{m}{n+1} \text{（舍去，因 } P_{n,n} = 0\text{）}.$$

- 【例 1.5(E)】(选票问题) 一次选举有两位候选人 A 和 B, A 得 n 张选票，B 得 m 张选票, $n > m$. 在唱票前假设选票是随机排列，证明

$$\mathrm{P}\big(\underbrace{\text{在唱票过程中 A 始终领先于 B}}_{\text{记为 } E_{n,m}}\big) = \frac{n-m}{n+m}.$$

证明：记 $P_{n,m} = \mathrm{P}(E_{n,m})$, $D = \{\text{A 得最后一票}\}$. 对最后一张票归属取条件，得

$$P_{n,m} = \mathrm{P}(E_{n,m}|D) \cdot \mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(E_{n,m}|D^c) \cdot \mathrm{P}(D^c)$$

$\Longrightarrow$

$$P_{n,m} = P_{n-1,m} \cdot \frac{n}{n+m} + P_{n,m-1} \cdot \frac{m}{n+m}$$

$\Longrightarrow$ (归纳证明)

$$P_{n,m} = \frac{n-m}{n+m}, \qquad P_{n,m} = 1 - \frac{m}{n+1} \text{ (舍去，因 } P_{n,n} = 0).$$

- 【例 1.5(E)】(选票问题) 一次选举有两位候选人 A 和 B, A 得 n 张选票, B 得 m 张选票, $n > m$. 在唱票前假设选票是随机排列, 证明

$$\mathrm{P}\big(\underbrace{\text{在唱票过程中 A 始终领先于 B}}_{\text{记为 } E_{n,m}}\big) = \frac{n-m}{n+m}.$$

证明: 记 $P_{n,m} = \mathrm{P}(E_{n,m})$, $D = \{\text{A 得最后一票}\}$. 对最后一张票归属取条件, 得

$$P_{n,m} = \mathrm{P}(E_{n,m}|D) \cdot \mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(E_{n,m}|D^c) \cdot \mathrm{P}(D^c)$$

$\Longrightarrow$

$$P_{n,m} = P_{n-1,m} \cdot \frac{n}{n+m} + P_{n,m-1} \cdot \frac{m}{n+m}$$

$\Longrightarrow$ (归纳证明)

$$P_{n,m} = \frac{n-m}{n+m}, \qquad P_{n,m} = 1 - \frac{m}{n+1} \text{ (舍去, 因 } P_{n,n} = 0).$$

选票问题的假设:

- 在唱票前每个人得票是确定的;
- 所有票的排列是等可能的.

选票问题的应用: 连续投掷一枚硬币, 每次正面出现概率为 p, 反面出现的概率为 $q=1-p$. 抛掷过程中首次出现正反面出现次数相同的时刻记为 T. 求 T 分布.

错误解法: 记 $D=\{$第 $2n$ 次抛掷出现正面$\}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T=2n) &= \mathrm{P}(T=2n, D)+\mathrm{P}(T=2n, D^c) \\ &= P_{n,n-1}\cdot p+P_{n,n-1}\cdot q=P_{n,n-1}=1/(2n-1). \end{aligned}$$

原因: $\{T=2n|D\}$ 中排列并不是等可能. Why ?

选票问题的假设:

- 在唱票前每个人得票是确定的;
- 所有票的排列是等可能的.

选票问题的应用: 连续投掷一枚硬币, 每次正面出现概率为 p, 反面出现的概率为 $q = 1 - p$. 抛掷过程中首次出现正反面出现次数相同的时刻记为 T. 求 T 分布.

错误解法: 记 $D = \{第\ 2n\ 次抛掷出现正面\}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T = 2n) &= \mathrm{P}(T = 2n, D) + \mathrm{P}(T = 2n, D^c) \\ &= P_{n,n-1} \cdot p + P_{n,n-1} \cdot q = P_{n,n-1} = 1/(2n-1). \end{aligned}$$

原因: $\{T = 2n | D\}$ 中排列并不是等可能. Why ?

选票问题的假设:

- 在唱票前每个人得票是确定的;
- 所有票的排列是等可能的.

选票问题的应用: 连续投掷一枚硬币, 每次正面出现概率为 p, 反面出现的概率为 $q=1-p$. 抛掷过程中首次出现正反面出现次数相同的时刻记为 T. 求 T 分布.

错误解法: 记 $D=\{$第 $2n$ 次抛掷出现正面$\}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T=2n) &= \mathrm{P}(T=2n, D)+\mathrm{P}(T=2n, D^c) \\ &= P_{n,n-1}\cdot p+P_{n,n-1}\cdot q=P_{n,n-1}=1/(2n-1). \end{aligned}$$

原因: $\{T=2n|D\}$ 中排列并不是等可能. Why ?

选票问题的假设:

- 在唱票前每个人得票是确定的;
- 所有票的排列是等可能的.

选票问题的应用: 连续投掷一枚硬币, 每次正面出现概率为 p, 反面出现的概率为 $q = 1 - p$. 抛掷过程中首次出现正反面出现次数相同的时刻记为 T. 求 T 分布.

错误解法: 记 $D = \{$第 $2n$ 次抛掷出现正面$\}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T = 2n) &= \mathrm{P}(T = 2n, D) + \mathrm{P}(T = 2n, D^c) \\ &= P_{n,n-1} \cdot p + P_{n,n-1} \cdot q = P_{n,n-1} = 1/(2n-1). \end{aligned}$$

原因: $\{T = 2n | D\}$ 中排列并不是等可能. Why ?

正确解法：记 $J=\{$前 $2n$ 次抛掷正面出现 n 次$\}$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(T=2n) &= \mathrm{P}(T=2n,J)=\mathrm{P}(T=2n|J)\cdot\mathrm{P}(J),\\
\mathrm{P}(T=2n|J) &= \mathrm{P}(T=2n,D|J)+\mathrm{P}(T=2n,D^c|J)\\
&= \mathrm{P}(T=2n|D,J)\cdot\mathrm{P}(D|J)\\
&\quad +\mathrm{P}(T=2n|D^c,J)\cdot\mathrm{P}(D^c|J)\\
&= P_{n,n-1}\cdot\frac{1}{2}+P_{n,n-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2n-1}.
\end{aligned}
$$

验证选票问题假设：任取 $1\le j_1<j_2<\cdots<j_n\le 2n-1$,

$$\mathrm{P}(\text{于时刻 } j_1,j_2,\ldots,j_n \text{ 抛出反面}|D,J)=\frac{1}{\binom{2n-1}{n}}.$$

正确解法：记 $J=\{$前 $2n$ 次抛掷正面出现 n 次$\}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T=2n) &= \mathrm{P}(T=2n,J)=\mathrm{P}(T=2n|J)\cdot\mathrm{P}(J),\\
\mathrm{P}(T=2n|J) &= \mathrm{P}(T=2n,D|J)+\mathrm{P}(T=2n,D^c|J)\\
&= \mathrm{P}(T=2n|D,J)\cdot\mathrm{P}(D|J)\\
&\quad +\mathrm{P}(T=2n|D^c,J)\cdot\mathrm{P}(D^c|J)\\
&= P_{n,n-1}\cdot\frac{1}{2}+P_{n,n-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2n-1}.
\end{aligned}$$

验证选票问题假设：任取 $1\le j_1<j_2<\cdots<j_n\le 2n-1$,

$$\mathrm{P}(\text{于时刻 } j_1,j_2,\ldots,j_n \text{ 抛出反面}|D,J)=\frac{1}{\binom{2n-1}{n}}.$$

- 【例 1.5(I)】 (Poisson 随机变量分类) 假设一系列事件相互独立，已知在一特定时间内事件发生的次数

$$N \sim \mathrm{Poisson}(\lambda).$$

每个事件又以概率 p_j 划入 j 型，$p_1 + \cdots + p_k = 1$. 记 N_j 为该时间段内 j 型事件的个数. 证明

  - $N_1, N_2, \ldots, N_k$ 相互独立；
  - 对任意 $j = 1, \ldots, n$,

$$N_j \sim \mathrm{Poisson}(\lambda p_j).$$

- 寿命随机变量、寿命分布
- 失效率函数：设 $X \sim F$, $F(0-) = 0$, pdf 为 f, 则失效率函数定义为

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)}, \quad \forall\, t \in [0, u_X),$$

其中 $u_X = \sup\{x : F(x) < 1\}$, 且约定 $\lambda(t) = +\infty$, $t > u_X$.

- 失效率函数直观解释：若 $\lambda(t)$ 于 $(0, u_X)$ 上连续，则对任意 $t \in (0, u_X)$,

$$\mathrm{P}\left(X \in (t, t+\Delta t) | X > t\right) = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t).$$

- cdf 与失效率函数之间一一对应：

$$\overline{F}(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(x)\,\mathrm{d}x\right\}, \quad t \geq 0.$$

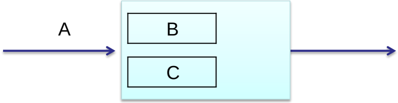
§1.6 寿命分布、指数分布

- 指数分布的无记忆性：设 $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，则

$$\mathrm{P}\left(T - t > s \middle| T > t\right) = \mathrm{P}\left(T > s\right), \quad \forall s > 0, t > 0.$$

- 指数分布的刻画：在绝对连续的寿命随机变量类中，
  - 具有常数失效率函数；或
  - 具有无记忆性

- 【例 1.6(A)】 系统有两个服务台，服务员给顾客提供的服务时间$\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. 采用 FIFO 规则. 当 A 到达系统时，发现 B 和 C 占据了两个服务台，求 A 最后离开的概率.

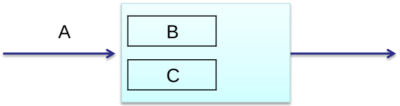


- **指数分布的无记忆性**：设 $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，则

$$\mathrm{P}\left(T-t>s \middle| T>t\right)=\mathrm{P}\left(T>s\right), \quad \forall s>0, t>0.$$

- **指数分布的刻画**：在绝对连续的寿命随机变量类中，
  - 具有常数失效率函数；或
  - 具有无记忆性

▶【例 1.6(A)】 系统有两个服务台，服务员给顾客提供的服务时间$\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. 采用 FIFO 规则. 当 A 到达系统时，发现 B 和 C 占据了两个服务台，求 A 最后离开的概率.



- 序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的记录值： 若 $X_n > \max\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$，则称序列于时刻 n 产生了一个记录，且记录值为 X_n，这里约定 $X_0 = -\infty$.
  - 产生记录的时刻：S_1，S_2，…，S_k，…
  - 记录值依次记为：R_1，R_2，…，R_k，…
  - 第 i 个与第 $i+1$ 个记录之间的时间间隔：$\tau_i = S_{i+1} - S_i$，$i \geq 0$.

$$S_1 = 1, \quad R_1 = X_1, \quad R_n = X_{S_n}, \quad n \geq 1.$$

【例 1.6(B)】 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim F$，F 于其支撑区间 (ℓ, u) 上连续且严格单调，求 τ_i 的分布.

⊛ F 的支撑区间 (ℓ, u) 的定义：

$$\ell = \inf\{x : F(x) > 0\}, \qquad u = \sup\{x : F(x) < 1\}.$$

▶ 序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的记录值： 若 $X_n > \max\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$, 则称序列于时刻 n 产生了一个记录，且记录值为 X_n，这里约定 $X_0 = -\infty$.

- 产生记录的时刻：S_1，S_2，$\ldots$，S_k，$\ldots$
- 记录值依次记为：R_1，R_2，$\ldots$，R_k，$\ldots$
- 第 i 个与第 $i+1$ 个记录之间的时间间隔：$\tau_i = S_{i+1} - S_i$, $i \geq 0$.

$$S_1 = 1, \quad R_1 = X_1, \quad R_n = X_{S_n}, \quad n \geq 1.$$

【例 1.6(B)】 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim F$, F 于其支撑区间 (ℓ, u) 上连续且严格单调，求 τ_i 的分布.

⊛ F 的支撑区间 (ℓ, u) 的定义：

$$\ell = \inf\{x : F(x) > 0\}, \qquad u = \sup\{x : F(x) < 1\}.$$

分析：

- 对任意于 (ℓ, u) 上严格单调的函数 h, 下面两个序列

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_n, \quad \ldots$$

$$h(X_1), \quad h(X_2), \quad \ldots, \quad h(X_n), \quad \ldots$$

创记录的时刻是相同的，因此创记录的时间间隔 τ_i 对应相同.

- 特别取 $h(x) = F(x)$. 注意到

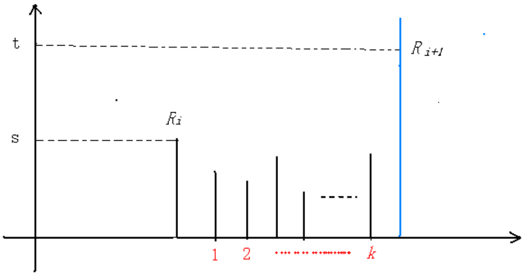
$$F(X_1), \quad F(X_2), \quad \ldots, \quad F(X_n), \quad \ldots \text{ iid} \sim U(0, 1),$$

所以 τ_i 的分布与 F 无关.

- 为求 τ_i 分布，不妨设 $F = \mathrm{Exp}(1)$ 分布.

解： 不妨设 F 为 Exp(1) 分布，先证明

$$R_1,\ R_2 - R_1,\ \ldots,\ R_{i+1} - R_i,\ \ldots\ \text{iid} \sim \mathrm{Exp}(1).$$



对 $\forall\, s > 0, t > 0$,

$$\mathrm{P}\left(R_{i+1} > t | R_i = s\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-s})^k \cdot e^{-t} = e^{-(t-s)}.$$

$\Longrightarrow \quad R_i \sim \Gamma(i, 1), \quad i \geq 1$, 其 pdf 为

$$f_{R_i}(x) = \frac{e^{-t}t^{i-1}}{(i-1)!}, \qquad t > 0.$$

为求 τ_i 的分布，对 R_i 取条件，对任意 $k = 0, 1, \ldots,$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\tau_i > k) &= \mathrm{E}\left\{\mathrm{P}(\tau_i > k | R_i)\right\} \\ &= \int_0^\infty \mathrm{P}(\tau_i > k | R_i = t) \cdot \frac{1}{(i-1)!} e^{-t} t^{i-1} \, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-t})^k \cdot \frac{1}{(i-1)!} e^{-t} t^{i-1} \, \mathrm{d}y. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

对于一般的连续分布 F, 如何求 R_i 的分布？

$\Longrightarrow \quad R_i \sim \Gamma(i,1), \quad i \geq 1$, 其 pdf 为

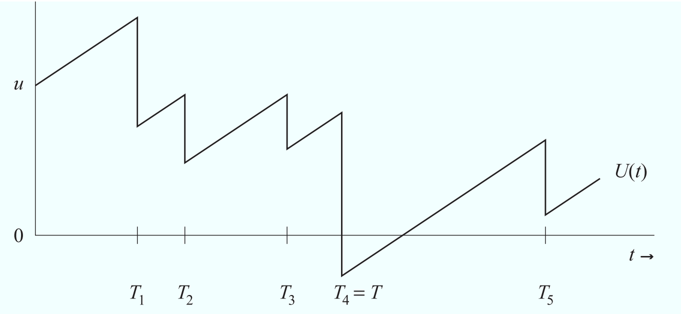
$$f_{R_i}(x) = \frac{e^{-t}t^{i-1}}{(i-1)!}, \quad t > 0.$$

为求 τ_i 的分布，对 R_i 取条件，对任意 $k = 0, 1, \ldots,$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\tau_i > k) &= \mathrm{E}\left\{\mathrm{P}(\tau_i > k | R_i)\right\} \\ &= \int_0^{\infty} \mathrm{P}(\tau_i > k | R_i = t) \cdot \frac{1}{(i-1)!} e^{-t} t^{i-1} \,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\infty} (1 - e^{-t})^k \cdot \frac{1}{(i-1)!} e^{-t} t^{i-1} \,\mathrm{d}y. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

对于一般的连续分布 F, 如何求 R_i 的分布？

- 随机过程： $\{X(t),\ t \in T\}$, 随机事件动态关系的定量描述.
  - t: 时间参数，通常是真实时间或其一个变换，也可是广义时间；
  - T: 指标集合；
  - 状态空间: $X(t)$ $(t \in T)$ 所有可能的取值集合；
  - 一段样本路径或轨道: $\{X(t), t \in T\}$ 的一个部分实现 $\{X(t, w_0), t \in T_0\}$, 其中 $T_0 \subset T$, $w_0 \in \Omega$.



- 随机过程分类：根据指标集合 T 和状态空间来划分.
  - 离散时间 SP 记为 $\{X_n, n \in T\}$
  - 连续时间 SP 记为 $\{X(t), t \in T\}$
  - 离散状态 SP
  - 连续状态 SP
  - 随机场 (时间 t 为向量)
- 随机过程发展历史：早期的发展历史属于物理学科领域，可追溯到 Gibbs, Poincaré 等人在统计力学中所做的研究，以及后来的 Einstein, Wiener, Levy 等人对布朗运动所作的开创性工作.
- 随机过程理论基础：Kolmogorov 和 Doob 奠定的.

这门学科仍在理论与应用两个方面以空前的深度和广度在迅速发展！

- 随机过程分类：根据指标集合 T 和状态空间来划分.
  - 离散时间 SP　　记为 $\{X_n, n \in T\}$
  - 连续时间 SP　　记为 $\{X(t), t \in T\}$
  - 离散状态 SP
  - 连续状态 SP
  - 随机场　　(时间 t 为向量)
- 随机过程发展历史：早期的发展历史属于物理学科领域，可追溯到 Gibbs, Poincaré 等人在统计力学中所做的研究，以及后来的 Einstein, Wiener, Levy 等人对布朗运动所作的开创性工作.
- 随机过程理论基础：Kolmogorov 和 Doob 奠定的.

这门学科仍在理论与应用两个方面以空前的深度和广度在迅速发展!

- 随机过程分类： 根据指标集合 T 和状态空间来划分.
  - 离散时间 SP　　记为 $\{X_n, n \in T\}$
  - 连续时间 SP　　记为 $\{X(t), t \in T\}$
  - 离散状态 SP
  - 连续状态 SP
  - 随机场　　(时间 t 为向量)
- 随机过程发展历史： 早期的发展历史属于物理学科领域，可追溯到 Gibbs, Poincaré 等人在统计力学中所做的研究，以及后来的 Einstein, Wiener, Levy 等人对布朗运动所作的开创性工作.
- 随机过程理论基础： Kolmogorov 和 Doob 奠定的.

这门学科仍在理论与应用两个方面以空前的深度和广度在迅速发展！

- 随机过程常见的几条性质: 设 T 为实数集或其子集.
  - 独立增量性：对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n, \forall n > 2$,

$$X(t_2) - X(t_1),\ X(t_3) - X(t_2),\ \ldots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})$$

    相互独立.
  - 平稳增量性：对任意 $t, t+h \in T,\ h > 0,\ X(t+h) - X(t)$ 的分布跟 t 无关，只依赖于 h.
  - Markov 性：对任意 $n \geq 2,\ t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ B \subset \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left(X(t) \in B | X(t_1) = x_1,\ X(t_2) = x_2, \ldots, X(t_n) = x_n\right) \\ &= \mathrm{P}\left(X(t) \in B | X(t_n) = x_n\right). \end{aligned}$$

并非任意过程都具有如上的几条性质，有些过程只具备其中的一条或两条性质！

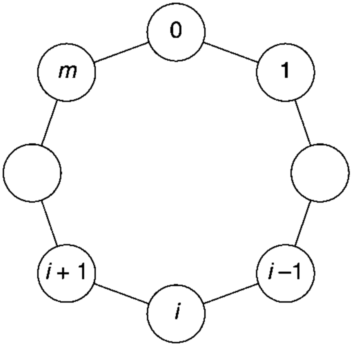
- 随机过程常见的几条性质：设 T 为实数集或其子集.
  - 独立增量性：对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n, \forall n > 2$,
  $$X(t_2) - X(t_1),\ X(t_3) - X(t_2),\ \ldots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})$$
  相互独立.
  - 平稳增量性：对任意 $t, t+h \in T$, $h > 0$, $X(t+h) - X(t)$ 的分布跟 t 无关，只依赖于 h.
  - Markov 性：对任意 $n \geq 2$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}$,
  $$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left(X(t) \in B | X(t_1) = x_1,\ X(t_2) = x_2, \ldots, X(t_n) = x_n\right) \\ &= \mathrm{P}\left(X(t) \in B | X(t_n) = x_n\right). \end{aligned}$$

并非任意过程都具有如上的几条性质，有些过程只具备其中的一条或两条性质！

- 【例 1.9(A)】 一粒子每一步等可能按顺或反时针移动一个位置，即

$$\mathrm{P}\left(X_{n+1}=i+1 | X_n=i\right)=\mathrm{P}\left(X_{n+1}=i-1 | X_n=i\right)=1/2, \quad \forall\, n \geq 0,$$

其中 X_n 表示粒子在第 n 步后的位置. 已知 $X_0=0$, 给定粒子遍历每个状态，求状态 i 是最后被访问的概率.



另一等价问题：一赌徒有 1 元钱参加一系列抛掷均匀硬币的公平赌博。每次出现正面时赌徒赢 1 元，否则输 1 元. 记

$$D_{m-1} = \{\text{该赌徒在输光前其赌金曾增加过 } m-1 \text{ 元}\},$$

求 $\mathrm{P}(D_{m-1})$.

解：记 $A_i = \{\text{给定粒子遍历每个状态，状态 } i \text{ 是最后被访问}\}$, 且定义粒子首次访问状态 k 的时刻为 T_k, 则 $\mathrm{P}(T_k < \infty) = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_i) &= \mathrm{P}(A_i, T_{i-1} < T_{i+1}) + \mathrm{P}(A_i, T_{i-1} > T_{i+1}) \\
&= \mathrm{P}(A_i | T_{i-1} < T_{i+1}) \cdot \mathrm{P}(T_{i-1} < T_{i+1}) \\
&\quad + \mathrm{P}(A_i | T_{i-1} > T_{i+1}) \cdot \mathrm{P}(T_{i-1} > T_{i+1}) \\
&= \mathrm{P}(D_{m-1}) \cdot \mathrm{P}(T_{i-1} < T_{i+1}) \\
&\quad + \mathrm{P}(D_{m-1}) \cdot \mathrm{P}(T_{i-1} > T_{i+1}) = \mathrm{P}(D_{m-1}).
\end{aligned}$$

又 $\sum_{i=1}^{m} \mathrm{P}(A_i) = 1$, 所以 $\mathrm{P}(A_i) = 1/m$, $\forall\, i \neq 0$. ▮

另一等价问题：一赌徒有 1 元钱参加一系列抛掷均匀硬币的公平赌博。每次出现正面时赌徒赢 1 元，否则输 1 元. 记

$$D_{m-1} = \{\text{该赌徒在输光前其赌金曾增加过 } m-1 \text{ 元}\},$$

求 $\mathrm{P}(D_{m-1})$.

解：记 $A_i = \{$给定粒子遍历每个状态，状态 i 是最后被访问$\}$, 且定义粒子首次访问状态 k 的时刻为 T_k, 则 $\mathrm{P}(T_k < \infty) = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_i) &= \mathrm{P}(A_i, T_{i-1} < T_{i+1}) + \mathrm{P}(A_i, T_{i-1} > T_{i+1}) \\
&= \mathrm{P}(A_i | T_{i-1} < T_{i+1}) \cdot \mathrm{P}(T_{i-1} < T_{i+1}) \\
&\quad + \mathrm{P}(A_i | T_{i-1} > T_{i+1}) \cdot \mathrm{P}(T_{i-1} > T_{i+1}) \\
&= \mathrm{P}(D_{m-1}) \cdot \mathrm{P}(T_{i-1} < T_{i+1}) \\
&\quad + \mathrm{P}(D_{m-1}) \cdot \mathrm{P}(T_{i-1} > T_{i+1}) = \mathrm{P}(D_{m-1}).
\end{aligned}$$

又 $\sum_{i=1}^{m} \mathrm{P}(A_i) = 1$, 所以 $\mathrm{P}(A_i) = 1/m$, $\forall\, i \neq 0$. ∎

分析:

- 如何求 $\mathrm{P}\left(A_i \middle| T_{i-1} < T_{i+1}\right)$?

$$
\begin{aligned}
[A_i | T_{i-1} < T_{i+1}] &= \left\{\begin{array}{c}\text{当粒子访问状态 } i-1 \text{ 时, 状态 } i \text{ 与 } i+1 \\ \text{未被访问过, 且要求 } i \text{ 最后被访问}\end{array}\right\} \\
&= \left\{\begin{array}{c}\text{当粒子处于状态 } i-1 \text{ 时, 由状态 } i \text{ 转移到 } i+1 \\ \text{之前, 不允许从状态 } i-1 \text{ 直接一步转移到 } i\end{array}\right\} \\
&\overset{\text{引进公平赌博模型}}{\Longleftrightarrow} \{\text{赌徒在输光前其赌金曾增加过 } m-1 \text{ 元}\} \\
&= D_{m-1}
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\mathrm{P}\left(A_i \middle| T_{i-1} < T_{i+1}\right) = \mathrm{P}\left(D_{m-1}\right), \quad i = 1, \ldots, m.
$$

- 对第一步转移的结果取条件. 此时, $[A_i | \text{首次转入状态 } 1] \neq A_{i-1}$.

例 1.9(A) 应用： 在上述抛掷均匀硬币的公平赌博中,

$$\mathrm{P}\left(\text{赌徒赌金减少 1 元前曾增加过 } n \text{ 元}\right) = \frac{1}{n+1},$$

$$\mathrm{P}\left(\text{赌徒赌金减少 n 元前曾增加过 1 元}\right) = \frac{n}{n+1},$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(\text{赌徒赌金减少 n 元前曾增加过 2 元}\right)\\
&\quad = \mathrm{P}\left(\text{赌金减少 n 元前曾增加过 2 元}|\text{赌金减少 n 元前曾增加过 1 元}\right)\\
&\qquad \times \mathrm{P}\left(\text{赌徒赌金减少 n 元前曾增加过 1 元}\right)\\
&\quad = \mathrm{P}\left(\text{赌金减少 n+1 元前曾增加过 1 元}\right) \cdot \frac{n}{n+1}\\
&\quad = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+2}.
\end{aligned}$$

例 1.9(A) 应用： 在上述抛掷均匀硬币的公平赌博中，

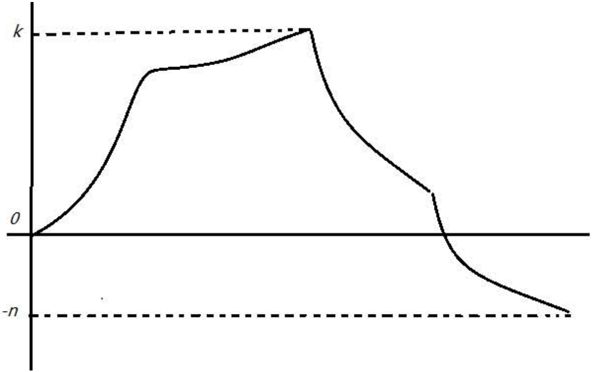
$$\mathrm{P}\,(\text{赌徒赌金减少 1 元前曾增加过 } n \text{ 元}) = \frac{1}{n+1},$$

$$\mathrm{P}\,(\text{赌徒赌金减少 n 元前曾增加过 1 元}) = \frac{n}{n+1},$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\,(\text{赌徒赌金减少 n 元前曾增加过 2 元})\\
&\quad= \mathrm{P}\,(\text{赌金减少 n 元前曾增加过 2 元}|\text{赌金减少 n 元前曾增加过 1 元})\\
&\qquad\times\mathrm{P}\,(\text{赌徒赌金减少 n 元前曾增加过 1 元})\\
&\quad= \mathrm{P}\,(\text{赌金减少 n+1 元前曾增加过 1 元})\cdot\frac{n}{n+1}\\
&\quad= \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+2}.
\end{aligned}$$

例 1.9(A) 应用： 在上述抛掷均匀硬币的公平赌博中，

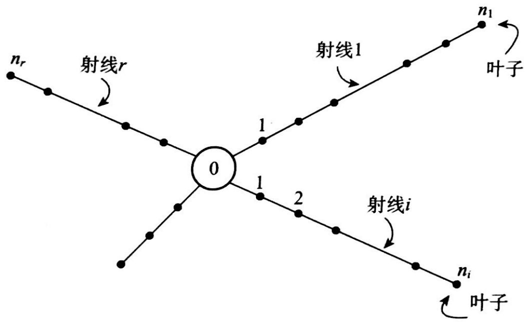
$$\mathrm{P}\,(\text{赌徒赌金减少 n 元前曾增加过 } k \text{ 元}) = \frac{n}{n+k}, \quad k \geq 1.$$



- 【例 1.9(C)】 标记为 O 的中心有 r 条射线，射线 i 上有 n_i 个点. 一质点从中心 O 出发，每次等可能地往可能的各方向移动一格，射线的最远端点称为叶子. 记

$$B_i = \{\text{首个被访问的叶子在射线 } i \text{ 上}\}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

求 $\mathrm{P}(B_i)$.



解： 记 $C_j = \{$质点首次访问射线 $j\}$, $j = 1, \ldots, r$, 则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(B_i) &= \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{r} \mathrm{P}(B_i | C_j), \\
\mathrm{P}(B_i | C_i) &= \frac{1}{n_i} + \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \mathrm{P}(B_i), \\
\mathrm{P}(B_i | C_j) &= \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) \mathrm{P}(B_i), \quad j \neq i.
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

$$
r\mathrm{P}(B_i) = \frac{1}{n_i} + \left(r - \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{n_j}\right) \mathrm{P}(B_i)
$$

$\Longrightarrow$

$$
\mathrm{P}(B_i) = \frac{1/n_i}{\sum_{j=1}^{r} 1/n_j}. \quad \blacksquare
$$

解： 记 $C_j = \{$质点首次访问射线 $j\}$, $j = 1, \ldots, r$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B_i) &= \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{r} \mathrm{P}(B_i | C_j), \\ \mathrm{P}(B_i | C_i) &= \frac{1}{n_i} + \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \mathrm{P}(B_i), \\ \mathrm{P}(B_i | C_j) &= \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) \mathrm{P}(B_i), \quad j \neq i. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$r\mathrm{P}(B_i) = \frac{1}{n_i} + \left(r - \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{n_j}\right) \mathrm{P}(B_i)$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{P}(B_i) = \frac{1/n_i}{\sum_{j=1}^{r} 1/n_j}. \quad \blacksquare$$

作业

第 1 章第一次作业

1，2，6，7，12，14，16，18，19，21

第 1 章第二次作业

25，26，27，30，31，34，38，39