

重力加速度的测量

实验报告

卜一楠 PB22071444

PHYS1008A 教室:1424 座位号:11

2023 年 4 月 1 日

一. 自由落体法测重力加速度

1. 实验目的

1. 通过对匀加速直线运动公式的变形处理, 得出光电门距离与时间之比 $\frac{h_i}{t_i}$ 与 t_i 的线性关系, 从而求出重力加速度 g 。
2. 练习光电门的使用方法, 通过光电门测量物体自由落体过程中的相关物理量。

2. 实验原理

根据牛顿运动定律, 自由落体的运动方程为:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

其中, h 为下落距离, t 是下落时间。

实际情况下, 测量的 t 的精度不高。因此, 采用双光电门的方法, 保持上端的光电门 1 的位置不变, 改变光电门 2 的位置进行测量, 让小球从光电门 1 的上端自由落体。测得的数据包括: 光电门之间的距离 h_i , 小球经过光电门的时间差 t_i 。可以认为, 小球在通过光电门 1 的初速度是不变的, 因此有:

$$h_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$h_2 = v_0 t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2$$

.....

$$h_i = v_0 t_i + \frac{1}{2}gt_i^2$$

两端同时除以 t_i :

$$\frac{h_1}{t_1} = v_0 + \frac{1}{2}gt_1$$

$$\frac{h_2}{t_2} = v_0 + \frac{1}{2}gt_2$$

.....

$$\frac{h_i}{t_i} = v_0 + \frac{1}{2}gt_i$$

由此得到了线性关系。通过对测量数据的处理可以得到合肥当地的重力加速度 g 。

3. 实验仪器

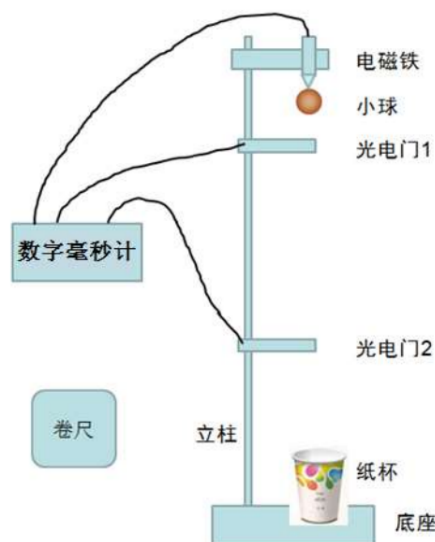


图 1: 自由落体法测重力加速度实验装置图

如图是自由落体法测重力加速度的实验装置，立柱底座的螺栓用于调节立柱，使其与水平面垂直。实验过程中，不改变光电门 1 的位置，因此可以认为小球在经过光电门 1 的速度不变。立柱上端有一电磁铁，用于吸住小钢球。电磁铁一旦断电，小球即作自由落体运动。由于电磁铁有剩磁，因此小球下落的初始时间不准确（最大不确定度约 20ms）。立柱上装有两个可上下移动的光电门，其位置可利用卷尺测量。数字毫秒计显示 3 个值，分别对应：从电磁铁断电到小球通过光电门 1 的时间差、从电磁铁断电到小球通过光电门 2 的时间差、小球通过两个光电门的时间差，单位为 ms。

4. 实验步骤

1. 组装装置。借助铅锤调节装置竖直，使铅锤与立柱平行且同时过两光电门中心。移去铅锤，释放小球，若数字毫秒计显示三个数据，则装置平衡调节完毕。
2. 测量两光电门距离 h ，待小球平衡状态时释放小球，通过数字毫秒计读出小球通过两光电门的时间差 t ，记录数据。

3. 重置数字毫秒计，重复步骤 2 三次。
4. 改变 6 次双光电门间的距离，并重复上述步骤进行试验。
5. 整理实验装置，打乱底座平衡，结束实验。
6. 利用线性拟合方法处理数据得到合肥当地的重力加速度，并进行误差分析。

5. 测量记录

表 1: 实验数据记录

实验次数	1	2	3	4	5	6
h/cm	40	45	50	55	60	70
t_1/ms	150.5	164.7	178.9	192.4	205.3	229.9
t_2/ms	150.5	164.8	179.0	192.3	205.3	229.8
t_3/ms	150.6	164.8	179.0	192.2	205.3	229.8

6. 分析与讨论

6.1 数据处理

对于每一个物体在同一 h 情况下的三个实验数据 t_1 、 t_2 、 t_3 求平均值得到在 h 高度下小球通过两光电门的平均时间差 \bar{t} ，在数据处理时，记 h_j 高度下平均时间差为 \bar{t}_j 。再由公式

$$v_j = \frac{h_j}{\bar{t}_j}$$

可计算物体在两光电门间的平均速度 \bar{v}_j 。得到下面的表格：

表 2: 实验数据记录

实验次数 j	1	2	3	4	5	6
$\bar{v}_j/m \cdot s^{-1}$	2.6572	2.7311	2.7938	2.8601	2.9226	3.0457
\bar{t}_j/ms	150.5333	164.7667	178.9667	192.3000	205.3000	229.8333

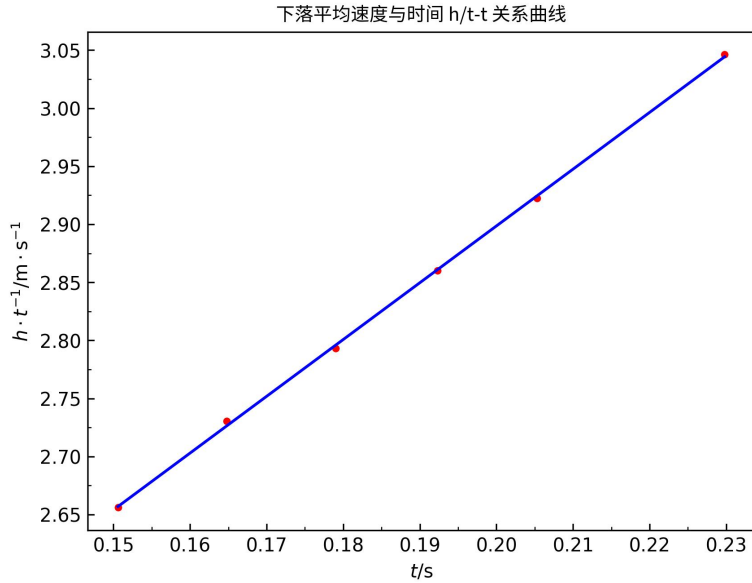


图 2: 线性拟合图像

6.2 误差分析

根据线性拟合的结果，有：

斜率：

$$m = 4.8906 \text{ m/s}^2$$

截距

$$b = 1.9204 \text{ m/s}$$

线性拟合的相关系数

$$r = \frac{\overline{t\bar{v}} - \bar{t} \cdot \bar{v}}{\sqrt{(\overline{t^2} - \bar{t}^2)(\overline{v^2} - \bar{v}^2)}} = 0.99983348$$

斜率标准差

$$s_m = |m| \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{r^2} - 1\right) / (n - 2)} = 0.044632 \text{ m/s}^2$$

截距标准差

$$s_b = s_m \cdot \sqrt{\bar{t}^2} = 0.0084253 \text{ m/s}$$

重力加速度

$$g = 2m = 2 \times 4.8906 \text{ m/s}^2 = 9.7813 \text{ m/s}^2$$

查表得 $n=6$, $P=0.68$ 时展伸因子 $t_p = 1.11$: $U_m = t_p s_m = 1.11 \times 0.044632 = 0.04954 \text{ m/s}^2$

$$U_g = 2U_m = 0.09908 \text{ m/s}^2$$

将该不确定度保留至四位有效数字，于是下落物体为小球的最终实验结果为：

$$g = \hat{g} \pm U_g = (9.7813 \pm 0.0991)m/s^2 (P = 0.68)$$

6.3 实验讨论

6.3.1 实验误差的讨论

查阅资料得知，合肥当地的重力加速度值为 $g = 9.7947m/s$ 。实验所得结果与实际值存在一定的偏差。可能的原因是：

1. 空气阻力对小球的下落产生一定影响，使得小球的重力加速度测量值偏小；
2. 小球下落时，由于电磁铁的剩磁存在，在经过光电门 1 的速度不完全相同；
3. 数据点数量较少导致线性拟合结果不准确。

6.3.2 实验改进方案

针对上述问题提出改进方案：

1. 改用密度更大体积更小的金属球完成实验以减少空气阻力的影响。
2. 适当增大光电门 1 与电磁铁之间的距离，从而减少剩磁的影响。
3. 进行更多次实验便于得到更多数据点，完成更精细的线性拟合。

7. 思考题

7.1 实际工作中用 $h = \frac{1}{2}gt^2$ 很难精确测量重力加速度的原因：

实验采用电磁铁吸引物体从而使其无初速度释放。电磁铁关闭后留有剩磁，物体在刚释放的过程中受到电磁铁的作用，并不做自由落体运动，公式中时间 t 不准确；由于物体下落的起始点和终止点并不明确，故公式中的 h 也不易测准。

7.2 为了提高测量精度，光电门 1 和光电门 2 的位置应该如何选取：

1. 两光电门间的距离可以适当增大，在测量距离与测量时间的不确定度不变时，可使得相对误差较小。
2. 固定光电门 1 的位置且适当增大改变光电门 2 位置的次数，减小每次改变光电门 2 的距离，以得到多组数据。
3. 光电门 1 与电磁铁间应保持一段距离，尽可能减少电磁铁的剩磁对下落物体的影响。

7.3 利用本实验装置提出其他测量重力加速度的可行性方案：

将光电门连接其他电子元件后，可以使其测量小球通过光电门的时间。利用测量小球的半径后，利用小球通过光电门的时间可以计算小球通过光电门的平均速度。由于小球直径较小，因此可以近似的认为平均速度为小球通过光电门时的瞬时速度。固定光电门 1 位置不变，改变光电门 2 的位置，可以测得多组 v_1 、 v_2 、时间间隔 t 。

利用牛顿第二定律有：

$$v_2 = v_1 + gt$$

做出 $(v_2 - v_1) - t$ 图像，斜率即为重力加速度 g 。

8. 附录

原始实验数据

二. 单摆法测重力加速度

1. 实验目的

1. 利用单摆的周期公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ 算出合肥当地的重力加速度;
2. 学习利用不确定度分析误差的方法;
3. 利用不确定度均分原理选用合适的仪器以及测量方法, 设计实验方案。

2. 实验原理

单摆作为一种理想化的物理模型, 通常将摆球视作质点, 将摆线视作一根没有质量、没有弹性的线。对一个摆长为 L , 摆球质量为 m , 摆角为 θ 的单摆进行受力分析, 可以得到关系式:

$$mgsin\theta = ma, a = -\ddot{\theta}L$$

当 θ 足够小时 (一般设定 $\theta < 5^\circ$), 由泰勒展开, $sin\theta = \theta + o(\theta) \doteq \theta$; 由此可得到:

$$\ddot{\theta} + \frac{L}{g}\theta = 0$$

满足 $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$, 因此有:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

实际情况下, 悬线是有质量且弹性很小的线, 摆球是有质量有体积的刚性小球, 单摆的周期公式为:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g} \left[1 + \frac{d^2}{20l^2} - \frac{m_0}{12m} \left(1 + \frac{d}{2l} + \frac{m_0}{m} \right) + \frac{\rho_0}{2\rho} + \frac{\theta^2}{16} \right]}$$

一般情况下, 摆球的几何形状、质量, 空气阻力与浮力、摆角 (一般要求摆角 $\theta < 5^\circ$) 对摆球周期 T 的修正小于 10^{-3} 。本实验中对于重力加速度的精度要求为 $\frac{\Delta g}{g} < 1\%$, 因此可以忽略这些修正项, 使用上述理想状态下的公式进行近似。

通过对单摆周期 T 以及摆长 L 的测量, 可以得到合肥当地的重力加速度 g 。

3. 实验仪器

如图为单摆法测重力加速度的实验仪器示意图。实验装置包括: 卷尺, 游标卡尺, 千分尺, 电子秒表, 单摆 (带标尺、平面镜, 摆线长度可以调节, 上限为 100cm)。

图中平面镜上画有一道竖直线, 通过观察其与摆球静止状态下是否平行可以判断装置底座是否处于平衡状态。标尺上中点距离悬挂点 50cm, 标尺上有刻度, 用于确定摆角是否小于 5° 。装置底座的调节螺栓可以用于调节底座平衡, 使得立柱与地面竖直。

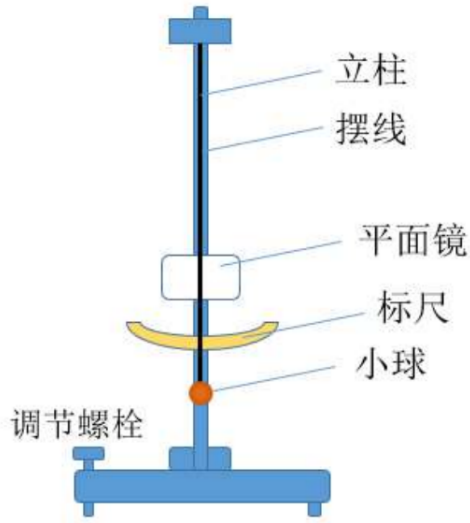


图 3: 单摆法测重力加速度实验仪器

4. 实验设计

4.1 利用不确定性均分原理设计过程

单摆周期公式为:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2)$$

变形得到:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \quad (3)$$

对式 (2) 两边取对数, 根据不确定度最大原理:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta T}{T} \quad (4)$$

本实验对精度的要求是 $\frac{\Delta g}{g} < 1\%$, 因此按照不确定度均分原理:

$$\frac{\Delta L}{L} < 0.5\% \quad (5)$$

$$2\frac{\Delta T}{T} < 0.5\%, \frac{\Delta T}{T} < 0.25\% \quad (6)$$

4.2 对摆长长度及测量精度的讨论

摆长由卷尺进行测量。卷尺的最大允差 $\Delta \approx 0.05\text{cm}$, 因此由 (4) 式可得出摆长 $L > 40\text{cm}$ 。

由单摆周期公式可得 $T \propto \sqrt{L}$ 。因此为了方便测量周期, 摆长不应过短, 防止周期过短, 摆速过大, 测量值与真实值之间有较大偏差。同样, 摆长也不应过长, 否则将会导致周期过长。适当的增加摆长有利于测量精度的提高, 并且可以减小小球半径对实验的影响, 使得实验模型更加接近理想模型。综合各方面因素, 摆长可取约为 70cm 为佳。

4.3 对测量摆长及摆球半径的仪器的讨论

由上述内容，摆长约为 70cm. 已知小球直径约为 2cm, 因此绳长 $l \approx 69\text{cm}$. 据式 (4), 结合不确定度均分原理, 得到绳长的最大允差 $\Delta l < 0.345\text{cm}$. 查表中数据可知, 钢卷尺的最大允差 $\Delta \approx 0.2\text{cm}$, 因此在允差范围内, 可以用钢卷尺测量摆绳的长度。

根据 (4) 以及不确定度均分原理可以得出, 小球直径的最大允差 $\Delta d < 0.01\text{cm}$. 已有卷尺的最大允差 $\Delta \approx 0.05\text{cm}$, 游标卡尺的最大允差 $\Delta_{\text{卡}} \approx 0.002\text{cm}$, 千分尺的最大允差 $\Delta_{\text{千}} \approx 0.001\text{cm}$ 因此可以用卷尺测量小球直径。

4.4 对测量周期个数的讨论

$$\Delta T = \Delta_{\text{人}} + \Delta_{\text{秒}} = 0.2\text{s} + 0.01\text{s} = 0.21\text{s} \quad (7)$$

代入式 (5), 可以得出 $T_{\text{总}} > 84\text{s}$. 再由式 (1) 以及重力加速度的估计值 $g = 9.8\text{m/s}^2$ 可以估算得 $T_{\text{真}} \approx 1.68\text{s}$, 故至少测量的周期数 $n > \frac{T_{\text{总}}}{T_{\text{真}}} = 50.022$ 次。

由于空气阻力等原因, 摆速是逐渐变慢的。从而, 周期变长会导致实验结果出现误差。尝试对周期进行修正, 但每组实验的周期数依然应该为 50 次以上。

5. 实验步骤

1. 按照图示要求组装实验仪器, 组装好后, 调节螺栓使得立柱竖直, 摆线与平面镜上的竖直线平行。将电子秒表指针归零。
2. 多次重复测量摆球的直径 d , 摆线的长度 l , 利用公式 $L = l + \frac{d}{2}$ 计算摆长 L 。
3. 将摆球拉起至相同的角度 $\theta (\theta < 5^\circ)$, 无初速度释放, 使摆球在平面内摆动。
4. 在释放小球的瞬间开始计时, 用电子秒表分别测量两组小球全振动 50 次、55 次、60 次所用时间, 记录有关数据。
5. 整理实验装置, 打乱底座平衡, 结束实验。
6. 进行数据处理、误差分析。

6. 测量记录

表 3: 利用游标卡尺测量小球的直径 d

测量次数	1	2	3
d/cm	2.21	2.25	2.21

表 4: 利用钢卷尺测量摆线的长度 l

测量次数	1	2	3
l/cm	70.30	70.25	70.30

表 5: n 次全振动的时间 t

测量次数	1	2	3	4	5
n	100	100	100	100	100
t/s	169.91	169.95	169.79	169.79	169.77

7. 分析与讨论

7.1 数据处理

摆线长度 l 的平均值

$$\bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \frac{70.3 + 70.25 + 70.3}{3} \text{ cm} = 70.283 \text{ cm}$$

摆线长度 l 的标准差

$$\begin{aligned} \sigma_l &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2} \\ &= \sqrt{\frac{(70.3 - 70.283)^2 + (70.25 - 70.283)^2 + (70.3 - 70.283)^2}{3-1}} \text{ cm} \\ &= 0.028868 \text{ cm} \end{aligned}$$

摆线长度 l 的 B 类不确定度

$$\Delta_{B,l} = \sqrt{\Delta_{\text{仪}}^2 + \Delta_{\text{估}}^2} = \sqrt{0.2^2 + 0.05^2} \text{ cm} = 0.20616 \text{ cm}$$

摆线长度 l 的展伸不确定度

$$\begin{aligned} U_{L,P} &= \sqrt{\left(t_P \frac{\sigma_l}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(k_P \frac{\Delta_{B,l}}{C}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(4.3 \times \frac{0.028868}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(1.96 \times \frac{0.20616}{3}\right)^2} \text{ cm} \\ &= 0.15257 \text{ cm}, P = 0.95 \end{aligned}$$

摆球直径 d 的平均值

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{22.1 + 22.5 + 22.1}{3} \text{ mm} = 22.233 \text{ mm}$$

摆球直径 d 的标准差

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2} \\ &= \sqrt{\frac{(22.1 - 22.233)^2 + (22.5 - 22.233)^2 + (22.1 - 22.233)^2}{3-1}} \text{ mm} \\ &= 0.23094 \text{ mm} \end{aligned}$$

摆球直径 d 的 B 类不确定度

$$\Delta_{B,d} = 0.02 \text{ mm}$$

摆球直径 d 的展伸不确定度

$$\begin{aligned} U_{d,P} &= \sqrt{\left(t_P \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(k_P \frac{\Delta_{B,d}}{C}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(4.3 \times \frac{0.23094}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(1.96 \times \frac{0.02}{\sqrt{3}}\right)^2} \text{ mm} \\ &= 0.57378 \text{ mm}, P = 0.95 \end{aligned}$$

摆长 L

$$L = d + l = 1.1117 + 70.283 \text{ cm} = 71.395 \text{ cm}$$

摆长 L 的延伸不确定度

$$\begin{aligned} U_{L,P} &= \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial l} U_{l,P}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial d} U_{d,P}\right)^2} \\ &= \sqrt{(1U_{l,P})^2 + (1U_{d,P})^2} \\ &= \sqrt{(1 \times 0.15257)^2 + (1 \times 0.028689)^2} \text{ cm} \\ &= 0.15524 \text{ cm}, P = 0.95 \end{aligned}$$

周期 T 的平均值

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1.6995 + 1.6979 + 1.6979 + 1.6991 + 1.6977}{5} \text{ s} = 1.6984 \text{ s}$$

周期 T 的标准差

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2} \\ &= \sqrt{\frac{(1.6995 - 1.6984)^2 + (1.6979 - 1.6984)^2 + (1.6979 - 1.6984)^2 + (1.6991 - 1.6984)^2 + (1.6977 - 1.6984)^2}{5-1}} \text{ s} \\ &= 0.00081976 \text{ s} \end{aligned}$$

周期 T 的 B 类不确定度

$$\Delta_{B,T} = \sqrt{\Delta_{\text{仪}}^2 + \Delta_{\text{估}}^2} = \sqrt{0.0001^2 + 0.002^2} \text{ s} = 0.0020025 \text{ s}$$

周期 T 的展伸不确定度

$$\begin{aligned} U_{T,P} &= \sqrt{\left(t_P \frac{\sigma_T}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(k_P \frac{\Delta_{B,T}}{C}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(2.78 \times \frac{0.00081976}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(1.96 \times \frac{0.0020025}{3}\right)^2} \text{ s} \\ &= 1.6584 \times 10^{-3} \text{ s}, P = 0.95 \end{aligned}$$

重力加速度 g

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4 \times \pi^2 \times 0.71395}{1.6984^2} \text{ m/s}^2 = 9.771 \text{ m/s}^2$$

重力加速度 g 的延伸不确定度

$$\begin{aligned} U_{g,P} &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial L} U_{L,P}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} U_{T,P}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} U_{L,P}\right)^2 + \left(-\frac{8\pi^2 L}{T^3} U_{T,P}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4 \times \pi^2}{1.6984^2} \times 0.0015524\right)^2 + \left(-\frac{8 \times \pi^2 \times 0.71395}{1.6984^3} \times 0.0016584\right)^2} \text{ m/s}^2 \\ &= 0.028557 \text{ m/s}^2, P = 0.95 \end{aligned}$$

重力加速度 g 最终结果

$$g = (9.771 \pm 0.029) \text{ m/s}^2$$

7.2 实验讨论

查阅资料可知，合肥当地的重力加速度值为 $g = 9.7947 \text{ m/s}^2$ ，所求结果与真实值相比略小。对于误差的分析见思考题。

7.3 思考题

分析误差的来源，提出改进的方法；

1. 摆动过程中有空气阻力的影响：可以减小摆角从而降低小球速度；并且可以选用体积更小、密度更大的刚性小球。
2. 人工计时的随机误差：增加测量的周期数，增加摆长从而增大周期，减小计时误差；或者采用视频追踪软件辅助计时。
3. 实验者释放摆球时难以做到完全无初速度释放：由另一位实验者在一旁观察，尽量使摆球垂直于水平面释放。

8. 致谢

感谢中国科学技术大学物理实验教学中心和浦其荣老师!

9. 附录

原始实验数据