

测试样题（测量不确定度的评定）

题目：

现有一金属圆柱体，用千分尺测量其直径 D ，用游标卡尺测量其高 H ，用物理天平称量其质量 m ，测量数据见表1。圆柱体的密度 ρ 可表示为： $\rho = \frac{4m}{\pi D^2 H}$ ，请计算该金属圆柱体密度 ρ 及其在置信概率 $P=0.95$ 时的不确定度 u_ρ 。

已知千分尺的仪器允差为 0.004 mm，属于正态分布；游标卡尺的仪器允差为 0.02 mm，属于均匀分布；物理天平的仪器允差为 0.04 g，属于正态分布。

表 1. 金属圆柱体的直径 D 、高 H 和质量 m 。

D/mm	10.502	10.488	10.516	10.480	10.495	10.470
H/mm	20.00	20.02	19.98	20.00	20.00	20.02
m/g	14.00	14.02	13.98			

表 2. t_p 与测量次数 n 的关系

$P / t_p / n$	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
0.68	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1
0.90	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.86	1.83	1.76	1.65
0.95	4.30	3.18	2.78	2.57	2.46	2.37	2.31	2.26	1.96
0.99	9.93	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	2.58

表 3. 几种常见仪器的误差分布与置信系数

仪器	米尺	游标卡尺	千分尺	物理天平	秒表
误差分布	正态	均匀	正态	正态	正态
置信系数 C	3	$\sqrt{3}$	3	3	3

表 4. 三种分布下置信因子 k_p 下与置信概率 P 的关系

P	0.500	0.577	0.650	0.683	0.950	0.997
k_p (正态分布)	0.675			1.000	1.960	3.000
k_p (均匀分布)	0.866	1.000		1.183	1.645	1.727
k_p (三角分布)	0.717	0.862	1.000	1.064	1.901	2.315

解答:

1. 求直径的不确定度

直径的平均值 $\bar{D} = 10.4918 \text{ mm}$, 标准差 $\sigma_D = 0.016 \text{ mm}$

$$u_D = \sqrt{\left(t_P \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(k_P \frac{\Delta_B}{C}\right)^2} = \sqrt{\left(2.57 \times \frac{0.016}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(1.96 \times \frac{0.004}{3}\right)^2} = 0.017 \text{ mm}$$

$$D = \bar{D} \pm u_D = (10.492 \pm 0.017) \text{ mm} \quad (P = 0.95)$$

2. 求高的不确定度

高的平均值 $\bar{H} = 20.003 \text{ mm}$, 标准差 $\sigma_H = 0.015 \text{ mm}$

$$u_H = \sqrt{\left(t_P \frac{\sigma_H}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(k_P \frac{\Delta_B}{C}\right)^2} = \sqrt{\left(2.57 \times \frac{0.015}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(1.645 \times \frac{0.02}{\sqrt{3}}\right)^2} = 0.025 \text{ mm}$$

$$H = \bar{H} \pm u_H = (20.003 \pm 0.025) \text{ mm} \quad (P = 0.95)$$

3. 求质量的不确定度

质量的平均值 $\bar{m} = 14.00 \text{ g}$, 标准差 $\sigma_m = 0.02 \text{ g}$

$$u_m = \sqrt{\left(t_P \frac{\sigma_m}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(k_P \frac{\Delta_B}{C}\right)^2} = \sqrt{\left(4.3 \times \frac{0.02}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(1.96 \times \frac{0.04}{3}\right)^2} = 0.06 \text{ g}$$

$$m = \bar{m} \pm u_m = (14.00 \pm 0.06) \text{ mm} \quad (P = 0.95)$$

4. 求不确定度传递公式。

$$\rho = \frac{4m}{\pi D^2 H}$$

取对数

$$\ln \rho = \ln \frac{4}{\pi} + \ln m - 2 \ln D - \ln H$$

求微分

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm}{m} - 2 \frac{dD}{D} - \frac{dH}{H}$$

系数取绝对值、把微分符号改成不确定度符号, 再写成平方和的形式

$$\frac{u_\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{u_m}{m}\right)^2 + \left(2 \frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{u_H}{H}\right)^2}$$

5. 求金属圆柱体的密度及不确定度。

$$\rho = \frac{4m}{\pi D^2 H} = \frac{4 \times 14.00}{3.1416 \times 10.492^2 \times 20.003} \text{ g/mm}^3 = 8.095 \times 10^{-3} \text{ g/mm}^3$$

$$= 8.095 \text{ g/cm}^3$$

$$\frac{u_\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{u_m}{m}\right)^2 + \left(2 \frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{u_H}{H}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0.06}{14.00}\right)^2 + \left(2 \times \frac{0.017}{10.492}\right)^2 + \left(\frac{0.025}{20.003}\right)^2}$$

=0.0055

$$u_{\rho} = 8.095 \times 0.0055 \text{ g/cm}^3 = 0.044 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho = (8.095 \pm 0.044) \text{ g/cm}^3 \quad (P = 0.95)$$