接下来：

不确定度分析

5 测量的不确定度

测量的概念和常用词汇

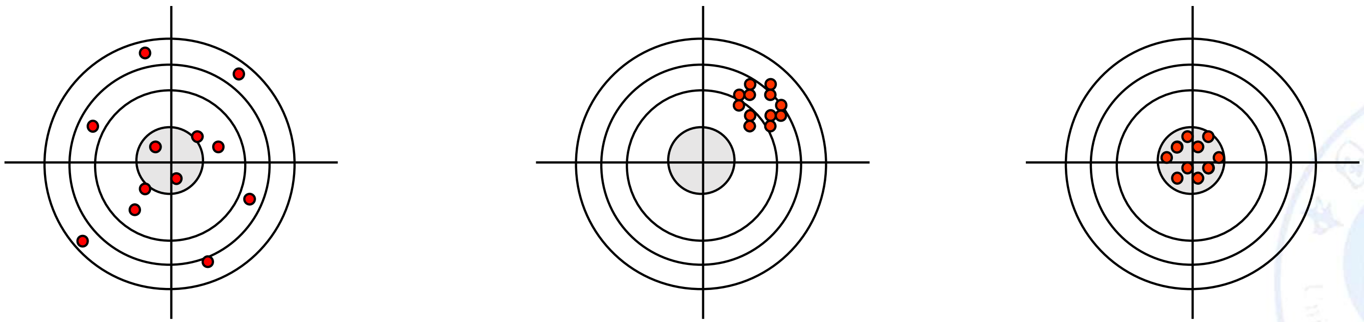
- 测量
  – 直接测量：长度、质量、时间等
  – 间接测量：重力加速度、速度等
  – 等精度测量：同人、同法、同仪器、同条件下对同一物理量进行多次测量
  – 真值：物理量的真实值 （一般不知道）
- 测量误差 = 测量值 - 真值

测量的正确度、精密度和精确度

正确度：测量值与真值的接近程度。反映测量结果系统误差大小的术语。

精密度：重复测量所得测量结果相互接近的程度。反映测量结果随机误差大小的术语。

精确度：综合评定测量结果的重复性和接近真值的程度。反映随机误差和系统误差的综合效果。



正确度高
精密度低

精密度高
正确度低

精密度、正确度
精确度均高

测量误差的来源

- 方法误差

  测量方法或测量原理本身所引起的

- 仪器误差

  测量设备或仪器本身固有的各种因素的影响

- 环境误差

  周围环境的影响

- 主观误差

  测量操作人员素质的影响

误差的类别

- 系统误差
  - 公式近似
  - 仪器结构不完善
  - 生理、心理因素
- 随机误差
  - 环境振动，热起伏，空气扰动，电磁场干扰，气压及湿度的变化等因素以及它们的综合影响。具有随机性。

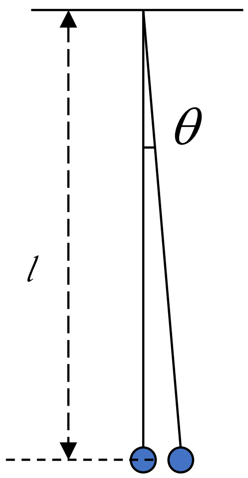
方法误差：公式近似

➢ 单摆周期公式： $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}+\cdots\right)} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}A}$$

$A = 1 \quad (\theta = 0°)$

$A = 1.0005 \quad (\theta = 5°)$

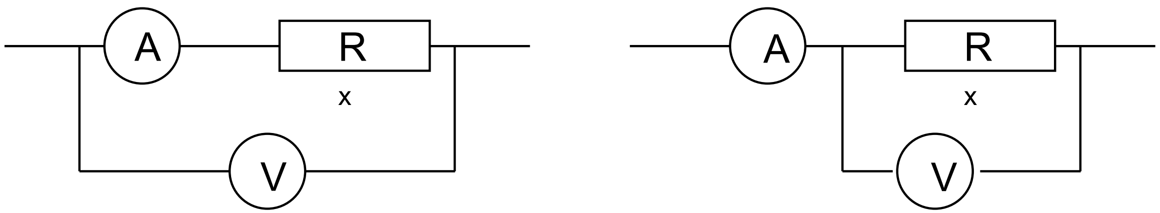


➢ 绝热系统：补偿法

方法误差：公式近似

➢ 伏安法测电阻

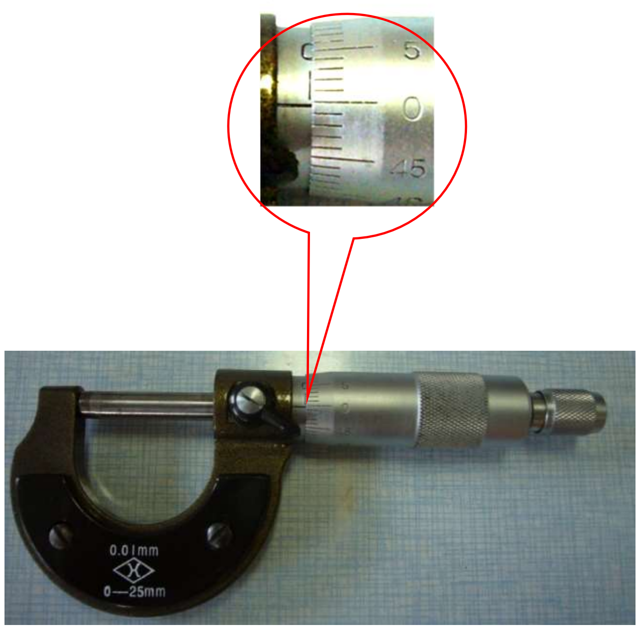
- 内接法 $R_x > \sqrt{R_A \cdot R_V}$
- 外接法 $R_x < \sqrt{R_A \cdot R_V}$

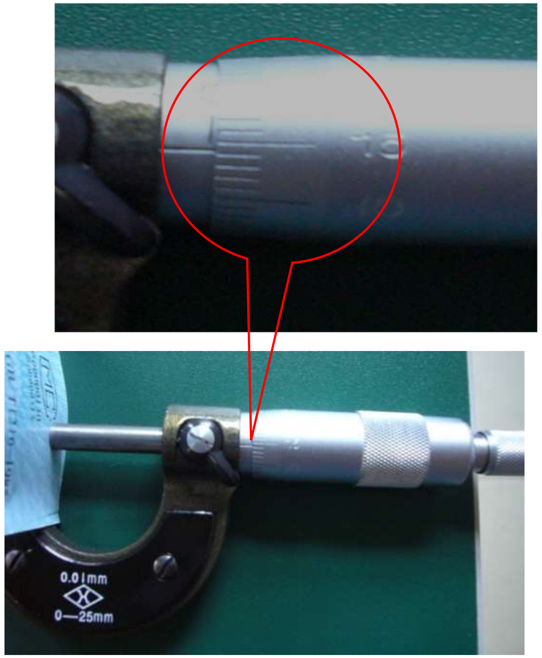


合理选择可减小电表内阻引入的误差

仪器误差：仪器结构不完善

- 螺旋测微计零点不准确　　(零点校准)　　$l = l_1 - l_0$





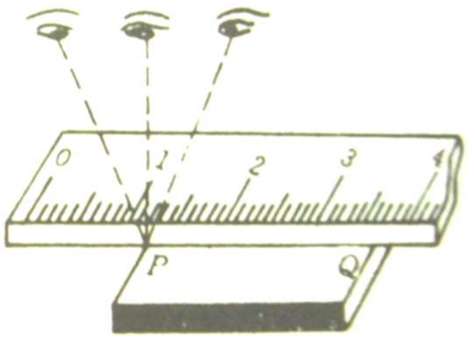
仪器误差：仪器结构不完善

➤天平不等臂 (交换测量) $m=\sqrt{m_1\cdot m_2}$

主观误差：生理、心理因素

按钮超前、滞后

斜视



随机误差

随机误差也称为偶然误差，是由于在测定过程中一系列有关因素微小的随机波动而形成的具有相互抵偿性的误差。

其产生的原因是分析过程中种种不稳定随机因素的影响，如室温、相对湿度和气压等环境条件的不稳定，环境振动和电磁场的干扰，分析人员操作的微小差异以及仪器的不稳定等。

单次测量的随机误差没有规律，但多次测量的随机误差却服从统计规律，通过对测量数据的统计处理，能在理论上估计其对测量结果的影响。

从误差到不确定度

测量误差 = 测量值-真值

一般不知道!!

$$X = x \pm \Delta x$$

如何描述？

测量误差 → 测量的不确定度

$$X = x \pm U_p$$

不确定度U_p：代表测量值x不确定的程度，也是对测量误差的可能值的测度，对待测真值可能存在的范围的估计。

不确定度的分类

A类不确定度：

由观测列统计分析评定，也称统计不确定度（多次等精度测量）。

B类不确定度：

不按统计分析评定，也称非统计不确定度。

A类不确定度的评定

USTC

测量列：

对物理量X做n次等精度测量，得到包含n个测量值$x_1, x_2,\ldots, x_n$的一个测量列。

测量列的平均值：

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

平均值为最佳值，也称期望值，是最可靠的。

测量列的标准差：

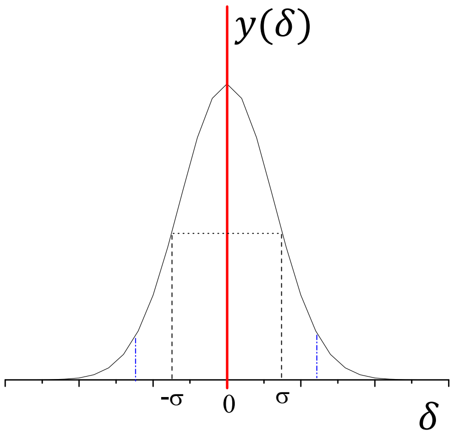
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

当测量次数足够多时，测量列中任一测量值与平均值的偏离落在[-σ,σ]区间的概率为68.3%。

高斯分布

当n趋于∞时，物理量X的质量指标δ（$\delta = x - \bar{x}$）的概率密度分布为高斯函数。

$$y(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}$$



正态分布曲线

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} Y(\delta) d\delta = 0.683$$

$$\int_{-2\sigma}^{2\sigma} Y(\delta) d\delta = 0.954$$

$$\int_{-3\sigma}^{3\sigma} Y(\delta) d\delta = 0.997$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(\delta) d\delta = 1$$

高斯分布（或正态分布）的特点：

- 对称性
- 单峰性
- 有界性
- 抵偿性

3σ判据：

测量次数无限多时，测量误差的绝对值大于3σ的概率仅为0. 3%。对于有限次测量，这种可能性是微乎其微，因此可以认为是测量失误，应予以剔除。

测量列的A类标准不确定度

算术平均值的标准差：$u_A = \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}$

u_{A}为测量列的A类标准不确定度。

对正态分布：

$$P\left(X \in \left[\overline{x} - u_A, \overline{x} + u_A\right]\right) = 0.683$$

$$P\left(X \in \left[\overline{x} - 2u_A, \overline{x} + 2u_A\right]\right) = 0.954$$

$$P\left(X \in \left[\overline{x} - 3u_A, \overline{x} + 3u_A\right]\right) = 0.997$$

有限次测量的情况和 t因子

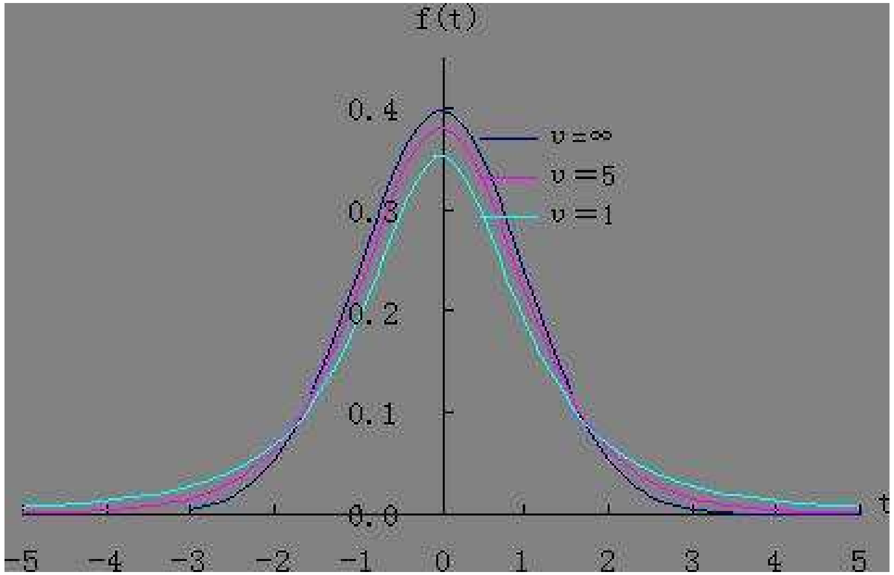
t分布：当测量次数有限时，概率密度曲线变得平坦，成为t分布。

t分布下的A类标准不确定度

为获得相同的置信概率，需扩大置信区间。

$$u_t = t_p u_A$$

$$\left[-t_p u_A , t_p u_A \right]$$



t分布与正态分布比较

t_p与测量次数n的关系

n/t/p	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
0.68	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1
0.90	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.86	1.83	1.76	1.65
0.95	4.30	3.18	2.78	2.57	2.46	2.37	2.31	2.26	1.96
0.99	9.93	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	2.58

B类不确定度的评定

B类不确定度：测量中不符合统计规律的不确定度。

- 测量仪器的最大允差
- 测量的估计误差

仪器的最大允许偏差 $\Delta_{仪}$

- 包含了仪器的系统误差，也包含了环境以及测量者自身可能出现的变化（具随机性）对测量结果的影响。
- 最大允差可从仪器说明书中得到，它表征同一规格型号的合格产品，在正常使用条件下，可能产生的最大误差。
- 测量值与真值的误差在$[-\Delta_{仪}, \Delta_{仪}]$范围内的置信概率为1。
- 一般而言，为仪器最小刻度所对应的物理量的数量级（但不同类型的仪器差别很大）。

常用仪器的最大允差

- 钢卷尺：1m/1mm ±0.8mm；2m/1mm ±1.2mm
- 游标卡尺：125mm/0.02mm ±0.02mm
  300mm/0.02mm ±0.05mm
- 螺旋测微器：25mm/0.01mm ±0.004mm

- 指针电表级别：5.0、2.0、1.5、1.0、0.5、0.2、0.1等
- 指针电表：量程×级别%
- 数字电表：读数×C%+稳定显示后一位的几个单位

常用仪器的最大允差

电阻箱：

ZX38p/11 型交直流电阻箱

标准代号：JB/T10057-1999、JB/T8225-1999 ⊓ ☆2 15···20···25℃

盘　名	X10kΩ	X1kΩ	X100Ω	X10Ω	X1Ω	X0.1Ω
准确度等级指数	0.1	0.1	0.1	0.2	1	2
测试电流	4mA	45mA	45mA	140mA	450mA	450mA
时间常数（μS）	<1	<0.1	<0.1	<0.1	<1	——

0···0.2···0.5W　　R_0=20mΩ±10mΩ　　L_0=2μH

色环电阻：

■ 最后一环表示误差，常用有：银色（10%）、金色（5%）、棕色（1%）。

贴片电阻：

■ 阻值误差精度常用的是±1%和±5%

■ ±5%精度的常用3位数来表示

103代表10 KΩ（±5%）

■ ±1%精度的常用4位数来表示

量程对最大允差的影响

模拟式仪表： $\Delta_{仪}$=量程×级别%

量程为100 V的1.0级电压表，测量一个电池的电动势为1.5 V。则仪表的最大允差为1.0 V。若量程为10V，则降低到0.1 V。

数字式仪表： $\Delta_{仪}$=读数×**C%** + 稳定显示后一位的几个单位

某精度为1.0级的三位半电表，用20.00 V量程测量电池电动势，读数为1.50 V。按其说明书，C为1，假设末位数字跳动5个单位，则测量结果的最大允差为：

(0.015+0.05) =0.065 V。

若改用2.000 V量程，则为（0.015+0.005）= 0.020 V。

测量的估计误差

一般情况 $\Delta_{估}<\Delta_{仪}$

模拟式仪表： $\Delta_{估}$<最小分度的一半

数字式仪表： $\Delta_{估}=0$

特殊情况 $\Delta_{估}>\Delta_{仪}$

- 秒表计时的估计误差（开始和结束的判断），$\Delta_{估}=0.2$ s 远大于$\Delta_{仪}=0.01$ s
- 难以将被测物两端与测量仪器的刻线对齐（实验装置原因）
- 几何光学实验中测量光学元件间距（暗室）

➢B类不确定度的最大值

$$\Delta_B = \sqrt{\Delta_{仪}^{\ 2} + \Delta_{估}^{\ 2}}$$

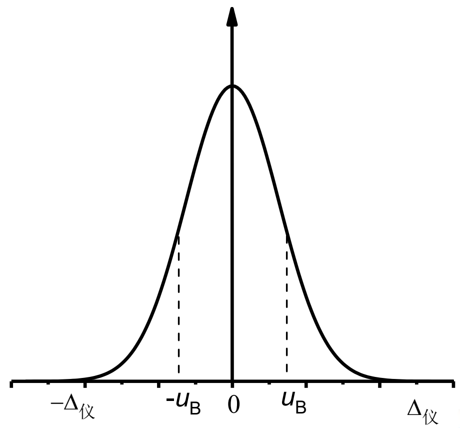
如果一个分量小于另一个分量的三分之一，可以忽略较小的分量，通常取Δ_B等于$\Delta_{仪}$。

➢B类标准不确定度

$$u_B = \frac{\Delta_B}{C}$$

正态分布：$C = 3$

$[-u_B, u_B]$，$P = 0.68$

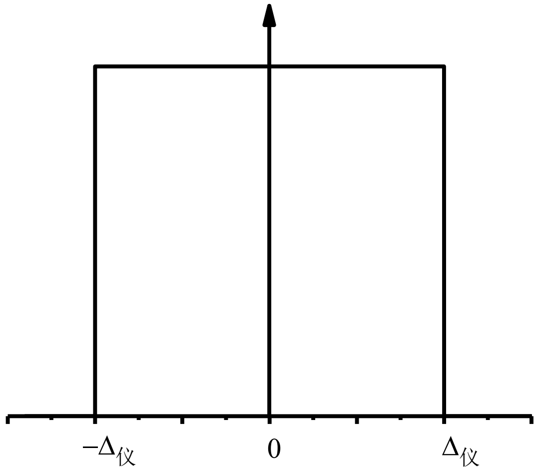


正态分布

均匀分布与三角分布

均匀分布：$C=\sqrt{3}$

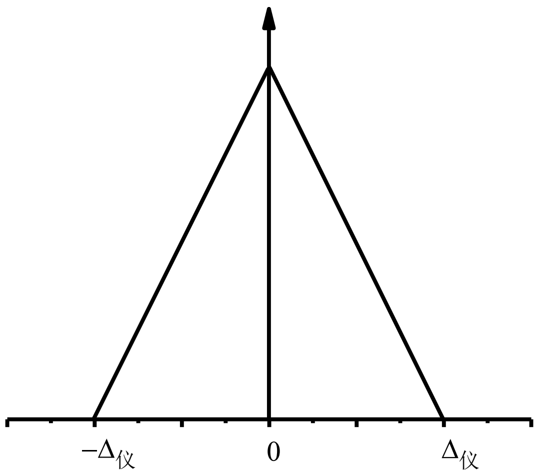
$[-u_B, u_B]$，$P=0.58$



均匀分布

三角分布：$C=\sqrt{6}$

$[-u_B, u_B]$，$P=0.65$



三角分布

几种常见仪器的误差分布与置信系数

仪器	米尺	游标卡尺	千分尺	物理天平	秒表
误差分布	正态	均匀	正态	正态	正态
置信系数C	3	$\sqrt{3}$	3	3	3

不同置信概率下的B类不确定度

不同置信概率下的B类不确定度： $k_P \frac{\Delta_B}{C}$

三种分布下置信概率P与置信因子k_p的关系

k_p \ P	0.500	0.577	0.650	0.683	0.900	0.950	0.955	0.990	0.997
正态分布	0.675			1.000	1.650	1.960	2.000	2.580	3.000
均匀分布	0.877	1.000		1.183	1.559	1.645	1.654	1.715	1.727
三角分布	0.717	0.862	1.000	1.064	1.675	1.901	1.929	2.204	2.315

不确定度的合成

合成标准不确定度

$$U=\sqrt{u_A{}^2+u_B{}^2}$$ （A类不确定度和B类不确定度是相互独立的）

有限次测量情况下，t 因子修正后有（P=0.68）

$$U_{0.68}=\sqrt{\left(\mathrm{t}_{0.68}u_A\right)^2+u_B{}^2}$$

展伸不确定度

展伸不确定度：增大置信概率的不确定度，也叫扩展不确定度

$$U_{\mathrm{P}}=\sqrt{\left(\mathrm{t_P}u_A\right)^2+\left(\mathrm{k_P}\Delta_{\mathrm{B}}/\mathrm{C}\right)^2}$$

相同置信概率的A、B类不确定度才可以按平方和来合成

$$U_{0.95}=\sqrt{\left(\mathrm{t}_{0.95}u_A\right)^2+\left(\frac{k_{0.95}\Delta_{\mathrm{B}}}{C}\right)^2}$$

$$U_{0.99}=\sqrt{\left(\mathrm{t}_{0.99}u_A\right)^2+\left(\frac{k_{0.99}\Delta_{\mathrm{B}}}{C}\right)^2}$$

测量结果的最终表达式

$$X = \left(\overline{x} \pm U_{0.95}\right) \text{ 单位} \qquad (P=0.95)$$

也可以用相对不确定度的形式表示

$$X = \overline{x}(1 \pm U_{\mathrm{r}}) \text{ 单位}， \quad U_{\mathrm{r}} = \frac{U_{0.95}}{\overline{x}} \times 100\%$$

如果没有标明置信水平，一般默认P=0.95。

不确定度评定实例

用千分尺测量一个球的直径D，测量了10次，结果如下表，求该球的直径及其不确定度。

D/mm	12.337	12.349	12.333	12.353	12.339	12.352	12.345	12.348	12.356	12.340

解：

平均值：$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i = 12.345\,\mathrm{mm}$　　标准差：$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2}{n-1}} = 0.008\,\mathrm{mm}$

千分尺最大允差：　$\Delta_B = 0.004\ \ \mathrm{mm}$

查表 $n = 10$，$\mathrm{P} = 0.95$ 时：$t_{\mathrm{p}}=2.26, k_{\mathrm{p}}=1.96$

$$U_{0.95} = \sqrt{\left(\mathrm{t}_{0.95}\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{k_{0.95}\Delta_{\mathrm{B}}}{C}\right)^2} = \sqrt{\left(2.26\times\frac{0.008}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(1.96\times\frac{0.004}{3}\right)^2} = 0.007\,\mathrm{mm}$$

测量结果最终表示为

$$D = (12.345 \pm 0.007)\,mm \qquad (P = 0.95)$$

不确定度的传递

间接测量物理量：

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

如果x_1、x_2、…、x_n 为相互独立的直接测量的量，则有

$$U_P^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u_P^2(x_i)$$

$u_p(x_i)$为直接测量量x_i在置信概率为P时的不确定度。

求不确定度传递公式的流程

1. 对函数求全微分（对加减法），或先取对数再求全微分（对乘除法）；
2. 合并同一分量的系数。合并时，有的项可以相互抵消，从而得到最简单的形式；
3. 系数取绝对值；
4. 将微分符号变为不确定度符号；
5. 求平方和。

以上是操作过程，不是数学推导。所谓“不确定度符号”，可以指各直接测量量的最大允差、标准差或合成不确定度等，但同一式中必须性质相同，具有相同的置信概率。这样，间接测量结果的置信概率不变。

求不确定度传递公式实例

用流体静力称衡法测固体密度，公式为

$$\rho = \frac{m}{m - m_1} \rho_0$$

求测量结果的不确定度表达式。

解： 两边取对数得：$\ln \rho = \ln m + \ln \rho_0 - \ln(m - m_1)$

求全微分得：

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm}{m} + \frac{d\rho_0}{\rho_0} - \frac{d(m - m_1)}{m - m_1}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm}{m} + \frac{d\rho_0}{\rho_0} - \frac{dm}{m - m_1} + \frac{dm_1}{m - m_1}$$

求不确定度传递公式实例

合并同类项：
$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{-m_1 dm}{m(m-m_1)}+\frac{d\rho_0}{\rho_0}+\frac{dm_1}{m-m_1}$$

系数取绝对值并改成不确定度符号：

$$\frac{u_\rho}{\rho}=\left|\frac{m_1}{m(m-m_1)}\right|u_m+\left|\frac{1}{\rho_0}\right|u_{\rho_0}+\left|\frac{1}{m-m_1}\right|u_{m_1}$$

求平方和：
$$\left(\frac{u_\rho}{\rho}\right)^2=\left[\frac{m_1}{m(m-m_1)}u_m\right]^2+\left[\frac{1}{\rho_0}u_{\rho_0}\right]^2+\left[\frac{1}{m-m_1}u_{m_1}\right]^2$$

$$\frac{u_\rho}{\rho}=\sqrt{[\frac{m_1}{m(m-m_1)}]^2u_m^2+\frac{u_{\rho_0}^2}{\rho_0^2}+(\frac{1}{m-m_1})^2u_{m_1}^2}$$

常用函数不确定度传递公式

USTC

函数表达式	传递（合成）公式
$W = x \pm y$	$U_x = \sqrt{U_x^2 + U_y^2}$
$W = x \cdot y$	$\frac{U_W}{W} = \sqrt{(\frac{U_x}{x})^2 + (\frac{U_y}{y})^2}$
$W = \frac{x}{y}$	$\frac{U_W}{W} = \sqrt{(\frac{U_x}{x})^2 + (\frac{U_y}{y})^2}$
$W = \frac{x^k y^n}{z^m}$	$\frac{U_W}{W} = \sqrt{k^2(\frac{U_x}{x})^2 + n^2(\frac{U_y}{y})^2 + m^2(\frac{U_z}{z})^2}$
$W = kx$	$U_W = kU_x,\quad \frac{U_W}{W} = \frac{U_x}{x}$
$W = k\sqrt{x}$	$\frac{U_W}{W} = \frac{1}{2}\frac{U_x}{x}$
$W = \sin x$	$U_W = \lvert\cos x\rvert U_x$
$W = \ln x$	$U_W = \frac{U_x}{x}$

最大不确定度的合成（仅用于实验设计！）

在很多情况下，往往只需粗略估计不确定的大小，可采用较为保守的线性(算术)合成法则。

函数式

$$w = f(x, y, z, \ldots)$$

最大不确定度

$$\Delta w = |\frac{\partial f}{\partial x}| \cdot \Delta x + |\frac{\partial f}{\partial y}| \cdot \Delta y + |\frac{\partial f}{\partial z}| \cdot \Delta z + \cdots$$

$$\frac{\Delta w}{w} = |\frac{\partial \ln f}{\partial x}| \cdot \Delta x + |\frac{\partial \ln f}{\partial y}| \cdot \Delta y + |\frac{\partial \ln f}{\partial z}| \cdot \Delta z + \cdots$$

常用函数的最大不确定度算术合成公式

USTC

物理量的函数式	最大不确定度	相对不确定度
$W = x + y + z + \cdots$	$\Delta x + \Delta y + \Delta z + \cdots$	$\dfrac{\Delta x + \Delta y + \Delta z + \cdots}{x + y + z + \cdots}$
$W = x \pm y$	$\Delta x + \Delta y$	$\dfrac{\Delta x + \Delta y}{x \pm y}$
$W = kx$ （k为常数）	$k\Delta x$	$\dfrac{\Delta x}{x}$
$W = xy$	$x\Delta y + y\Delta x$	$\dfrac{\Delta x}{x} + \dfrac{\Delta y}{y}$
$W = x^n, (n = 1,2,3,\cdots)$	$nx^{n-1}\Delta x$	$n\dfrac{\Delta x}{x}$
$W = \dfrac{x}{y}$	$\dfrac{y\Delta x + x\Delta y}{y^2}$	$\dfrac{\Delta x}{x} + \dfrac{\Delta y}{y}$
$W = \sin x$	$\cos x\, \Delta x$	$\cot x\, \Delta x$
$W = \tan x$	$\dfrac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\dfrac{2\Delta x}{\sin 2x}$
$W = \ln x$	$\dfrac{\Delta x}{x}$	$\dfrac{\Delta x}{x \ln x}$

不确定度分析的意义

- 不确定度表征测量结果的可靠程度，反映测量的精密度。

  小球直径：（12.345±0.006）cm　[12.339,12.351]　P=0.68

  最大偏差：±0.018 cm　P=1

- 根据对测量不确定度的要求设计实验方案，选择仪器和实验环境。

- 通过对不确定度大小及其成因的分析，找到影响实验精确度的原因并加以校正。

  氢同位素的发现

氢同位素的发现

1913年纽约大学的科学家对纯水密度做了非常精密的测量，他们在报告中指出测量的不确定度为$2X10^{-7}g/cm^3$，而精制出的各种水样品的密度差不多有$8X10^{-7}g/cm^3$的变化，他们得出了各种纯水的密度是不一样的这一结论。这是证明同位素存在的最早的实验证据，引导科学家最终发现了氢的同位素氘和氚。

不确定度均分原理

在间接测量中，每个独立测量量的不确定度都会对最终结果的不确定度有贡献。如果已知各测量量之间的函数关系，可写出不确定度传递公式，并按均分原理，将测量结果的总不确定度均匀分配到各个分量中，由此分析各物理量的测量方法和使用的仪器，指导实验。

一般而言，这样做比较经济合理，对测量结果影响较大的物理量，应采用精确度较高的仪器，而对测量结果影响不大的物理量，就不必追求过高精度仪器。

测量圆柱体体积的例子

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 h \qquad D = 8mm; h = 32mm; \qquad 要求: \frac{\Delta V}{V} \le 0.5\%$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{2\Delta D}{D} + \frac{\Delta h}{h}$$

$$\frac{2\Delta D}{D} \le 0.25\%$$

$$\frac{\Delta h}{h} \le 0.25\%$$

$$\Delta D \le 0.01mm$$

$$\Delta h \le 0.08mm$$

游标卡尺：125mm/0.02mm，$\Delta_{仪}$=0.02 mm

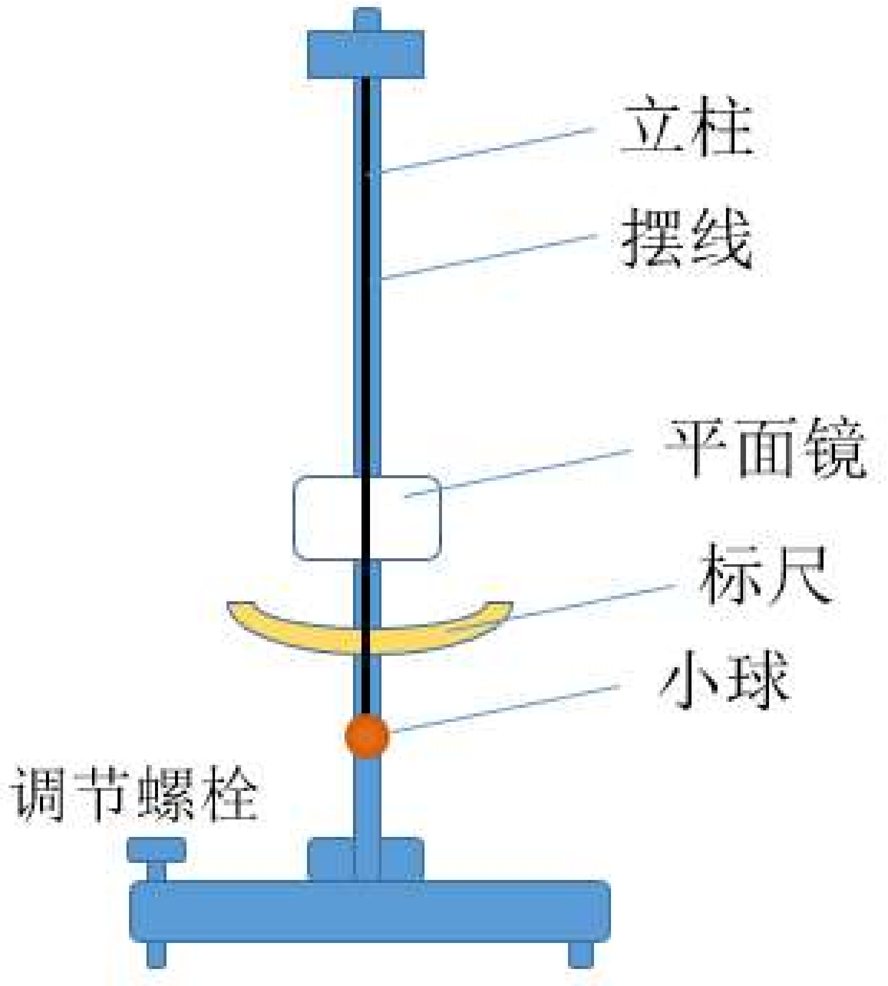
300mm/0.02mm，$\Delta_{仪}$= 0.05 mm

螺旋测微器：25mm/0.01mm，$\Delta_{仪}$= 0.004 mm

高*h*用游标卡尺测量

直径*D*用螺旋测微器测量

单摆法测重力加速度



单摆结构示意图

单摆实物图

单摆实验原理

线的质量<<小球的质量

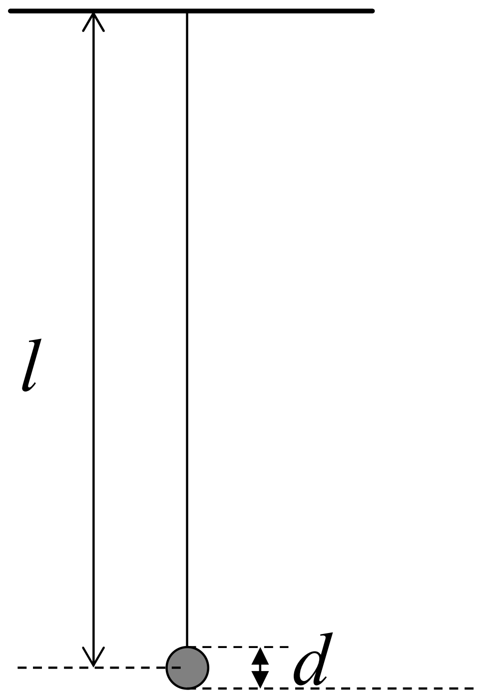
球的直径<<线的长度

忽略：空气阻力、浮力、线的伸长

近似：小摆角作简谐振动

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \left(\frac{\Delta g}{g} < 1.0\%\right)$$

无质量细线系一质点

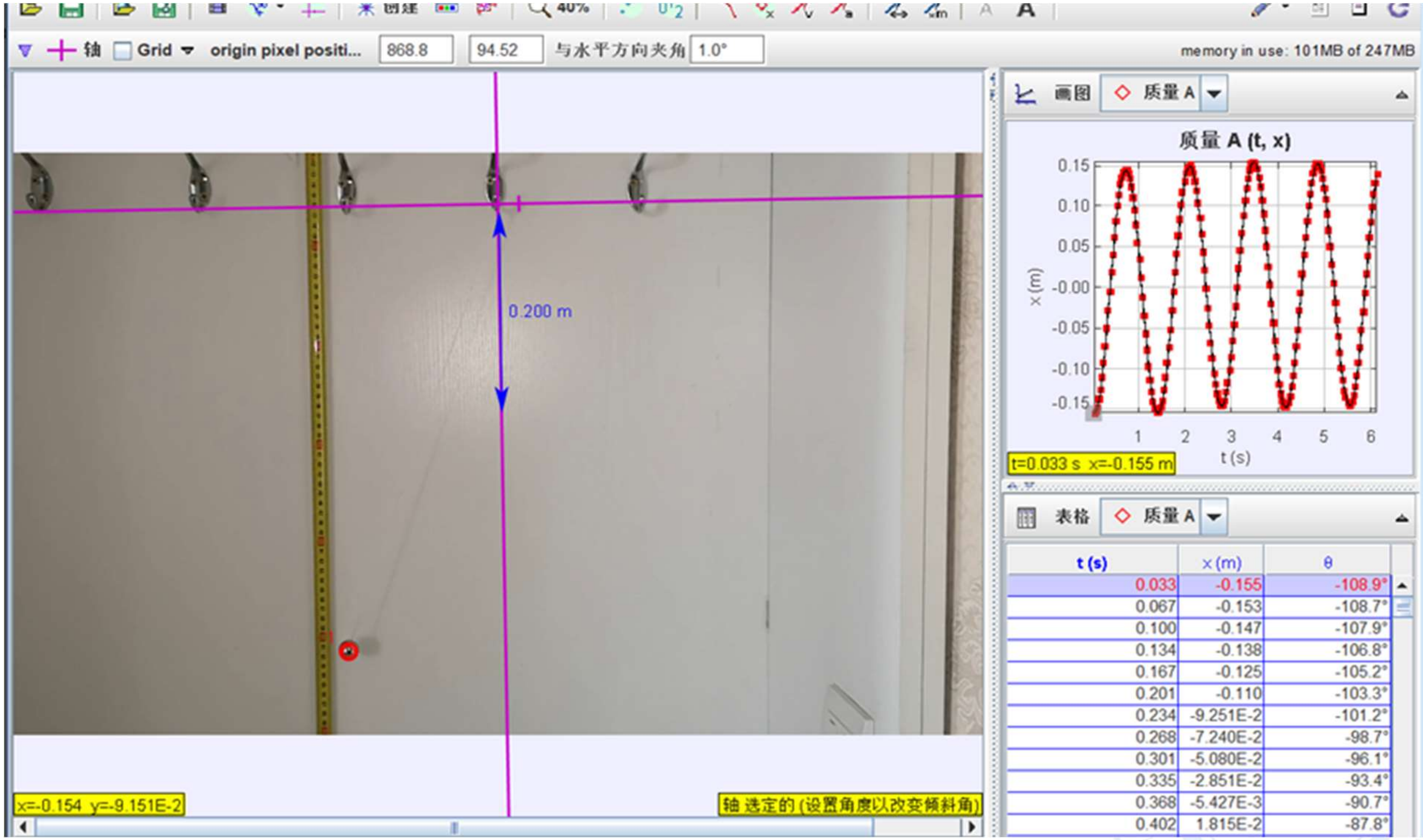


实验方案设计

- 利用不确定度均分原理设计的过程（$\Delta g/g<1\%$）
- 摆长至少需要多长？增加摆长是否可以提高测量精度？
- 摆长用什么仪器测量？需要用游标卡尺测量摆球直径吗？
- 至少需要测多少个周期？

单摆实验拓展

用 Tracker软件追踪摆球运动轨迹，测量重力加速度。



注：仅供有兴趣的同学选做。

单摆实验拓展

视频追踪软件 Tracker及使用简介下载地址：

https://jxzy.ustc.edu.cn/show_notice.aspx?id=216

首页 >> 通知公告

线上物理实验软件工具

2020-3-23

phyphox（手机物理工坊）软件及使用简介：

1. phyphox（手机物理工坊）APP(Android版)(注：请大家下载解压后安装)
2. 手机物理工坊APP使用简介 PPT

视频追踪软件 Tracker及使用简介：

1. 视频追踪软件 Tracker-5.1.3（Windows版）
2. 视频追踪与Tracker的使用 PPT
3. 影像追踪分析软件Tracker教程01
4. 影像追踪分析软件Tracker教程02
5. 影像追踪分析软件Tracker教程03

电子节拍器：

1. 电子节拍器

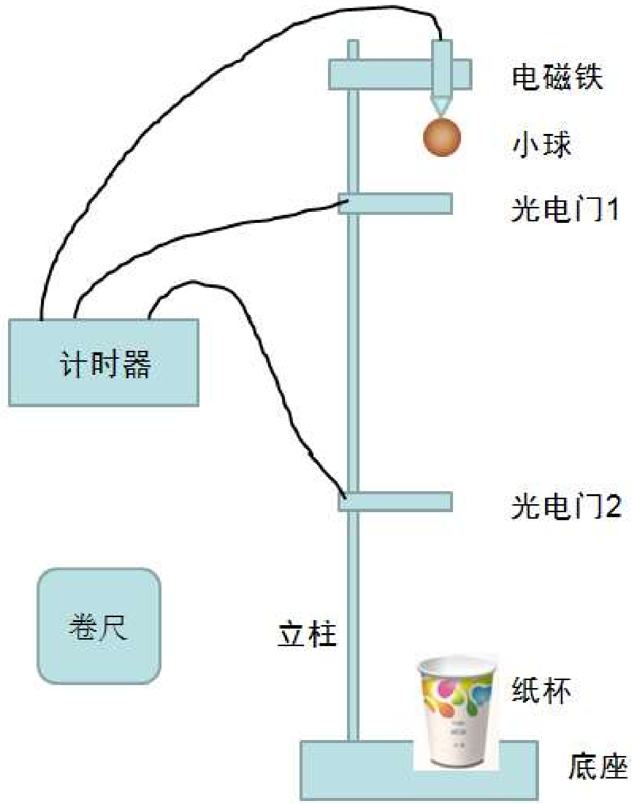
自由落体法测重力加速度

- 从起点开始下落距离不易测准

  下落的起始和终止位置不明确

- 从起点开始下落时间不易测准

  由于电磁铁有剩磁，因此小球下落的初始时间不准确



实验装置结构示意图

下周先上绪论课（）

再完成预备实验（查看预约选课系统安排）。

预备实验预习内容及要求：

- 从预约选课系统下载《重力加速度的测量》讲义，预习实验内容：“自由落体法测重力加速度”、“单摆法测重力加速度”。
- 请参考讲义附件“不确定度均分原理”写一份《单摆法测重力加速度》的实验方案设计（15分）。

实验方案设计在实验前提交；
没有设计实验方案不能做实验！

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

感谢观看！