May 9, 2018

Dear Carmona,

The argument I had in mind at the end of my letter of May 6 was flawed, and that one can have a counterexample as proposed when restricting to $\dim(V) \leq 2$ is doubtful. However, I found a much simpler argument to disproof the claim page 3 of Grothendieck's letter [About the '0' at the end of (*) page 2, <u>if</u> one reads as I did the Ext and Hom as global Ext and Hom, it is false, but for local Ext and Hom I don't know]

As topos, one takes $BGL(V)$, either the topologist classifying space, or the classifying topos, where V is a vector space of dimension d over $\mathbb{F}_2$. As sheaves M and N one takes V, and as map $M \to N$ one takes the identity. A commutative Picard stack $\mathcal{T}$ on this topos, with $\pi_0(\mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} V$, $\pi_1(\mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} V$ ~~and the inv~~ is then the "same" as a $GL(V)$-equivariant Picard category for which π_0 and π_1 are given as isomorphic to the representation V of $GL(V)$.

<u>Claim</u> If one requires that the invariant $\pi_0(\mathcal{T}) \longrightarrow {}_2\pi_1(\mathcal{T}) = \pi_1(\mathcal{T})$ be the identity of V, then, for $d \geq 4$, no such $GL(V)$-equivariant $\mathcal{T}$ exists

<u>Construction</u> : attaching to a commutative Picard category an extension E of ~~$\pi_0(T)/2$~~ ${}_2\pi_0(T)$ by $\pi_1(T)/2$.

E is the set of isomorphism classes of pairs (X, ε) : X object of T and $\varepsilon : X \otimes X \xrightarrow{\sim} \text{unit } 1$.

Group law : to (X, ε) and (Y, η) attach $X \otimes Y$ and $\varepsilon\eta : (X \otimes Y) \otimes (X \otimes Y) \xrightarrow{\sim} (X \otimes X) \otimes (Y \otimes Y) \xrightarrow{\varepsilon, \eta} 1$.

It is commutative, with the symmetry $c(X,Y) : X \otimes Y \to Y \otimes X$ giving $(X \otimes Y, \varepsilon\eta) \xrightarrow{\sim} (Y \otimes X, \eta\varepsilon)$. Indeed

$$
\begin{array}{ccccc}
(X \otimes Y) & \otimes & (X \otimes Y) & = & (X \otimes X) \otimes (Y \otimes Y) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(Y \otimes X) & \otimes & (Y \otimes X) & = & (Y \otimes Y) \otimes (X \otimes X)
\end{array}
$$

is commutative (equality of two permutations), and so is

$$
\begin{tikzcd}
(X \otimes X) \otimes (Y \otimes Y) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \otimes 1 \arrow[d] \arrow[dr] & \\
(Y \otimes Y) \otimes (X \otimes X) \arrow[r] & 1 \otimes 1 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
$$

One maps E onto ${}_2\pi_0(T)$ by $(X, \varepsilon) \mapsto$ class of X, and the fiber containing the class of (X, ε) consists of the classes of the (X, ε'), with (X, ε) and (X, ε') isomorphic if and only if ε and ε' differ by a square.

I now switch from the multiplicative to the additive notation. If (X, ε) is the class of $\tilde{x}$ in E above x in ${}_2\pi_0(T)$, let us compute $2\tilde{x}$ and check it is given by the invariant $c(X) : X \otimes X \to X \otimes X$ of X in $\pi_1(T)$: if we identify $X \otimes X$ with 1 by ε, one has

$$
\begin{tikzcd}
(X \otimes X) \otimes (X \otimes X) \arrow[r, "c(X)"] \arrow[d] & (X \otimes X) \otimes (X \otimes X) \arrow[d] \\
1 \otimes 1 \arrow[r, equal] & 1 \otimes 1
\end{tikzcd}
$$

non commutative by $c(X)$.

If $\mathcal{T}$ is a $GL(V)$-equivariant Picard category with $\pi_0(\mathcal{T}) = \pi_1(\mathcal{T}) = V$, $GL(V)$ acts on the extension of V by V we constructed. If the invariant $\pi_0(\mathcal{T}) \to \pi_1(\mathcal{T})$ is the identity of V, then for this extension

$$0 \to V \to E \to V \to 0,$$

for $\tilde{x}$ in E, its image x in the quotient V equals $2x \in$ subgroup V. This means that $E \sim (\mathbb{Z}/4)^d$ with V its reduction mod 2, and the existence of such an equivariant $\mathcal{T}$ implies that

$$1 \to gL(d, \mathbb{Z}/2) \to GL(d, \mathbb{Z}/4) \longrightarrow GL(d, \mathbb{Z}/2) \to 1 \qquad (*)$$

is a split abelian extension, meaning one can lift $GL(d, \mathbb{Z}/2)$ in $GL(d, \mathbb{Z}/4)$.

No such lifting exists for $d \geq 4$, proving the claim. As I had some trouble verifying that the class of $(*)$ in

$$H^2(GL(d, \mathbb{Z}/2), gL(2, \mathbb{Z}/2))$$

is indeed non zero for $d \geq 4$ (while it is 0 for $d \leq 3$), I join notes of mines checking it.

Best

P. D

P. Deligne

Proposition Pour $d \geq 4$, l'extension ~~GL~~ $GL_d(\mathbb{Z}/4)$ de $GL_d(\mathbb{Z}/2)$ par $gL_d(\mathbb{Z}/2)$ est non triviale

1) reduction au cas $d=4$: car pour le plongement standard

$$\begin{pmatrix} \boxed{} & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{de } GL_4 \text{ dans } GL_d,$$

la representation gL_4 de GL_4 est facteur direct $GL(4)$ - equivariant de gL_d, et la classe d'extension pour $GL(4)$ se déduit de celle pour $GL(d)$ par

$$H^2(GL(d,\mathbb{Z}/2), gL_d) \to H^2(GL(4,\mathbb{Z}/2), gL_d) \to H^2(GL(4,\mathbb{Z}/2), gL_4)$$

2) Regardons $(\mathbb{Z}/2)^4$ comme étant $\mathbb{F}_4^2$ et
$(\mathbb{Z}/4)^4$ " " $W_2(\mathbb{F}_4)^2$.

Puisque $\mathbb{F}_4^*$ est d'ordre 3 impair, ~~la multiplication~~ le groupe $\begin{pmatrix} \mathbb{F}_4^* & 0 \\ 0 & \mathbb{F}_4^* \end{pmatrix} \subset GL(4,\mathbb{Z}/2)$ se relève de façon unique à conjugaison près dans $GL(4,\mathbb{Z}/4)$.
Il suffit donc de montrer qu'il n'existe pas de relèvement qui induise le relèvement standard (dans $\begin{pmatrix} W_2\mathbb{F}_4^* & \\ & W_2\mathbb{F}_4^* \end{pmatrix}$) de ce groupe. Le centralisateur du groupe d'ordre 3 des $\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}$ (ξ racine cubique de 1 dans $W_2(\mathbb{F}_4)^*$) est alors $GL(2, W_2(\mathbb{F}_4))$, et un relèvement de $GL(4,\mathbb{Z}/2)$ dans $GL(4,\mathbb{Z}/4)$ fournirait par restriction au centralisateur ~~au~~ un

relèvement de $GL(2, \mathbb{F}_4)$ dans $GL(2, W_2(\mathbb{F}_4))$ pour lequel les $\begin{pmatrix} \rho' & 0 \\ 0 & \rho'' \end{pmatrix}$ (ρ', ρ'' racine cubiques de 1 dans $\mathbb{F}_4^*$) se relèvent en les $\begin{pmatrix} \rho' & 0 \\ 0 & \rho'' \end{pmatrix}$, ρ' et ρ'' étant encore racines cubiques de 1.

S'il existait un ~~...~~ tel relèvement de $GL(2, \mathbb{F}_4)$, le relèvement de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ s'écrirait, (après une conjugaison par un $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ dans $GL(2, \mathbb{F}_4)$)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}$ avec $2 | a, b, d$

et commuterait avec ses conjugués par $\begin{pmatrix} \rho^i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(\rho^3 = 1)$: commutation de

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & \rho^{-1} b \\ \rho & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & \rho b \\ \rho^{-1} & d \end{pmatrix} \quad : \text{notés } X, Y, Z.$$

Ceci implique $a = d$ et $b = 0$. En effet $[X, \rho^{-1} Y - X] = 0$ donne
$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\rho^{-1}-1)a & (\rho-1)b \\ 0 & (\rho^{-1}-1)d \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (\text{même}) \right] = 0$$

~~La composante $\begin{pmatrix} & \\ \circ & \end{pmatrix}$ de $[\ ]$ est $(a-d)(\rho-1)b - (\rho^{-1}-1)(a-d)b$ =~~
~~$((\rho-1) - (\rho^{-1}-1))(a$~~

Ce crochet est $\begin{pmatrix} -(\rho-1)b & 0 \\ (\rho^{-1}-1)(a-d) & (\rho-1)b \end{pmatrix}$: $b = a-d = 0$

Mais un relèvement de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ $(a \equiv 1\ (2))$ est d'ordre 4, et non 2.

Pour $d = \dim(V) \leq 3$, cette extension est triviale. C'est clair pour $d = 0$ ou 1 ($GL(V)$ trivial). Pour $d = 2$, $GL(V) = S_3$ permutant les 3 éléments non nuls de V, et si on relève ces éléments en 3 éléments de somme 0 dans $\tilde{V}$, on relève $S_3 = GL(V)$ dans $GL(\tilde{V})$. Pour $d = 3$, prenant 4 éléments de somme 0 dans $\tilde{V}$ et leur réduction dans V, le $S_4 \subset GL(\tilde{V})$ qui les permute relève le S_4 analogue de $GL(V)$, qui contient un 2-Sylow de $GL(V)$ (ordres $4! = 3.8$ et $7.6.4 = 3.7.8 = 168$). La classe est nulle car sa restriction à un 2-Sylow l'est.

La proposition suivante donne que le lemme implique le théorème d'inexistence.