Cotes 149 _ Leitfaden

§1 "Résultats de fidélité" (p1-19 originales)

— Formalism of $\mathrm{Spec}(K)_{et}$, for K a field (p1-9 new)

notation : B_K

category of points : groupoid Π_K

functoriality in K

$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ is also written $E_{\overline{K}/K}$

The kernel of $E_{\overline{K}/K} \to E_{\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}$ is denoted $\Pi_{\overline{K}/K}$ (p8)

passages to the limit

— Geometric interpretation and Artin good neighborhoods (p8-12), cohomological dimension

page 12 :

" Théorème 1. Soit K un corps extension de type fini de $\mathbb{Q}$, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Alors, pour tout sous-groupe ouvert E de $E_{\overline{K}/K}$, son centralisateur dans $E_{\overline{K}/K}$ est réduit au groupe unité. Itou pour $\Pi_{\overline{K}/K}$. "

[proof by dévissage, admitting that the center of a free profinite group, as well as the center of the absolute Galois group of a number field, are trivial]

Observation : an extension $\Pi \to A \to \Gamma$ with Π centerless is determined by the corresponding morphism $\Gamma \to \mathrm{Autext}(\Pi)$

Also : a gerb with group Π is determined by the image of Π in the category of groups up to inner automorphisms.

"Remarque. Quand $\Pi \neq 1$, i.e. K pas fini sur $\mathbb{Q}$, le théorème 1 peut se renforcer, sauf erreur, en écrivant que pour tout sous-groupe $\Pi' \subset \Pi$ ouvert dans Π, $\mathrm{Centr}_{\mathcal{E}}(\Pi') = \{1\}$"

[here, $\mathcal{E} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/\mathbb{Q})$, $\Pi = \mathrm{Ker}(\mathrm{Gal}(\overline{K}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}))$]

"Théorème 2. Le foncteur $K \to \Pi_K/\Pi_{\mathbb{Q}}$ des extensions de type fini de $\mathbb{Q}$ vers les groupoïdes profinis sur $\Pi_{\mathbb{Q}}$ est fidèle, i.e si deux homomorphismes $f, g : K \to K'$ définissent des homomorphismes de groupoïdes sur $\Pi_{\mathbb{Q}}$ isomorphes

$$\begin{tikzcd} \Pi_{K'} \arrow[rr, shift left, "f^*"] \arrow[rr, shift right, "g^*"'] \arrow[dr, "p'"'] & & \Pi_K \arrow[dl, "p"] \\ & \Pi_{\mathbb{Q}} & \end{tikzcd}$$

(i.e il existe un isomorphisme de foncteurs $\alpha : f^* \to g^*$ tel que pour tout objet $\overline{\xi}'$ de $\Pi_{K'}$, le carré

$$\begin{tikzcd} p f^*(\overline{\xi}') \arrow[r, "\sim", "p(\alpha)"'] \arrow[d] & p g^*(\overline{\xi}') \arrow[d] \\ p'(\overline{\xi}') \arrow[r, "\simeq"] & p'(\overline{\xi}') \end{tikzcd}$$

est commutatif) alors $f = g$"

NB. The proof leaves me skeptical. The idea is to first consider a morphism $X \to Y$ (the fields of rational functions will be K', K) when Y ~~maps to~~ injects ~~or taken~~ into an extension of an abelian variety by a torus (Cor 1 p 23), and to prove a weaker result. Then p 25 l 5 comes the dubious claim

"Tout d'abord, on vérifie qu'une variété élémentaire d'Artin se plonge par un $i : Y \to G$ dans une extension d'une variété abélienne par un tore"

This claim is false, for instance for Y the universal elliptic curve over $X(3)$ [with 0-section removed if one wanted a nonabelian base and fiber]

Because of this, I stopped my reading of §1.

§2 La question de pleine fidélité (p20-25 originales)

~~énoncé de~~

statement of the question : do $\pi_{\mathbb{Q}}$ - homomorphisms $\pi_{K'} \to \pi_K$ come from $K \to K'$?

p47 : fundamental conjecture, not for fields, but for schemes ~~varieties~~ U, V of finite type over $\mathbb{Q}$, with some conditions, and $\pi_1(U)$, $\pi_1(V)$ instead of Galois groups

page 49

"Cette conjecture fondamentale (éventuellement revue et corrigée en cours de route!) étant admise, la question qui se pose ... est de déterminer les topos (pro) galoisiens sur $B_{\mathbb{Q}}$ qui proviennent de modèles élémentaires anabélien ..."