一. 填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. n 元线性方程组 $Ax=b$ 有无限多解的充分必要条件是____________

2. 排列 32514 的逆序数____________

3.A，B 是矩阵，则 $(AB)^{\mathrm{T}}$ =____________

4. **A** 是 **2*2** 的矩阵，则 **A** 的伴随矩阵是____________

5. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2+3A+E=0$，其中 E 为 n 阶单位矩阵, 则 $A+2E$ 的逆矩阵=____________

6. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix} =\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

7.设四阶行列式 **D** 的第四列元素分别为 $1,0,2,3$ 且他们对应的代数余子式分别为 $2,-3,1,2$，则 **D=**____________

8.齐次线性方程组

$$\begin{cases} (5-\lambda)x + 2y + 2z = 0, \\ 2x + (6-\lambda)y = 0, \\ 2x + (4-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

有非零解，则**λ** =____________

9.求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{与 } B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

的乘积 **AB=**____________

10.设有矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

且矩阵 **X** 满足 **AXB=C**，则 **X=**____________

二．计算题（共 50 分）

1.已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3&1&-1\\0&1&2\\1&-1&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\\3&1\end{bmatrix},$$

设矩阵 X 满足 AX+B=2X，求矩阵 X.（8 分）

2.计算下列行列式的值，（7 分）

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

3. 设 $A=\begin{pmatrix}-5&3&1\\2&-1&1\end{pmatrix}$,

(1) 求可逆矩阵 P,使 PA 为行最简形;

(2) 求一个可逆矩阵 Q,使 QA^{T} 为行最简形（10 分）

4.用初等行变换法解线性方程组（7 分）

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3-3x_4=1\\x_1-x_2-x_3+x_4=0\\2x_1-2x_2-4x_3+6x_4=-1\\3x_1-3x_2-5x_3+7x_4=-1\end{cases}$$

5.

设 $AP=P\Lambda$, 其中 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$, 求 $\varphi(A)=A^8(5E-6A+A^2)$

（10 分）

6.

设3阶矩阵A,B是可逆的，且A,B的伴随矩阵分别为

$$A^*=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&1\\0&0&4\end{pmatrix},B^*=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}$$

计算 AB 的伴随矩阵$(AB)^*$.(8分)

三．解答证明题（共 **25** 分）

1. λ **取何值时，线性方程组**

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + \lambda x_3 = -1 \end{cases}$$

有唯一解、有无穷多解、没有解？并在有无穷多解时，求出它的通解.（10 分）

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 证明: 若 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{AY}$, 且 $R(\boldsymbol{A}) = n$, 则 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$

（7 分）

3. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵，$AB = A + B$，证明

（1）$A - E$，$B - E$ 都可逆;

（2）$AB = BA$.（8 分）

1. $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$

2.

3 排在首位,逆序数为 0;

2 的前面比 2 大的数有一个(3),故逆序数为 1;

5 是最大数,逆序数为 0;

1 的前面比 1 大的数有三个(3、2、5),故逆序数为 3;

4 的前面比 4 大的数有一个(5),故逆序数为 1,于是这个排列的逆序数为

$$t=0+1+0+3+1=5.$$

3. B^TA^T

4. $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$

5. 答:由 $A^2+3A+E=0 \to (A+2E)(A+E)=E$,

则 $(A+2E)$ 的逆矩阵 $=A+E$

6. -2

7. 10（若是余子式，则答案是 2，注意代数余子式和余子式的不同）

8. 如果齐次线性方程组(13)有非零解,则它的系数行列式必为零.

$$D=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda)-4(4-\lambda)-4(6-\lambda)$$

$$=(5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda),$$

由 $D=0$,得 $\lambda=2$、$\lambda=5$ 或 $\lambda=8$.

9.

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{array}{c} 1\times4+0\times(-1) \\ +3\times2 \\ +(-1)\times1 \end{array} & \begin{array}{c} 1\times1+0\times1 \\ +3\times0 \\ +(-1)\times3 \end{array} & \begin{array}{c} 1\times0+0\times3 \\ +3\times1 \\ +(-1)\times4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2\times4+1\times(-1) \\ +0\times2 \\ +2\times1 \end{array} & \begin{array}{c} 2\times1+1\times1 \\ +0\times0 \\ +2\times3 \end{array} & \begin{array}{c} 2\times0+1\times3 \\ +0\times1 \\ +2\times4 \end{array} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -2 & -1 \\ 9 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

10. $X=A^{-1}CB^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix},$$

于是 $$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$$

二．计算题

1.

解法一

由$\mathbf{AX+B=2X \to AX-2X=-B \to 2X-AX=B,}$

则$\mathbf{(2E-A)X=B \to X=(2E-A)^{-1}B}$

$$\mathbf{2E-A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

由$$\mathbf{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{\to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{\to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{X} = \mathbf{\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

解法二

$$\text{由}AX+B=2X\rightarrow AX-2X=-B\rightarrow 2X-AX=B,$$

$$\text{则}(2E-A)X=B\rightarrow X=(2E-A)^{-1}B$$

$$2E-A=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\0&1&-2\\-1&1&0\end{bmatrix},|2E-A|=-2+1-2=-3,$$

$$(2E-A)^{-1}=\frac{1}{|2E-A|}(2E-A)^{*}=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}2&1&1\\2&1&-2\\1&2&-1\end{bmatrix},$$

$$X=(2E-A)^{-1}B=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}2&1&1\\2&1&-2\\1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1\\1&0\\1&0\end{bmatrix}$$

2.

答:解法1

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\3&1&-1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&-24&18&-19\\0&10&-5&5\\0&16&-10&11\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&10&-5&5\\0&-24&18&-19\\0&16&-10&11\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&2&-1&1\\0&-24&18&-19\\0&16&-10&11\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&2&-1&1\\0&0&6&-7\\0&0&-2&3\end{vmatrix}$$

$$=5\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&2&-1&1\\0&0&6&-7\\0&0&0&\frac{2}{3}\end{vmatrix}=40$$

解法2

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-8&0&4&-6\\2&0&1&-1\\16&0&-2&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-8&0&4&-6\\2&0&1&-1\\16&0&-2&7\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-8&4&-6\\2&1&-1\\16&-2&7\end{vmatrix}=-(-56-64+24+96-56+16)=40$$

3.

(1) $\begin{bmatrix}-5 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 4 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 7 & 2 & 5\end{bmatrix}$ **P**= $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}5 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4\\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 9/4\end{bmatrix}$,**Q**= $\begin{bmatrix}0 & 1/4 & 1/4\\ 0 & -1/4 & 3/4\\ 1 & -3/4 & 9/4\end{bmatrix}$

4.

答

$$设B=(A,b)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & -4 & 6 & -1\\ 3 & -3 & -5 & 7 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 4 & -1\\ 0 & 0 & -6 & 12 & -3\\ 0 & 0 & -8 & 16 & -4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\overline{B}$$

与原方程组同解方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_4=1/2\\ x_3-2x_4=1/2\end{cases}\to\begin{cases}x_1=x_2+x_4+1/2\\ x_3=2x_4+1/2\end{cases}$$

取未知量x_2, x_4作自由未知量,

令x_2=c_1, $x_4=c_2$,

$$\to\begin{cases}x_1=c_1+c_2+1/2\\ x_2=c_1\\ x_3=2c_2+1/2\\ x_4=c_2\end{cases}\qquad 或\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$$

5.

解: 由题设得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 注意到 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵, 则 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$. 又

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{A})&=5\boldsymbol{A}^8-6\boldsymbol{A}^9+\boldsymbol{A}^{10}\\&=\boldsymbol{P}\big(5\boldsymbol{\Lambda}^8-6\boldsymbol{\Lambda}^9+\boldsymbol{\Lambda}^{10}\big)\boldsymbol{P}^{-1}.\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(-1,1,5)$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}^8&=\mathrm{diag}(1,1,5^8),\\\boldsymbol{\Lambda}^9&=\mathrm{diag}(-1,1,5^9),\\\boldsymbol{\Lambda}^{10}&=\mathrm{diag}(1,1,5^{10}),\\5\boldsymbol{\Lambda}^8-6\boldsymbol{\Lambda}^9+\boldsymbol{\Lambda}^{10}&=\mathrm{diag}(12,0,0).\end{aligned}$$

6.

因$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是可逆的, 则$\boldsymbol{AB}$是可逆的,

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{AB}|}(\boldsymbol{AB})^*\to(\boldsymbol{AB})^*=|\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1},\text{得}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB})^*&=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\\&=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\\&=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\&=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&1\\0&0&4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3&9\\0&0&12\end{pmatrix}\end{aligned}$$

三．解答证明题

1.

$$R=(A|b)=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 3 & -1 & \lambda & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -4 & 2 & 2\\ 0 & -4 & \lambda+3 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -4 & 2 & 2\\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0\end{pmatrix}$$

$\therefore$当$\lambda\neq -1$时，$R(A)=R(B)=3$有唯一解

当$\lambda=-1$时，$R(A)=R(B)=2<3$有无穷多解

此时，$R\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -4 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$之后略

方程不会无解。

2.

由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$，得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})=0.$$

又 $R(\boldsymbol{A})=n$，则矩阵方程 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})=0$ 只有零解，即

$$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\equiv 0.$$

得证

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}.$$

3.（1） 因为$(A-E)(B-E)=AB-(A+B)+E=E$,

所以$A-E$，$B-E$都可逆。

（2） 由（1）知

$$\begin{aligned}E&=(A-E)(B-E)\\&=(B-E)(A-E)\\&=BA-(A+B)+E\end{aligned}$$

所以$AB=A+B=BA$