

中山大学本科生模拟期末考试

考试科目：《线性代数》

学年学期：2017 学年第 1 学期 姓名：_____ 学号：_____

考试时长：120 分钟 成绩评定：_____ 阅卷教师：_____

警示

《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

----- 以下为试题区域，共 10 题，总分 100 分 -----

一、计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ ，请写出必要的计算过程。 (10 分)

二、解下列矩阵方程，请写出必要的计算过程。 (10 分)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

三、向量组： $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. 求向量组的秩及一个极大线性无关组，并用它线性表示其余的向量。 (12分)

四、已知向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 是齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系，求证：向量组 $2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + 5\mathbf{a}_3, 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_3$ 也是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系。(10分)

五、当 λ 为何值时，线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$
 无解、有唯一解或有无穷多解

并在有无穷多解时，求出其通解。 (15分)

六、已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ ，求 a 并且求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。（12 分）

七、二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ （15 分）

若二次型 f 的规范型为 $y_1^2 + y_2^2$ ，求 a 的值. 并求一个正交变换化该二次型为标准形.

八、已知 3 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$, 求矩阵 A (6 分)

九、已知矩阵 A 与 B 为 n 阶对称正定矩阵，

求证：(1) $A + B$ 也是 n 阶对称正定矩阵；

(2) 若 1 不是 A 的特征值，则 $A^2 - A + E$ 也是对称正定矩阵。(10 分)