线性代数模拟期末考试答案与方法提示

一、 160.（使用基本的行变换和展开的办法即可，巧妙方法反而不多）

二、 利用初等行变换可知$\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&2&-2\\-1&3&2\end{pmatrix}$可逆，且$\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&2&-2\\-1&3&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&2\\3&1\\5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{13}{5}&\frac{13}{5}\\\frac{8}{5}&\frac{2}{5}\\-\frac{6}{5}&\frac{6}{5}\end{pmatrix}$.

三、 本题若看成齐次线性方程组数据与第三章 13(1)相同，由$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$的行最简型

$\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{4}{3}\\0&1&0&3\\0&0&1&-\frac{4}{3}\end{bmatrix}$(6 分)可知向量组的秩为 3，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$构成最大无关组，（3 分）

且$\boldsymbol{a}_4=-\frac{4}{3}\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2-\frac{4}{3}\boldsymbol{a}_3$.（3 分）

四、 此题分为三部分，首先说明$2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+5\boldsymbol{a}_3,3\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_3$也是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解（1 分）
$2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+5\boldsymbol{a}_3,3\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_3$的线性无关性可完全仿照第四章习题 10 来证。（5 分）
然后说明因$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$构成$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系故线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$解集的秩为 3，
因此$2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+5\boldsymbol{a}_3,3\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_3$包含三个向量故已经构成了$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的最大无关组（4 分），综上得到$2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+5\boldsymbol{a}_3,3\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_3$已经构成了$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

五、 可通过系数矩阵行列式来进行排除，知$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq-\frac{4}{5}$时，方程有唯一解。（5 分）

$\lambda=1$时，线性方程组有无穷多解，通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$.（6 分）

而$\lambda=-\frac{4}{5}$时，线性方程组无解。（4 分）

六、 考虑二重特征值 6 的特征向量数量（需要 2 个），可知$a=0$.（6 分）

而此时可以对应求出$P=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&2&-2\\1&0&0\end{bmatrix},\Lambda=\begin{bmatrix}6&&\\&6&\\&&-2\end{bmatrix}$（6 分）

七、 根据带有参数a的二次型对应特征值为$\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$,有$\lambda_3<\lambda_1<\lambda_2$，且三个特征值两个为正一个为 0，所以必有$\lambda_3=0$，故$a=2$.（6 分）

此时，令$\begin{cases}x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}y_2-\frac{1}{\sqrt{6}}y_3\\x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{3}}y_2+\frac{1}{\sqrt{6}}y_3\\x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}y_2+\frac{2}{\sqrt{6}}y_3\end{cases}$，可得标准型为$2y_1^2+3y_2^2$.（9 分）

八、 $A=\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}-2&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$，两个结果各 3 分本题虽然看似送分题，但步骤需严谨，不得直接假设A为对角矩阵，但可以利用课本第二章习题 24 结论$|A^*|=|A|^{n-1}$来快速计算出正确的结果。注意到$|A|=\pm 2$,这会带来两种不同的答案。

九、 （1）本题思路除常规化证明对称外，考虑对于任意的非零向量$\boldsymbol{x}$，都有$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(A+B)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{x}>0$.（4 分）
（2）本题难度较大，为优秀学生尝试拉分的题目。由题意可知$A^2-A+E=(A-E)^2+A$，A为对称正定矩阵。而因为 1 不是A的特征值，故$A-E$的特征值均不为 0，$(A-E)^2$的特征值为$A-E$的特征值对应平方，故均为正值，并且不难证明$(A-E)^2$是对称的，从而$(A-E)^2$也是对称正定矩阵。利用（1）结论可以使本小题结论得证.（6 分）