《线性代数》复习 2017.11.1

Chap.1

动机：解一类特殊的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (1)$$

记 $A=(a_{ij})_{n\times n}$

**Cramer法则**：若 $|A|\neq 0$，则方程组(1)有且只有1个解

且解为
$$\begin{cases} x_1=\frac{D_1}{|A|} \\ x_2=\frac{D_2}{|A|} \\ \vdots \\ x_n=\frac{D_n}{|A|} \end{cases},$$
其中
$$D_k=\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad \text{第}k\text{列} \\ \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right| \end{array}$$
$k=1,2,\cdots,n$

掌握：行列式是什么（定义）？

行列式怎么算？（计算，性质）

行列式有什么用处？（Cramer法则）

Chap. 2 — Chap. 3

动机：解一般的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

n个未知变量，m个方程，不能应用 Cramer 法则！

方法：矩阵作为工具，初等行变换方法

(2) 可表示为

$$A_{m\times n}\vec{x}_{n\times 1} = \vec{b}_{m\times 1} \qquad (2')$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

**定理**：若 $R(A) < R(A, \vec{b})$，(2) 无解

若 $R(A) = R(A, \vec{b})$，(2) 有解

- 当 $R(A) = R(A, \vec{b}) = n$，只有 1 个解
- 当 $R(A) = R(A, \vec{b}) < n$，有无穷多个解

掌握：矩阵的定义，运算（+，−，×，数乘，逆矩阵，转置）

秩的定义，秩的计算，秩的性质

一种重要的方法：初等行变换。

Chap. 4

动机： 研究齐次线性方程组与非齐次线性方程组解的结构.

**定理Ⅰ** 齐次线性方程组 $A_{m\times n}\vec{x}_{n\times 1}=\vec{0}_{m\times 1}$. $(R(A)=r)$

的所有解（通解）为

$$\vec{x}=c_1\vec{\xi}_1+c_2\vec{\xi}_2+\cdots+c_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}$$

其中 $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_{n-r}$ 是解集 $\{\vec{x}\mid A\vec{x}=\vec{0}\}$ 的一个最大线性无关组，$c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 为任意的数.

**定理Ⅱ** 非齐次线性方程组 $A_{m\times n}\vec{x}_{n\times 1}=\vec{b}_{m\times 1}$，$(R(A)=r)$

的所有解（通解）为

$$\vec{x}=\vec{\eta}+c_1\vec{\xi}_1+c_2\vec{\xi}_2+\cdots+c_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}$$

其中 $\vec{\eta}$ 为 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的一个解，$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_{n-r}$ 为解集 $\{\vec{x}\mid A\vec{x}=\vec{0}\}$ 的一个最大线性无关组，$c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 是任意的数.

掌握： 线性表示，线性相关，线性无关 的定义 和判断方法.

向量组的秩的定义（最大线性无关组的定义），~~基础解系的定义~~.

向量空间，基，坐标.

# Chap 5

动机：如何求方阵 $A^k$？进而求 $e^A$，$\sin A$？

方法：将 $A$ 相似于对角阵，即寻找可逆阵 $P$，s.t.

$$A = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$$

---

定理　$A_{n\times n}$ 相似于对角阵 $\Longleftrightarrow$ $A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量

定理　$A_{n\times n} = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$，记 $P=(\vec{P_1}\ \vec{P_2}\ \cdots\ \vec{P_n})$

$\Longleftrightarrow$ $A\vec{P_k} = \lambda_k \vec{P_k}$，$k=1,2,\cdots,n$. 且向量组 $\vec{P_1},\vec{P_2},\cdots,\vec{P_n}$ 线性无关.

**主轴定理**　若 $A_{n\times n}$ 为实对称矩阵，

则 $\exists$ 正交矩阵 $P$，s.t.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

**定理**　$A$ 为实对称阵.

则 $A$ 为正定矩阵 $\Longleftrightarrow$ $A$ 的所有特征值都为正数

$\Longleftrightarrow$ $A$ 的各阶顺序主子式都 $>0$

$\Longleftrightarrow$ $A = PP^T$，其中 $P$ 可逆.

---

掌握：1° $A$ 相似于对角阵的判断方法，具体求法.（特征值、特征向量定义、计算、性质）

2° 实对称矩阵正交相似于对角阵的方法.

3° 实二次型化为标准形，规范形的方法

4° 正定二次型（正定矩阵）的性质，判断方法.

总结：

$\boxed{\text{三大矩阵关系与不变量}}$

$A_{m\times n}$ 与 $B_{m\times n}$ 等价 $\Longleftrightarrow$ $P_{m\times m}A_{m\times n}Q_{n\times n}=B_{m\times n}$，其中$P,Q$可逆.

不变量：秩

$A_{m\times n}$ 与 $B_{n\times n}$ 相似 $\Longleftrightarrow$ $P^{-1}AP=B$

不变量：秩，特征多项式，特征值、迹，行列式.

$A_{n\times n}$ 与 $B_{n\times n}$ 合同 $\Longleftrightarrow$ $P^{T}AP=B$，其中$P$可逆

不变量：秩，正惯性指数（即正特征值的个数）

负惯性指数（即负特征值的个数）

---

设 $A$ 为 $n\times n$ 方阵

$|A|\neq 0$ (Chap 1) $\Longleftrightarrow$ $A$ 可逆 (Chap 2)

$\Longleftrightarrow$ $R(A)=n$ (Chap 3)

$\Longleftrightarrow$ $A$ 的列向量组线性无关 (Chap 4)

$\Longleftrightarrow$ $A$ 的特征值不等于 0 (Chap 5)