珠海校区2009学年度第一学期
《线性代数》期中考试试题　C卷

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

姓名：[illegible]　专业：数学与应用数学　学号：08338007　成绩：99

一、　填空题(每题3分，共24分)

24

1. 在5阶行列式中,若含$a_{13}a_{25}a_{3t}a_{44}a_{5k}$的项是带负号的,则$t=$ ~~1~~ 2 ;

2. 设A是4阶方阵, $|A|=\frac{1}{2}$, 则$|(2A)^{-1}+3A^*|=$ 32 ;

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$ -18 ;　4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} =$ $(c-b)(c-a)(c-x)(b-a)(b-x)(a-x)$

5. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则$A^TB-BA=$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;

6. 已知行列式$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$, 则$a=$ 3 ;　7. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=$ 5 ;

8. 已知$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,则伴随矩阵$A^*=$ $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

$AA^*=|A|E$

二、　判断题(每题2分，共10分)

10

1. n阶行列式中副对角线上元素的乘积$a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{1n}$总是带负号.　(×)
2. 若$A^2-A=0$, 则$A=0$或$A=E$. ?　(×)

   $A(A-E)=0$
3. 设A, B为n阶方阵, 则$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$.　(×)

   未必方阵
4. 任一n阶对角阵必可与同阶的方阵交换. ?　(×)
5. 若A为列满秩矩阵且$AB=C$,则$Bx=0$与$Cx=0$同解.　(√)

三、　计算下列行列式(每题8分，共16分)

$$D_4=\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},\qquad D_{2n}=\begin{vmatrix} y & a & a & \cdots & a & a & x \\ a & y & a & \cdots & a & x & a \\ a & a & y & \cdots & x & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & x & \cdots & y & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & y & a \\ x & a & a & \cdots & a & a & y \end{vmatrix}$$

?

16

解: $D_4=\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_1-2r_4]{r_2-r_4} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{r_2+2c_3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(15-8)=-7$

$D_{2n}=\begin{vmatrix} y & a & a & \cdots & a & a & x \\ a & y & a & \cdots & a & x & a \\ a & a & y & \cdots & x & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & x & & y & a & a \\ a & x & a & & a & y & a \\ x & a & a & & a & a & y \end{vmatrix} \xrightarrow[i=(1,2,\dots,n)]{c_i-c_1} \begin{vmatrix} y & a-y & a-y & \cdots & a-y & a-y & x-y \\ a & y-a & 0 & \cdots & 0 & x-a & 0 \\ a & 0 & y-a & \cdots & x-a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & x-a & \cdots & y-a & 0 & 0 \\ a & x-a & 0 & \cdots & 0 & y-a & 0 \\ x & a-x & a-x & \cdots & a-x & a-x & y-x \end{vmatrix} \xrightarrow{r_{2n}+r_1} \begin{vmatrix} y & a-y & a-y & \cdots & a-y & a-y \\ a & y-a & 0 & \cdots & 0 & x-a \\ a & 0 & y-a & \cdots & x-a & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a & 0 & x-a & \cdots & y-a & 0 \\ a & x-a & 0 & \cdots & 0 & y-a \\ x+y & 2a-x-y & 2a-x-y & \cdots & 2a-x-y & 2a-x-y \end{vmatrix}$

$=(-1)^{2n+1}(x-y)\begin{vmatrix} a & y-a & 0 & \cdots & 0 & x-a \\ a & 0 & y-a & \cdots & x-a & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & x-a & \cdots & y-a & 0 \\ a & x-a & 0 & \cdots & 0 & y-a \\ x+y & 2a-x-y & 2a-x-y & \cdots & 2a-x-y & 2a-x-y \end{vmatrix} \xrightarrow[i=(1,2,\dots,(n-1))]{r_{2n-1}+r_i} (-1)^{2n+1}(x-y)\begin{vmatrix} a & y-a & 0 & \cdots & 0 & x-a \\ a & 0 & y-a & \cdots & x-a & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & x-a & \cdots & y-a & 0 \\ a & x-a & 0 & \cdots & 0 & y-a \\ x+y+(2n-2)a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$=(-1)^{2n+1}(x-y)(-1)^{1+2n-1}[x+y+(2n-2)a]\begin{vmatrix} y-a & 0 & \cdots & 0 & x-a \\ 0 & y-a & \cdots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & x-a & \cdots & y-a & 0 \\ x-a & 0 & \cdots & 0 & y-a \end{vmatrix}$　设$B_{2(n-1)}=\begin{vmatrix} y-a & 0 & \cdots & 0 & x-a \\ 0 & y-a & \cdots & x-a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & x-a & \cdots & y-a & 0 \\ x-a & 0 & \cdots & 0 & y-a \end{vmatrix}$

易得递推式: $B_{2(n-1)}=[(y-a)^2-(x-a)^2]B_{2(n-2)}=[(y-a)^2-(x-a)^2]^{n-2}B_2$　又$B_2=\begin{vmatrix} y-a & x-a \\ x-a & y-a \end{vmatrix}=(y-a)^2-(x-a)^2$.

$\therefore B_{2(n-1)}=[(y-a)^2-(x-a)^2]^{n-1}$

$\therefore D_{2n}=-(x-y)[x+y+(2n-2)a][(y-a)^2-(x-a)^2]^{n-1}$

四、求解下列的矩阵方程(8分) [illegible]

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&4&1\end{pmatrix}$$

解：设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&4&1\end{pmatrix}$

则原方程可化为 $AXB=C$. 故 $X=A^{-1}CB^{-1}$

易知 $|A|=1$ $A^*=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

$|B|=2$ $B^*=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{21}&B_{31}\\B_{12}&B_{22}&B_{32}\\B_{13}&B_{23}&B_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$

过程

7

$\therefore X=\frac{1}{|A|}A^*C\frac{1}{|B|}B^*=\frac{1}{|AB|}A^*CB^*$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\0&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&5\times2-2\times4&5\times2-2\times1\\-2&-2\times2+4&-2\times2+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&2&8\\-2&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\times2-2\times3+8\times2&5\times6-2\times6+8\times2&5\times(-4)+2\times5-2\times8\\-2\times2-3\times2&-2\times6-3\times2&-2\times(-4)+(-3)\times(-2)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}20&34&-26\\-10&-18&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&17&-13\\-5&-9&7\end{pmatrix}$$

故 $X=\begin{pmatrix}10&17&-13\\-5&-9&7\end{pmatrix}$

五、求矩阵$A=\begin{pmatrix}3&-1&-4&2\\1&0&-1&1\\-1&4&3&1\end{pmatrix}$的秩及一个最高阶非零子式.(8分)

8

解：

$A=\begin{pmatrix}3&-1&-4&2\\1&0&-1&1\\-1&4&3&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&-1&-2&0\\1&0&-1&1\\-1&4&3&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-2&0\\0&1&1&1\\0&3&1&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&-1&-2&0\\0&1&1&1\\0&0&-2&-2\end{pmatrix}$

易知 A的行阶梯形的非零行为3.

故 $R(A)=3$.

最高阶非零子式在1，2，3列取得.

故 $k=\begin{vmatrix}3&-1&-4\\1&0&-1\\-1&4&3\end{vmatrix}$

~~r_3+4r_1 3 −1 −4 / 1 0 −1~~

$\xrightarrow{c_1+c_3}\begin{vmatrix}3&-1&-1&-4\\&0&0&-1\\&2&4&3\end{vmatrix}$

$=(-1)^{2+3}\cdot(-1)\begin{vmatrix}-1&-1\\2&4\end{vmatrix}$

$=-2\neq0$.

六、设A为n阶方阵,且$A^3+2A+E=0$. 证明$A-E$可逆,并求$(A-E)^{-1}$.(8分)

8

解：易知：$A^3+2A+E=(A^2+A+3E)(A-E)+4E=0$

$\therefore (A-E)\left(\frac{A^2+A+3E}{-4}\right)=E$.

故 $A-E$可逆. 且 $(A-E)^{-1}=-\frac{A^2+A+3E}{4}$

七、设$P^{-1}AP=\Lambda$, 其中$P=\begin{pmatrix}1&3\\1&1\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$, 求$f(A)=A^4(A^2+3A+E)$.(10分)

解: ~~f(A)~~

由公式可得:

$f(A)=P^* f(\Lambda)P^{-1}$?

$|P|=-2$ $\quad P^*=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&1\end{pmatrix}$

对于对角阵 $\Lambda=diag(-1,2)$ 有

$f(-1)=(-1)^4[(-1)^2+3\times(-1)+1]=-1$

$f(2)=2^4(2^2+3\times2+1)=176$

10

$\therefore f(\Lambda)=diag(-1,176)$

$\therefore f(A)=P f(\Lambda)P^{-1}$

$=\frac{1}{|P|}P f(\Lambda)P^*=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}1&3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&176\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\-1&1\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1&3\times176\\-1&176\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\-1&1\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-529&531\\-177&179\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\frac{529}{2}&-\frac{531}{2}\\\frac{177}{2}&-\frac{179}{2}\end{pmatrix}$

八、设$\begin{cases}(1-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\2x_1+(4-\lambda)x_2-4x_3=2,\\-2x_1-4x_2+(4-\lambda)x_3=-\lambda-2,\end{cases}$ 问λ为何值时,此方程组有惟一解、无解或有无穷多解?并在有无穷多解时求其通解.(16分)

解: 当此方程组有惟一解时，由克拉默法则可得.

$\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-2\\2&4-\lambda&-4\\-2&-4&4-\lambda\end{vmatrix}\neq0.$

16

易知 $\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-2\\2&4-\lambda&-4\\-2&-4&4-\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow[r_1+\frac{1-\lambda}{2}r_3]{r_2+r_3}\begin{vmatrix}0&2\lambda&\frac{(1-\lambda)(4-\lambda)}{2}-2\\0&-\lambda&-\lambda\\-2&-4&4-\lambda\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}2\lambda&\frac{\lambda^2-5\lambda}{2}\\-\lambda&-\lambda\end{vmatrix}=4\lambda^2-\lambda^3+5\lambda^2;$

故当λ≠0 且λ≠9时. 此方程组有惟一解;

当λ=0时. 其增广矩阵为$\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\2&4&-4&2\\-2&-4&4&-2\end{pmatrix}$

简化可得 $B=\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\2&4&-4&2\\-2&-4&4&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

由阶梯形可知 $R(A)=R(B)=1<n$. 故此时方程有无穷多解.

且其通解为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=C_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

当λ=9时. 其增广矩阵为 $B=\begin{pmatrix}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\-2&-4&-5&-11\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\-2&-4&-5&-11\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_1}\begin{pmatrix}-2&-4&-5&-11\\2&-5&-4&2\\-8&2&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}-2&-4&-5&-11\\0&-9&-9&-9\\0&18&18&45\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}-2&-4&-5&-11\\0&-9&-9&-9\\0&0&0&27\end{pmatrix}$

由阶梯形可知 $R(A)<R(B)$ 故此时方程无解.

综上所述: 当λ≠0且λ≠9时 方程组有惟一解. 当λ=0时 方程组有无穷多解 且通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=C_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+\Big[$

当λ=9时 方程组无解.

线性代数期中试题(A)　　2008.11

专业：水文与水资源工程学号：07306789　姓名：林裕敏　分数：100

警示：《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位"

1. 求以下排列逆序数，并指出排列的奇偶性。　(8 分)

(1) 53412

解：$\tau = 4+2+2 = 8$

∴ 此排列为偶排列.

(2) n(n-1) ⋯ 3 2 1

解：$\tau = n-1+n-2+\cdots+1+0 = \frac{(n-1+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

∴ 当 $\frac{n(n-1)}{2} = 2k$ 时，此排列为偶排列.（其中 $k=1,2\cdots n$）

当 $\frac{n(n-1)}{2} = 2k+1$ 时，此排列为奇排列.（其中 $k=1,2\cdots n$）

2. 计算行列式　(18 分)

(1)
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2007 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2008 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解：
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2007 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2008 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(2008,2007\cdots 1)} 2008\times 2007\times\cdots\times 1$$
$$= 2008\times 2007\times\cdots\times 1$$

(2)
$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}_{n\times n}$$

解：
$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix} \xlongequal[(j=2,3\cdots n)]{c_1+c_j} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x & a \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,3\cdots n)]{r_i-r_1} x+(n-1)a \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & x-a \end{vmatrix} = [x+(n-1)a]\cdot(x-a)^{n-1}.$$

(3)
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解：
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_3+r_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+3r_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{按c_3展开} (-1)\cdot(-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-\frac{1}{2}c_2]{c_1-c_2} (-1) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & \frac{1}{2} \\ 12 & -6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{按r_1展开} (-1)\cdot 4\,(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & \frac{1}{2} \\ 12 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-6) = 4\times 10 = 40$$

3. 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(3-\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\ (2-\lambda)x_2-x_3=0\\ 4x_1-2x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$$

有非零解，求λ的值. (8分)

解：由题知，上述方程组有非零解.

$$\therefore D=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & -1\\ 4 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

按C_1展开 $(3-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}+(-1)^4\times4\times\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2-\lambda & -1\end{vmatrix}$

$\cancel{=(3-\lambda)^2 = \lambda(3-\lambda)^2}$

$=-\lambda(\lambda-3)^2+4(\lambda-3)$

$=(\lambda-3)(-\lambda^2+3\lambda+4)=0$

即 $\lambda=3$ 或 $\lambda=4$ 或 $\lambda=-1$

不难验证，当$\lambda=3$时，$\cancel{D=0}$ $\lambda=4$时，$\lambda=-1$时. $D=0$

4. 设$\alpha=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$，$\beta=(-1\quad 3\quad 2)$，且$A=\alpha\beta$，

(1) 求$\beta\alpha$

(2) 求A^n(其中n为正整数). (8分)

解：(1) $\beta\alpha=[-1\quad 3\quad 2]\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$

$=[5]$

(2) $A=\alpha\beta=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}\cdot[-1\quad 3\quad 2]=\begin{bmatrix}-2 & 6 & 4\\ -1 & 3 & 2\\ -2 & 6 & 4\end{bmatrix}$

$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}-2 & 6 & 4\\ -1 & 3 & 2\\ -2 & 6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 6 & 4\\ -1 & 3 & 2\\ -2 & 6 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 30 & 20\\ -5 & 15 & 10\\ -10 & 30 & 20\end{bmatrix}=5A$

$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}-10 & 30 & 20\\ -5 & 15 & 10\\ -10 & 30 & 20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 6 & 4\\ -1 & 3 & 2\\ -2 & 6 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-50 & 150 & 100\\ -25 & 75 & 50\\ -50 & 150 & 100\end{bmatrix}=5A^2=25A$

由上可知，$A^n=(5)^{n-1}\cdot A$

$=(5)^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 6 & 4\\ -1 & 3 & 2\\ -2 & 6 & 4\end{bmatrix}\quad(n\in N_*)$

5. 设A为$m\times n$矩阵，证明AA^T为对称矩阵. (8分)

证明：$\cancel{(AA^T)^T=(A^T)^T\cdot A^T=A\cdot A^T}$

$\because A$为$m\times n$矩阵，$\therefore A^T$为$n\times m$矩阵.

$\therefore (AA^T)^T=(A^T)^T\cdot A^T=A\cdot A^T$. ($A\cdot A^T$的乘法~~有效~~意义)

$\therefore AA^T$为对称矩阵

6. 设A为n方阵，且$A^2+A-4I=0$. 证明$A-I$可逆，并求$(A-I)^{-1}$. (8分)

证明：$\because A^2+A-4I=0\Rightarrow(A-I)(A+2I)-2I=0$

即 $(A-I)(A+2I)=2I$

$\therefore(A-I)\cdot(\frac{A}{2}+I)=I$

即 $A-I$ 可逆.

且 $(A-I)^{-1}=\frac{1}{2}A+I$.

7. 已知A为3阶方阵，且$|A|=3$，求$|\frac{1}{3}A^*-4A^{-1}|$. (8分)

解：$\because A^*=A^{-1}|A|$

$\therefore|\frac{1}{3}A^*-4\cdot A^{-1}|=|\frac{1}{3}\cdot A^{-1}\cdot|A|-4A^{-1}|$

$=|A^{-1}-4A^{-1}|$

$=|-3\cdot A^{-1}|$

$=(-3)^3\cdot\frac{1}{|A|}=-27\times\frac{1}{3}=-9$.

8. (1) 求下面方阵的逆矩阵 (16分)

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$$

(2) 求解下列的矩阵方程

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$$

(3) 用分块矩阵法求下面矩阵的逆矩阵

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&2&1&0&0&0\\0&0&5&3&0&0&0\\0&0&0&0&1&2&3\\0&0&0&0&2&2&1\\0&0&0&0&3&4&3\end{pmatrix}$$

解:(1)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&1&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow[-r_3]{-\frac{1}{2}r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{bmatrix}$$

(2) 解：设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$. $B=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{bmatrix}$. 又∵ $|A|=2\neq0$. ∴ A^{-1} 存在

则 $X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{bmatrix}$

~~对于A.~~

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&2\\0&-4\\0&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1\\0&-2\\0&2\end{bmatrix}.$$

(3) 设 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$.

则原矩阵化为 $\begin{bmatrix}A&&\\&B&\\&&C\end{bmatrix}$. 则原矩阵逆矩阵为 $\begin{bmatrix}A^{-1}&&\\&B^{-1}&\\&&C^{-1}\end{bmatrix}$.

又 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$. $B^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}$.

~~C^{-1}~~ 对于C. $C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{bmatrix}$

∴原矩阵的逆矩阵为 $\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&3&-1&0&0&0\\0&0&-5&2&0&0&0\\0&0&0&0&1&3&-2\\0&0&0&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&0&0&1&1&-1\end{bmatrix}$

9. 设 A 为 n 阶方阵. 证明：若 $A^2=I$，则 $R(A+I)+R(A-I)=n$。 (10分)

证明：$\because A\cdot A=I$. $\therefore A^{-1}=A$.

$\therefore$ A为满秩矩阵. $\therefore R(A)=n$.

~~又 $R[(A+I)+(A-I)] \geq$~~

又 $R[(A+I)+(A-I)]=R(2A)=R(A)\leq R(A+I)+R(A-I)$

得 $R(A+I)+R(A-I)\geq n$. ①

~~又 $A^2-I^2=0 \Rightarrow (A+I)(A-I)=0$ 即 $(A+I)^{-1}=A-I$~~ ...

又 $A^2-I=0$ 得 $R[(A+I)(A-I)]=R(A^2-I)=R(0)=0$

$\therefore R(A+I)+R(A-I)-n\leq 0$ ②

由①②得 $R(A+I)+R(A-I)=n$.

$\therefore$ 原式得证.

10. 求矩阵 A 的秩及一个最高阶的非零子式，其中 (8分)

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&5&-2&1\\-2&1&-3&1&-4\\-1&-7&9&-3&-7\\3&-14&22&-9&1\end{pmatrix}$$

解：
$$A=\begin{bmatrix}1&-3&5&-2&1\\-2&1&-3&1&-4\\-1&-7&9&-3&-7\\3&-14&22&-9&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\ r_4-3r_1}]{r_2+2r_1}\begin{bmatrix}1&-3&5&-2&1\\0&-5&7&-3&-2\\0&-10&14&-5&-6\\0&-5&7&-3&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-2r_2}\begin{bmatrix}1&-3&5&-2&1\\0&-5&7&-3&-2\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore R(A)=3$.

又$\because$ 在对A进行初等变换的过程中没有进行列变换.

不妨考虑取 $C_1.C_2.C_4$. 来求最高阶的非零子式.

即 $C=\begin{bmatrix}1&-3&-2\\-2&1&1\\-1&-7&-3\\3&-14&-9\end{bmatrix}$.

又 $C\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\ r_4-3r_1}]{r_2+2r_1}\begin{bmatrix}1&-3&-2\\0&-5&-3\\0&-10&-5\\0&-5&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-r_2}\begin{bmatrix}1&-3&-2\\0&-5&-3\\0&-10&-5\\0&0&0\end{bmatrix}$.

即 $R(C)=3$.

$\therefore$ 取 C 中 r_1. r_2. r_3. 求最高阶的非零子式.

即 $\begin{vmatrix}1&-3&-2\\-2&1&1\\-1&-7&-3\end{vmatrix}=[3+(-28)+3]-[2+7+(-18)]=(-22)+9=\cancel{-18}\ -13$.

95

珠海校区011学年度第一学期10级《线性代数》期中考试题

学院：地院　专业：10水文　姓名：梁冬梅　学号：10345025　评分：________

《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者，不授予学士学位。"

一、填空题（每小题3分，共30分）

1. 排列53142的逆序数是 ~~8~~ 7.

2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 102 \\ 3 & -4 & 297 \\ 2 & 2 & 203 \end{vmatrix} =$ 7.

3. 设3阶行列式$|a_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$中元素$a_{21}$的代数余子式$A_{21} =$ 1.

4. 设4阶行列式D_4的第2行元素分别为$1, -2, 3, 0$, 对应的余子式分别为$-3, 2, -1, 5$, 则$D_4 =$ 2.

5. n阶矩阵A可逆，且$|A| = a$, 则$|A^{-1}| =$ $\frac{1}{a}$, $|A^*| =$ a^{n-1}.

6. 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则$A$的秩$R(A) =$ 3.

7. 多项式$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 1 & x \\ 2 & 2 & 3 & x \\ -7 & 10 & 4 & 3 \\ x & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$中的常数项是 -3.

① $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
令 $x = 0$.
② 按行列展开 求$\cdots$项.
$\to -3\begin{vmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ x & -1 & 0 \end{vmatrix}$
$\to -3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 3x \cdots$
$-3x \cdots$

8. 设$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则$A =$ $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.　$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

9. 设矩阵A, B, C, X为同阶方阵,且A, B可逆, $AXB = C$, 则$X =$ $A^{-1}CB^{-1}$.

10. 设$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则$A^{-1} =$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-5} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

二、计算题（共70分）

1. 设A为3×3矩阵，$|A| = 2$, 把A按列分块为$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$其中$\alpha_j\ (j = 1, 2, 3)$是$A$的第$j$列, 求$|\alpha_3 + 3\alpha_1, -2\alpha_2, \alpha_3|$.(6分)

解: $|\alpha_3 + 3\alpha_1, -2\alpha_2, \alpha_3| \xlongequal{\text{将第一列拆分}} |\alpha_3, -2\alpha_2, \alpha_3| + |3\alpha_1, -2\alpha_2, \alpha_3|$

$= 0 + |3\alpha_1, -2\alpha_2, \alpha_3|$

$= 3\times(-2)|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3|$

$= -6\times2 \quad (\because |A| = 2, A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))$

$= -12$

2. 设A是5阶方阵, $|A| = \frac{1}{2}$, 则$|(2A)^{-1} + 3A^*|$的值. (8分)

解 $\because A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$

$\therefore A^* = |A|A^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$

$\therefore |(2A)^{-1} + 3A^*|$

$= |\frac{1}{2}A^{-1} + \frac{3}{2}A^{-1}|$

$= |2A^{-1}|$

$= 2^5|A^{-1}|$

$\because |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = 2$

$\therefore |(2A)^{-1} + 3A^*| = 2^5|A^{-1}| = 2^6 = 64$

3. 计算n阶行列式$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$. (10分)

解: $D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xrightarrow[(i=2,3,\cdots,n)]{r_1+r_i}$ 第一行提取公因式 $[a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

$\cancel{\xrightarrow[(i=2,3,\cdots,n)]{r_1+r_i} a+(n-1)b}$

$\xrightarrow[(i=2,3\cdots,n)]{c_i - c_1} [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{\text{按第1行展开}} [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} a-b & & & \\ & a-b & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-b \end{vmatrix}_{(n-1)}$

$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$

4. 设A为n阶方阵,且$A^3+3A^2+A-3E=O$.则$A+E$可逆吗？若可逆，则求出其逆阵.(10分)

解: $\because A^3+3A^2+A-3E=0$

即 $\cancel{A^2+A}\ (A^2+2A-E)(A+E)-2E=0$

$\therefore (A^2+2A-E)(A+E)=2E$

$\therefore \dfrac{A^2+2A-E}{2}(A+E)=E$

$\therefore A+E$ 可逆, 且 $(A+E)^{-1}=\dfrac{A^2+2A-E}{2}$

5. 求解矩阵方程(10分)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

解: 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=4\neq 0$

$\therefore A$ 可逆.

$(A,B)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\cancel{r_3\div(-2)}\ r_3\div(-2)]{r_2\div(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2-2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\because AX=B$

$\therefore X=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

6. 求矩阵$A=\begin{pmatrix}3&-1&-4&2\\1&0&-1&1\\-1&4&3&1\end{pmatrix}$的秩,并计算其一个最高阶非零子式.(10分)

解: $A=\begin{pmatrix}3&-1&-4&2\\1&0&-1&1\\-1&4&3&1\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\3&-1&-4&2\\-1&4&3&1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-3r_1\\r_3+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&-1&-1&-1\\0&4&2&2\end{pmatrix}\overset{r_3+4r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&-1&-1&-1\\0&0&-2&-2\end{pmatrix}$

$\therefore R(A)=3$.

取子式$\begin{vmatrix}3&-1&-4\\1&0&-1\\-1&4&3\end{vmatrix}$

$\because \begin{vmatrix}3&-1&-4\\1&0&-1\\-1&4&3\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_2]{r_1-3r_2}\begin{vmatrix}0&-1&-1\\1&0&-1\\0&4&2\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第1列}}-\begin{vmatrix}-1&-1\\4&2\end{vmatrix}=-2\neq0$

$\therefore \begin{vmatrix}3&-1&-4\\1&0&-1\\-1&4&3\end{vmatrix}$是A的一个最高阶非零子式.

$B=(A,b)=\begin{pmatrix}a&1&1&4\\1&b&1&3\\1&2b&1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&b&1&3\\0&1-ab&1-a&4-3a\\0&b&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&b&1&3\\0&1&1-a&4-2a\\0&b&0&1\end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix}1&b&1&3\\0&1&1-a&4-2a\\0&0&-(1-a)b&1-(4-2a)b\end{pmatrix}$ 若$R(A)=R(B)=3$,即$-(1-a)b\neq0$解得$a\neq1$且$b\neq0$.

这时方程组有唯一解.

i) 当$a=1$时, $B\sim\begin{pmatrix}1&b&1&3\\0&1&0&2\\0&0&0&1-2b\end{pmatrix}$ 当$1-2b=0$ 即$b=\frac12$时 $R(A)=R(B)=2<3$.无穷多解 B~ 通解为

当$1-2b\neq0$即$b\neq\frac12$时, $R(A)=2<3=R(B)$. 无解.

ii) $b=0$时, $B\sim\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&1-a&4-2a\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ $R(A)=2<3=R(B)$. 无解

7. 讨论a,b取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4\\x_1+bx_2+x_3=3\\x_1+2bx_2+x_3=4\end{cases}$$

(1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有无穷多解,并求出通解.(16分)

解: $\begin{pmatrix}a&1&1&4\\1&b&1&3\\1&2&1&4\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1&4\\1&b&1&3\\a&1&1&4\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&b-2&0&-1\\0&1-2a&1-a&4-4a\end{pmatrix}$

~~$D=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&2&1\end{vmatrix}$~~

$D=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&2b&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_2]{r_1-ar_2}\begin{vmatrix}0&1-ab&1-a\\1&b&1\\0&b&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1-ab&1-a\\b&0\end{vmatrix}=(1-a)b$

由克拉默法则得

当$D\neq0$即$a\neq1$且$b\neq0$时,非齐次线性方程组有唯一解.

~~∴当a=1或b=0时,方程组无解.~~

① 当$a=1$时, $B=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\1&b&1&3\\1&2b&1&4\end{pmatrix}\sim$

② 当$b=0$时 $B=\begin{pmatrix}a&1&1&4\\1&0&1&3\\1&0&1&4\end{pmatrix}$

~~当a≠1且b≠0时~~, 设该方程组的系数矩阵为A,增广矩阵为B.

$B=\begin{pmatrix}a&1&1&4\\1&b&1&3\\1&2b&1&4\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\r_2-ar_1\\r_3-r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&b&1&3\\0&1-ab&1-a&4-3a\\0&b&0&1\end{pmatrix}\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&b&1&3\\0&b&0&1\\0&1-ab&1-a&4-3a\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2\div b\\(\because b\neq0)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&b&1&3\\0&1&0&\frac1b\\0&1-ab&1-a&4-3a\end{pmatrix}$

~~又∵a≠1即1-a≠0 ∴当1-ab=0时,R(A)=R(B)=3=n,该方程组有唯一解.~~

$\overset{r_3-(1-ab)r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&b&1&3\\0&1&0&\frac1b\\0&0&1-a&\frac{4b-2ab-1}{b}\end{pmatrix}$

$a=1$时, $B\sim\begin{pmatrix}1&b&1&3\\0&1&0&\frac1b\\0&0&0&\frac{2b-1}{b}\end{pmatrix}$ 当$\frac{2b-1}{b}=0$即$b=\frac12$时 $R(A)=R(B)=2<3$,有无穷多解

当$b\neq\frac12$时,$R(A)\neq R(B)$,无解.

当$b=0$时, $B\sim\begin{pmatrix}1&b&1&3\\0&b&0&1\\0&1-ab&1-a&4-3a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&0&0&1\\0&1&1-a&4-3a\end{pmatrix}$

~~∵a≠1即1-a≠0 ∴R(A)=R(B)=3=n 此时方程组有唯一解.~~

$\sim\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&1-a&4-3a\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $R(A)\neq R(B)$ 无解.

综上所述,(1) 当$a\neq1$且$b\neq0$时,该方程组有唯一解.

(2) ~~当a=1或且b≠½时~~,该方程组无解时, ① $a=1$, $b\neq\frac12$; ② $b=0$

(3) ~~不存在~~有无穷多解~~的情况~~.

当$a=1$, $b=\frac12$时,通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ $(c\in R)$