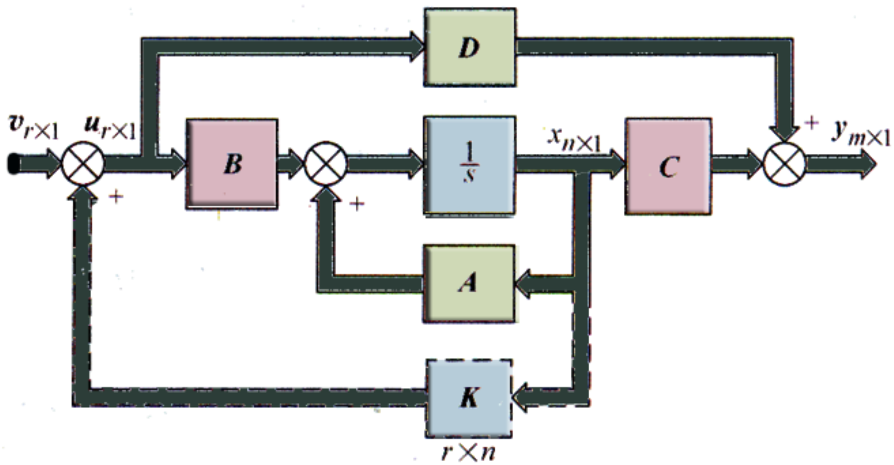
第五章 线性定常系统的综合

5.1 线性反馈控制系统的基本结构及其特性

5.1.1状态反馈

状态反馈是将系统的每一个状态变量乘以相应的反馈系数，然后反馈到输入端与参考输入相加形成控制律，作为受控系统的控制输入。

下（图一）是一个多输入—多输出系统状态反馈的基本结构。



图一　多输入—多输出系统的状态反馈结构

图中受控系统的状态空间表达式为：

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{aligned} \qquad (1)$$

式中 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^r$，$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m$，$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R}^{n\times r}$，$\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{D} \in \boldsymbol{R}^{m\times r}$

若$\boldsymbol{D}$=0，则受控系统：

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

简记为 $\sum_0 =$（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$）

状态线性反馈控制律 $\boldsymbol{u}$ 为：

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \qquad (3)$$

式中，v 为$r\times 1$ 维参考输人；K为 $r\times n$维状态反馈系数阵或状态反馈增益阵。对单输入系统，K为 $1\times n$维行矢量。

把式(3)代人式(1)整理可得状态反馈闭环系统的状态空间表达式:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + Bv \\ y &= (C + DK)x + Dv \end{aligned} \qquad (4)$$

若D=O，则

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + Bv \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad (5)$$

简记为 $\sum_K = ((A+BK),\ B,\ C)$ 。

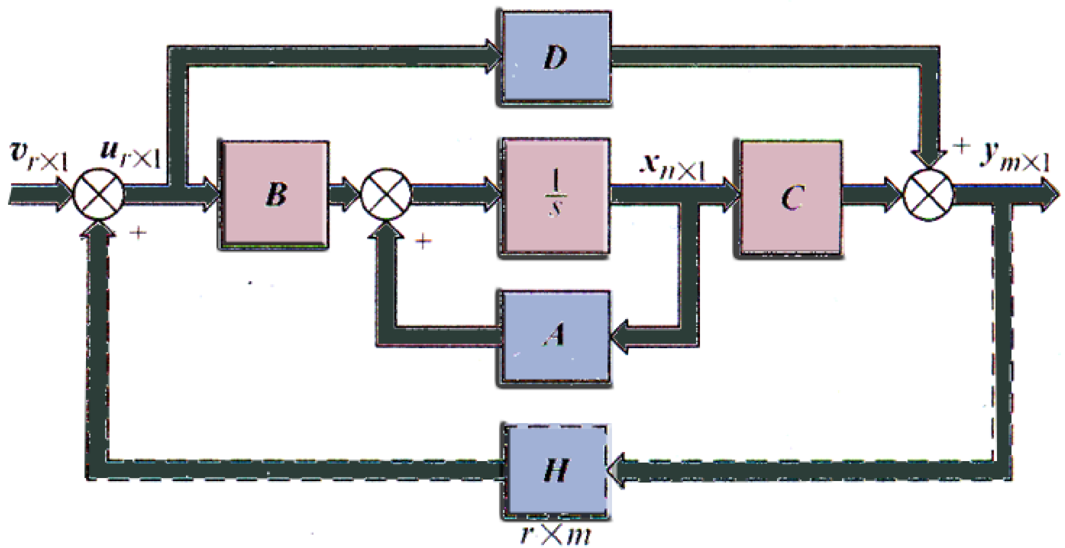
闭环系统的传递函数矩阵:

$$W_K(s) = C[sI - (A + BK)]^{-1}B \qquad (6)$$

比较开环系统 $\sum_0 = (A,\ B,\ C)$ 与闭环系统$\sum_K = ((A+BK),\ B,\ C)$可见，状态反馈阵K的引入，并不增加系统的维数，但可通过K的选择自由地改变闭环系统的特征值，从而使系统获得所要求的性能。

5.1.2　输出反馈

输出反馈是采用输出矢量y构成线性反馈律。在经典控制理论中主要讨论这种反馈形式。（图二）示出多输入—多输出系统输出反馈的基本结构。



多输入—多输出系统的输出反馈结构

图二

受控系统 $\sum_0 = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{aligned} \tag{7}$$

或

$$\sum_0 = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{8}$$

输出线性反馈控制律为:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{v} \tag{9}$$

其中日为 $r \times m$ 维输出反馈增益阵。对单输出系统，H为 $r \times 1$ 维列矢量。

闭环系统状态空间表达式可由式(7)代入式(9)得:

$$u = H(Cx + Du) + v = HCx + HDu + v \tag{10}$$

整理得:

$$u = (I - HD)^{-1}(HCx + v) \tag{11}$$

再把式(1 1)代入式(7)求得:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A + B(I - HD)^{-1}HC]x + B(I - HD)^{-1}v \\ y &= [C + D(I - HD)^{-1}HC]x \end{aligned} \tag{12}$$

若D=0，则

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BHC)x + Bv \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{13}$$

简记 $\sum_H = ((A+BHC), B, C)$ 由式(13)可见，通过选择输出反馈增益阵日也可以改变闭环系统的特征值，从而改变系统的控制特性。

输出反馈系统的传递函数矩阵为:

$$W_H(s) = C[sI - (A + BHC)]^{-1}B \tag{14}$$

若受控系统的传递函数矩阵为:

$$W_0(s) = C(sI - A)^{-1}B \tag{15}$$

$W_0(s)$ 和 $W_H(s)$ 存在下列关系:

$$W_H(s) = [I - W_0(s)H]^{-1}W_0(s) \tag{16}$$

或

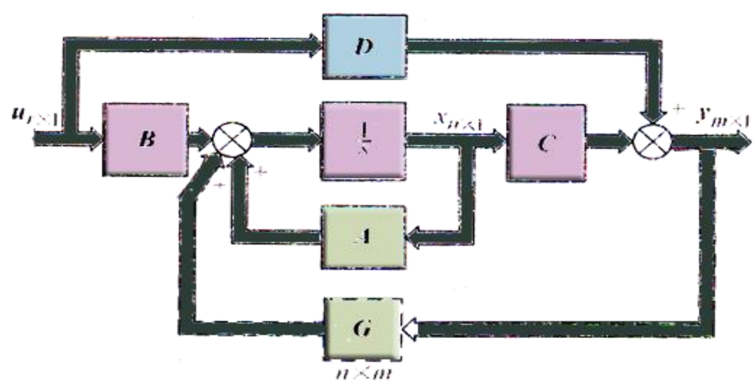
$$W_H(s) = W_0(s)[I - HW_0(s)]^{-1} \tag{17}$$

比较上述两种基本形式的反馈可以看出，输出反馈中的HC与状态反馈中的K相当。但由于 $m<$ 所以H 可供选择的自由度远比K小，因而输出反馈只能相当于一种部分状态反馈一只有当 $C=I$ 时 $HG=K$ 才能等同于全状态反馈。因此，在不增加补偿器的条件下，输出反馈的效果撮然不如状态反馈系统好。但输出反馈在技术实现上的方便性则足其突出优点。

5.1.3 从输出到状态矢量导数反馈

从系统输出到状态矢量导数 $\dot{x}$ 的线性反馈形式在状态观测器获得应用。

（图三）表示这种反馈结构:



多输入一多输出系统从输出到 $\dot{x}$ 反馈的结构

设受控系统$\sum_0 = (A, B, C, D)$:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \\
y &= Cx + Du
\end{aligned}
\tag{18}
$$

加入从输出y到状态矢量导数 y的反馈增益阵 $G \in R^{n \times m}$,可得闭环系统:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Gy + Bu \\
y &= Cx + Du
\end{aligned}
\tag{19}
$$

将式(19)中的y代入$\dot{x}$整理得:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= (A + GC)x + (B + GD)u \\
y &= Cx + Du
\end{aligned}
\tag{20}
$$

若$D=0$，则

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A+GC)x+Bu \\ y &= Cx\end{aligned} \tag{21}$$

记作$\sum_G=((A+GC),B,C)$。

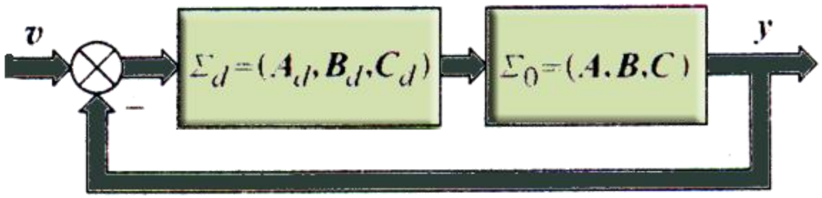
闭环系统的传递函数矩阵:

$$W_G(s)=C[sI-(A+GC)]^{-1}B \tag{22}$$

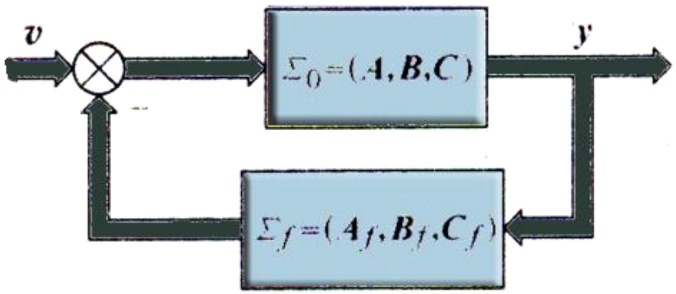
5.1.4 动态补偿器

上述三种反馈基本结构的共同点是，不增加新的状态变量，系统开环与闭环同维。其次，反馈增益阵都是常矩阵，反馈为线性反馈。在更复杂的情况下，常常要通过引入一个**动态子系统**来改善系统性能，这种动态子系统，称为**动态补偿器**。

它与受控系统的连接方式如图5．4所示，其中图a为串联连接，图b为反馈连接。



a)



b)

带动态补偿器的闭环系统结构

5.1.5 闭环系统的能控性与能观性

定理5.1.1 状态反馈不改变受控系统 $\Sigma_0=(A, B, C)$ 的能控性。

但不保证系统的能观性不变。

证明　　只证能控性不变。这只要证明它们的能控判别矩阵同秩即可。

受控系统Σ_0和状态反馈系统Σ_0的能控判别阵为:

$$Q_{c0} = (B,\ AB,\ A^2B,\ \cdots,\ A^{n-1},\ B) \tag{23}$$

$$Q_{ck} = (B,\ (A+BK)B,\ (A+BK)^2\ B,\ \cdots,\ (A+BK)^{n-1}B) \tag{24}$$

实际上，受控系统$\Sigma_0=(A,\ b,\ c,\ d)$ 的传递函数为:

$$W_0(s) = c(sI-A)^{-1}b + d \tag{25}$$

将Σ_0的能控标准I型代入上式，得:

$$W_0(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} + d$$

$$= \frac{ds^n + (b_{n-1} + da_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (b_1 + da_1)s + (b_0 + da_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{26}$$

引入状态反馈后闭环系统的传递函数为:

$$W_k(s) = \boldsymbol{c}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{bK})]^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}$$

$$= \frac{[(b_{n-1} + da_{n-1}) - d(a_{n-1} - k_{n-1})]s^{n-1} + \cdots + [(b_0 + da_0) - d(a_0 - k_0)]}{s^n + (a_{n-1} - k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 - k_1)s + (a_0 - k_0)} + d$$

$$= \frac{ds^n + (b_{n-1} + da_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (b_1 + da_1)s + (b_0 + da_0)}{s^n + (a_{n-1} - k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 - k_1)s + (a_0 - k_0)} \tag{27}$$

定理5.1.2 输出反馈不改变受控系统的能控性和能观性。

证明　　关于能控性不变。因为

$$\dot{x} = (A + BHC)x + Bu \tag{28}$$

若把(HC)看成等效的状态反馈阵K，那么状态反馈便保持受控系统的能控性不变。

关于能观性不变。由能观判别矩阵

$$Q_{00} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \tag{29}$$

和

$$Q_{0H} = \begin{pmatrix} C \\ C(A + BHC) \\ \vdots \\ C(A + BHC)^{n-1} \end{pmatrix} \tag{30}$$

5.2 极点配置问题

5.2.1采用状态反馈

定理5.2.1 采用状态反馈对系统 $\Sigma_0=(A, b, c)$任意配置极点的充要条件是Σ_0完全能控。

证明 只证充分性。若Σ_0完全能控，通过状态反馈必成立

$$\det[\lambda I-(A+bK)]=f^*(\lambda) \tag{31}$$

式中，$f^*(\lambda)$ 为期望特征多项式。

$$f^*(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i^*)=\lambda^n+a_{n-1}^*\lambda^{n-1}+\cdots+a_1^*\lambda+a_0^* \tag{32}$$

式中，$\boldsymbol{\lambda}_i^*$ （$i=1,2,\cdots,n$）为期望的闭环极点(实数极点或共轭复数极点)。

1)若Σ_0完全能控，必存在非奇异变换：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}_{c\mathrm{I}}\bar{\boldsymbol{x}}$$

能将Σ_0化成能控标准I型：

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} &= \bar{\boldsymbol{A}}\,\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{b}}u \\ y &= \bar{\boldsymbol{c}}\,\bar{\boldsymbol{x}} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

式中

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}_{c\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{c\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}_{c\mathrm{I}}^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_{c1} = (b_0, \quad b_1, \quad \cdots, \quad b_{n-1})$$

受控系统$\sum_0$的传递函数为:

$$\boldsymbol{W}_0(s) = \bar{\boldsymbol{c}}(s\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\bar{\boldsymbol{b}} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{34}$$

2)加入状态反馈增益阵:

$$\bar{\boldsymbol{K}} = (\bar{k}_0, \quad \bar{k}_1, \quad \cdots, \quad \bar{k}_{n-1}) \tag{35}$$

可求得对 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的闭环状态空间表达式:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} &= (\bar{\boldsymbol{A}} + \bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{K}})\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \bar{\boldsymbol{c}}\bar{\boldsymbol{x}} \end{aligned} \tag{36}$$

式中

$$\bar{\boldsymbol{A}}+\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{K}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_0-\bar{k}_0) & -(a_1-\bar{k}_1) & -(a_2-\bar{k}_2) & \cdots & -(a_{n-1}-\bar{k}_{n-1}) \end{pmatrix}$$

闭环特征多项式为:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \left|\lambda \boldsymbol{I}-(\bar{\boldsymbol{A}}+\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{K}})\right| \\ &= \lambda^n+(a_{n-1}-\bar{k}_{n-1})\lambda^{n-1}+\cdots+(a_1-\bar{k}_1)\lambda+(a_0-\bar{k}_0) \end{aligned} \tag{37}$$

闭环传递函数为:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{W}_k(s) &= \bar{\boldsymbol{c}}[s\boldsymbol{I} - (\bar{\boldsymbol{A}} + \bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{K}})]^{-1}\bar{\boldsymbol{b}} \\
&= \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + (a_{n-1} - \bar{k}_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 - \bar{k}_1)s + (a_0 - \bar{k}_0)}
\end{aligned} \tag{38}
$$

3)使闭环极点与给定的期望极点相符，必须满足:

$$f(\lambda) = f^*(\lambda)$$

由等式两边 λ 同次幂系数对应相等. 可解出反馈阵各系数:

$$\bar{k}_i = a_i - a_i^*\ (i = 0, 1, \cdots, n-1) \tag{39}$$

于是得:

$$\bar{K} = [\,a_0 - a_0^*,\quad a_1 - a_1^*,\quad \cdots,\quad a_{n-1} - a_{n-1}^*\,]$$

4)最后，把对应于 $\bar{x}$的 $\bar{K}$，通过如下变换，得到对应于状态 x 的 K：

$$K = \bar{K} T_{cl}^{-1}$$

这是由于 $u = v + \bar{K}\bar{x} = v + KT_{cl}^{-1}x$ 的缘故。

5.2.2 采用输出反馈

定理5.2.2 对完全能控的单输入一单输出系统 $\Sigma_0 = (A, b, c)$，不能采用输出线性反馈来实现闭环系统极点的任意配置。

证明 对单输入一单输出反馈系统 $\Sigma_h = ((A + bhc), b, c)$，闭环传递函数为：

$$W_h(s) = c[sI - (A + bhc)]^{-1}b = \frac{W_0(s)}{1 + hW_0(s)} \qquad (40)$$

在根轨迹上

定理5.2.3 对完全能控的单输入—单输出系统 $\Sigma_0=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 通过带动态补偿器的输出反馈实现极点任意配置的充要条件是:

1) Σ_0 完全能观。

2)动态补偿器的阶数为n—1。

5.2.3 采用从输出到状态导数的反馈

定理5.2.4 对系统 $\Sigma_0=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 采用从输出到 的线性反馈实现闭环极点任意配置的充要条件是Σ_0完全能观。

证明 根据对偶原理，如果 $\Sigma_0=(A,b,c)$ 能观．则 $\tilde{\Sigma}_0=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})$必能控，因而可以任意配置 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}})$ 的特征值，，而 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}})$的特征值和的特征值相同，又因为 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$

$$(A^{T}+c^{T}G^{T})^{T}=A+Gc$$

因此，对 $(A^{T}+c^{T}G^{T})^{T}$ 任意配置极点就等价于对 $A+Gc$ 任意配置极点。于是设计输出反馈阵 G 的问题便转化成对其对偶系统 Σ_0 设计状态反馈阵 K 的问题。具体步骤如下：

(1)取线性变换：

$$x=T_{0\text{II}}\bar{x} \tag{41}$$

式中，$T_{0\text{II}}$ 为能将系统化成能观标准Ⅱ型的变换矩阵。

将系统 $\Sigma_0=(A,b,c)$ 化成能观标准Ⅱ型：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\bar{x}}&=\bar{A}\bar{x}+\bar{b}u\\ y&=\bar{c}\bar{x}\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

式中

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}_{0\,\mathrm{II}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{0\,\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}_{0\,\mathrm{II}}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{c}} = c T_{0\,\mathrm{II}} = (0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1)$$

(2)引入反馈阵 $\bar{\boldsymbol{G}} = [\bar{g}_0 \quad \bar{g}_1 \quad \cdots \quad \bar{g}_{n-1}]$ 后，得闭环系统矩阵：

$$\bar{A} + \bar{G}\bar{c} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -(a_0 - \bar{g}_0) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -(a_1 - \bar{g}_1) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -(a_2 - \bar{g}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -(a_{n-1} - \bar{g}_{n-1}) \end{pmatrix} \tag{43}$$

和闭环特征多项式:

$$f(\lambda) = |\lambda I - (\bar{A} + \bar{G}\bar{c})| = \lambda^n + (a_{n-1} - \bar{g}_{n-1})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_0 - \bar{g}_0) \tag{44}$$

(3)由期望极点得期望特征多项式:

$$f^*(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i^*) = \lambda^n + a_{n-1}^*\lambda^{n-1} + \cdots + a_1^*\lambda + a_0^*$$

(4)比较 $f(\lambda)$ 与 $f^*(\lambda)$ 各对应项系数，可解出：

$$\bar{g}_i = a_i - a_i^*, i = 0, 1, \cdots, n-1$$

即

$$\bar{\boldsymbol{G}} = (a_0 - a_0^*,\quad a_1 - a_1^*,\quad \cdots,\quad a_{n-1} - a_{n-1}^*)^{\mathrm{T}} \tag{45}$$

(5)将在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 求得的 $\boldsymbol{G}$ 变换到 $\boldsymbol{x}$ 状态下便得：

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{T}_{0\mathrm{II}}\bar{\boldsymbol{G}} \tag{46}$$

和求状态反馈阵 $\boldsymbol{K}$ 的情况类似，当系统的维数较低时，只要系统能观，也可以不化成能观标准Ⅱ型，通过直接比较特征多项式系数来确定 $\boldsymbol{G}$ 矩阵。

5.3　系统镇定问题

定理5.3.1对系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 采用状态反馈能镇定的充要条件是其不能控子系统为渐近稳定。

证明　(1)设系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 不完全能控，因此通过线性变换可将其按能控性分解为：

$$\tilde{A} = R_c^{-1} A R_c = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \tilde{B} = R_c^{-1} B = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{C} = C R_c = (\tilde{C}_1, \quad \tilde{C}_2) \qquad (1)$$

式中，$\tilde{\Sigma}_c = (\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$ 为能控子系统；$\tilde{\Sigma}_{\bar{c}} = (\tilde{A}_{22}, 0, \tilde{C}_2)$ 为不能控子系统。

(2)由于线性变换不改变系统的特征值，所以有：

$$\det[sI - A] = \det[sI - \tilde{A}]$$

$$= \det\begin{pmatrix} sI_1 - \tilde{A}_{11} & -\tilde{A}_{12} \\ 0 & sI_2 - A_{22} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(3)由于 由于 $\tilde{\Sigma}_0 = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ 与 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 在能控性和稳定性上等价。

考虑对 $\tilde{\Sigma}_0$ 引入状态反馈阵：

$$\tilde{K} = [\tilde{K}_1 \quad \tilde{K}_2] \qquad (3)$$

于是得闭环系统的状态矩阵：

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} [\tilde{K}_1 \quad \tilde{K}_2]$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{K}_1 & \tilde{A}_{12} + \tilde{B}_1\tilde{K}_2 \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

和闭环特征多项式：

$$\det[sI-(\widetilde{A}+\widetilde{B}\widetilde{K})]=\det[sI_1-(\widetilde{A}_{11}+\widetilde{B}_1\widetilde{K}_1)]\cdot\det[sI_2-\widetilde{A}_{22}] \quad (5)$$

比较式(5)与式(2)可见，引入状态反馈阵$\widetilde{K}$，只能通过选择$\widetilde{K}_1$使$(\widetilde{A}_{11}+\widetilde{B}_1\widetilde{K}_1)$的特征值均具有负实部，从而使$\widetilde{\sum}_c$，这个子系统为渐近稳定。但$\widetilde{K}$的选择并不能影响$\widetilde{\sum}_{\bar{c}}$的特征值分布。因此，仅当$\widetilde{A}_{22}$的特征值均具有负实部，即不能控子系统$\widetilde{\sum}_{\bar{c}}$为渐近稳的此时整个系统$\widetilde{\sum}_0$才是状态能镇定的。

定理5.3.2　系统$\sum_0=(A,B,C)$通过输出反馈能镇定的充要条件是$\sum_0$结构分解中的能控且能观子系统是输出反馈能镇定的，其余子系统是渐近稳定的。

证明（1）$\sum_0=(A,B,C)$对进行能控性能观性结构分解，有：

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}\widetilde{A}_{11} & 0 & \widetilde{A}_{13} & 0\\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} & \widetilde{A}_{23} & \widetilde{A}_{24}\\ 0 & 0 & \widetilde{A}_{33} & 0\\ 0 & 0 & \widetilde{A}_{43} & \widetilde{A}_{44}\end{pmatrix},\qquad \widetilde{B}=\begin{pmatrix}\widetilde{B}_1\\ \widetilde{B}_2\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ \widetilde{C}=(\widetilde{C}_1\quad 0\quad \widetilde{C}_3\quad 0) \tag{6}$$

$\widetilde{\sum}_0=(\widetilde{A},\ \widetilde{B},\ \widetilde{C})$ 与 $\sum_0=(A,\ B,\ C)$

(2)因为 能控性和能观性和能镇定性 上完全等价，所以对 $\widetilde{\sum}_0$ 引入输出反馈阵H，可得闭环系统的状态矩阵：

$$\widetilde{A}+\widetilde{B}\widetilde{H}\widetilde{C}=\begin{pmatrix}\widetilde{A}_{11} & 0 & \widetilde{A}_{13} & 0\\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} & \widetilde{A}_{23} & \widetilde{A}_{24}\\ 0 & 0 & \widetilde{A}_{33} & 0\\ 0 & 0 & \widetilde{A}_{43} & \widetilde{A}_{44}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\widetilde{B}_1\\ \widetilde{B}_2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\widetilde{H}(\widetilde{C}_1,\quad 0,\quad \widetilde{C}_3,\quad 0)$$

$$
= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{H}\tilde{C}_1 & 0 & \tilde{A}_{13} + \tilde{B}_1\tilde{H}\tilde{C}_3 & 0 \\ \tilde{A}_{21} + \tilde{B}_2\tilde{H}\tilde{C}_1 & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} + \tilde{B}_2\tilde{H}\tilde{C}_3 & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{pmatrix} \tag{7}
$$

和闭环系统特征多项式:

$$
\det[s\boldsymbol{I} - (\tilde{\boldsymbol{A}} + \tilde{\boldsymbol{B}}\tilde{\boldsymbol{H}}\tilde{\boldsymbol{C}})]
$$

$$
= \det[s\boldsymbol{I} - (\tilde{\boldsymbol{A}}_{11} + \tilde{\boldsymbol{B}}_1\tilde{\boldsymbol{H}}\tilde{\boldsymbol{C}}_1)] \cdot \det[s\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{A}}_{22}] \cdot \det[s\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{A}}_{33}] \cdot \det[s\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{A}}_{44}] \tag{8}
$$

式(8)表明，当且仅当 $(\tilde{\boldsymbol{A}}_{11} + \tilde{\boldsymbol{B}}_1\tilde{\boldsymbol{H}}\tilde{\boldsymbol{C}}_1)$, $\tilde{\boldsymbol{A}}_{22}$, $\tilde{\boldsymbol{A}}_{33}$, $\tilde{\boldsymbol{A}}_{44}$ 的特征值均具负实部时，闭环系统才为渐近稳定。定理得证。

定理5.3.3 对系统 $\sum_0 = (A, B, C)$ 采用从输出到 $\dot{x}$ 反馈实现镇定的充要条件是$\sum_0$的不能观子系统为渐近稳定。

证明 (1)将系统 $\sum_0 = (A, B, C)$ 进行能观性分解，得:

$$\bar{A} = R_0^{-1} A R_0 = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}, \bar{B} = R_0^{-1} B = \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\bar{C} = C R_0 = (\bar{C}_1, \quad 0)$$

式中，$\overline{\sum}_0 = (\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1)$ 为能观子系统；$\overline{\sum}_{\bar{0}} = (\bar{A}_{22}, \bar{B}_2, 0)$ 为不能观子系统。

开环系统特征多项式为:

$$\det[sI - \bar{A}] = \det\begin{pmatrix} sI_1 - \bar{A}_{11} & 0 \\ -\bar{A}_{21} & sI_2 - \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$= \det[sI_1 - \bar{A}_{11}] \cdot \det[sI_2 - \bar{A}_{22}]$$

(2)由于 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ 与 (A, B, C) 在能控性和稳定性上等价，考虑对 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ 引入从输出到 $\dot{x}$ 的反馈阵 $\bar{G} = (\bar{G}_1, \bar{G}_2)^T$，于是有:

$$\bar{A} + \bar{G}\bar{C} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 \end{pmatrix} (\bar{C}_1, \quad 0)$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} + \bar{G}_1\bar{C}_1 & 0 \\ \bar{A}_{21} + \bar{G}_2\bar{C}_1 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \tag{11}$$

和

$$\det[sI - (\bar{A} + \bar{G}\bar{C})] = \det\begin{pmatrix} sI_1 - (\bar{A}_{11} + \bar{G}_1\bar{C}_1) & 0 \\ -(\bar{A}_{21} + \bar{G}_2\bar{C}_1) & sI_2 - \bar{A}_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \det[sI_1 - (\bar{A}_{11} + \bar{G}_1\bar{C}_1)] \cdot \det[sI_2 - \bar{A}_{22}] \tag{12}$$

式(12)表明，引入反馈阵 $\bar{G}$，只影响 $(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1)$ 的特征值。

5.4 系统解耦问题

解耦问题是多输入一多输出系统综合理论中的重要组成部分?其没汁目的是寻求适当的控制规律，使输入输出相互关联的多变量系统实现每一个输出仅受相应的一个输入所控制，每一个输入也仅能控制相应应的一个输出，这样的问题称为**解耦问题**。

设$\Sigma_0 = (A, B, C)$一个 m 维输入 m 维输出的受控系统，即

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad (1)$$

若其传递函数矩阵：

$$W_0(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} W_{11}(s) & & 0 \\ & W_{22}(s) & \\ 0 & \ddots & \\ & & W_{mm}(s) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

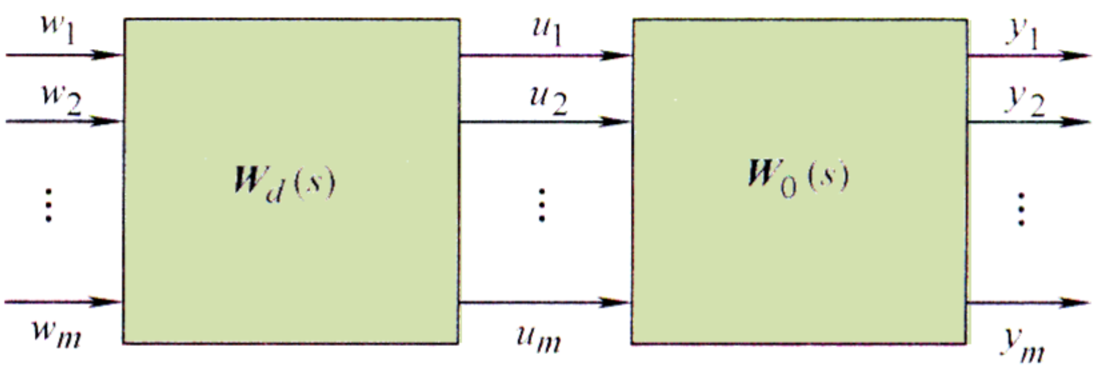
实现系统解耦，目前主要有两种方法：

(1)前馈补偿器解耦

(2)状态反馈解耦

5.4.1 前馈补偿器解耦

前馈补偿器解耦的框图如下图所示。



前馈补偿器解耦系统框图

根据串联组合系统可写出整个系统的传递函数矩阵:

$$\boldsymbol{W}(s) = \boldsymbol{W}_0(s)\boldsymbol{W}_d(s) \tag{3}$$

式中,$\boldsymbol{W}(s)$ 为串接补偿器后系统的传递函数矩阵。

$$\boldsymbol{W}(s) = \begin{pmatrix} W_{11}(s) & & & \\ & W_{22}(s) & & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & & \ddots & \\ & & & W_{mm}(s) \end{pmatrix} \tag{4}$$

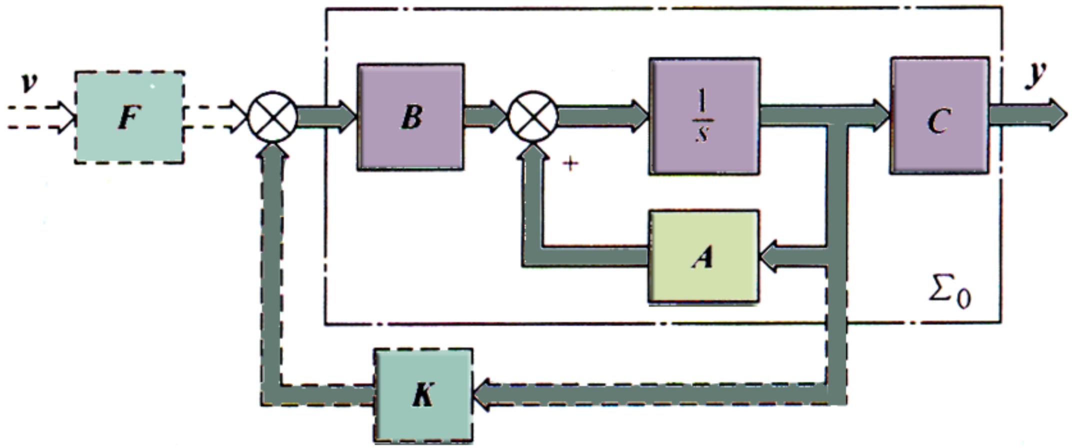
显然，只要 $\boldsymbol{W}_0^{-1}(s)$ 存在，则串联补偿器的传递函数矩阵为:

$$\boldsymbol{W}_d(s) = \boldsymbol{W}_0^{-1}(s)\boldsymbol{W}(s) \tag{5}$$

5.4.2　状态反馈解耦

1.状态反馈解耦中的几个特征量

状态反馈解耦系统的结构如下图所示：



状态反馈解耦系统

为了便于讨论状态反馈解耦的条件，首先定义几个特征量。

1)定义 d_i，是满足不等式：

$$\boldsymbol{c}_i \boldsymbol{A}^l \boldsymbol{B} \neq 0 \quad (l = 0, 1, \cdots, m-1) \tag{6}$$

且介于0到 $m-1$ 之间的一个最小整数l。

式中，c_i为系统输出矩阵c中的第i行向量 （$i = 1, 2, \cdots, m$） 的下标i表示行数。因此，d_i

$$D = \begin{bmatrix} c_1 A^{d1} \\ c_2 A^{d2} \\ \\ c_m A^{dm} \end{bmatrix} \qquad E = DB = \begin{bmatrix} c_1 A^{d1} B \\ c_2 A^{d2} B \\ \\ c_m A^{dm} B \end{bmatrix} \qquad L = DA = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1+1} \\ c_2 A^{d_2+1} \\ \\ c_m A^{dm+1} \end{bmatrix}$$

2. 能解耦性判据

定理5.4.1　受控系统 $\Sigma_0=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 采用状态反馈能解耦的充要条件是 $m\times m$ 维矩阵 $\boldsymbol{E}$ 为非奇异。即

$$\det\boldsymbol{E}=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{A}^{d_1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{A}^{d_2}\boldsymbol{B}\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}_m\boldsymbol{A}^{d_m}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\neq 0 \qquad (7)$$

3. 积分型解耦系统

定理5.4.2 若系统 $\Sigma_0 = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$是状态反馈能解耦的，则闭环系统

$\Sigma_p = (\boldsymbol{A}_p, \boldsymbol{B}_p, \boldsymbol{C}_p)$：

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_p\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{BF}\boldsymbol{v} \\
\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}_p\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

是一个积分型解耦系统。其中状态反馈矩阵为：

$$\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{L} \tag{9}$$

输入变换矩阵为：

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}^{-1} \tag{10}$$

闭环系统的传递函数为:

$$W_{K,F}(s)=C[sI-(A+BK)]^{-1}BF=\begin{pmatrix} \frac{1}{s^{d_1+1}} & & & \\ & \frac{1}{s^{d_2+1}} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{s^{d_m+1}} \end{pmatrix} \quad (11)$$

式(11)表明，用式(9)和式(10)实现(K，F)解耦的系统，其每个子系统都是相当于一个 (d_i+1)阶积分器的独立子系统。

4．能解耦标准形

定理5.4.3　状态反馈（$\hat{K}$，$\hat{F}$）使系统 $\hat{\Sigma}=(\hat{A},\hat{B},\hat{C})$ 解耦并任意配置极点的充要条件是，它们具有以下形式:

$$\hat{\boldsymbol{K}} = \begin{pmatrix} k_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & k_m \end{pmatrix} \qquad \textbf{(对角块)}$$

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \begin{pmatrix} f_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & f_m \end{pmatrix} \qquad (12)$$

式中，$k_i = k_{i0} \cdots k_{id_i}$，$f_i \neq 0$，$i = 1, 2 \cdots, m$。

5. 状态反馈解耦的设计步骤

综上所述，用状态反馈实现系统解耦的设计步骤可归纳如下：

1)检验系统是否满足式(7)所述充要条件。

2)按照式(9)和式(10)计算状态反馈矩阵K和输入变换阵F，将系统化成积分型解耦形式。

3)按照式(12)对各独立子系统采用附加状态反馈，将其极点配置为期望值。

5.5 状态观测器

5.5.1 状态观测器定义

设线性定常系统$\Sigma_0=(A, B, C)$的状态矢量X不能直接检测。如果动态系统$\hat{\Sigma}$以Σ_0的输入u和输出y作为其输入量，能产生一组输出$\hat{x}$渐近于x，即$\lim\limits_{t\to\infty}|x-\hat{x}|=0$，则称$\hat{\Sigma}$为$\Sigma_0$的一个状态观测器。

根据上述定义，可得构造观测器的原则是：

1)观测器$\hat{\Sigma}$应以Σ_0的输入u和输出y为其输入量。

2)为满足$\lim\limits_{t\to\infty}|x-\hat{x}|=0$必须完全能观，或其不能观子系统是渐近稳定的。

3) $\hat{\Sigma}$的输出$\hat{x}$应以足够快的速度渐近于x，即$\hat{\Sigma}$应有足够宽的频带。但从抑制干扰角度看，又希望频带不要太宽。因此，要根据具体情况予以兼顾。

4) $\hat{\Sigma}$ 在结构上应尽量简单。即具有尽可能低的维数，以便于物理实现：

5.5.2　状态观测器的存在性

定理5.5.1　　对线性定常系统$\Sigma_0=(A, B, C)$，状态观测器存在的充要条件是Σ_0，的不能观子系统为渐近稳定。

证明　　(1)设$\Sigma_0=(A, B, C)$不完全能观，可进行能观性结构分解。这里，不妨设$\Sigma_0=(A, B, C)$已具有能观性分解形式。即

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}_{\bar{0}}\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_1,\quad \boldsymbol{0})\qquad(13)$$

(2)构造状态观测器 $\hat{\Sigma}$。设 $\hat{\boldsymbol{x}}=(\hat{\boldsymbol{x}}_0, \hat{\boldsymbol{x}}_{\bar{0}})^{\mathrm{T}}$ 为状态 $\boldsymbol{x}$ 的估值，$G=(G_1,\quad G_2)^{\mathrm{T}}$ 为调节 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 渐近于 $\boldsymbol{x}$ 的速度的反馈增益矩阵。于是得观测器方程：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x}) \tag{14}$$

或

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + Bu + GCx$$

定义 $\tilde{x} = x - \hat{x}$ 为状态误差矢量，可导出状态误差方程:

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_0 - \dot{\hat{x}}_0 \\ \dot{x}_{\bar{0}} - \dot{\hat{x}}_{\bar{0}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}x_0 + B_1u \\ A_{21}x_0 + A_{22}x_{\bar{0}} + B_2u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (A_{11} - G_1C_1)\hat{x}_0 + B_1u + G_1C_1x_0 \\ (A_{21} - G_2C_1)\hat{x}_0 + A_{22}\hat{x}_{\bar{0}} + B_2u + G_2C_1x_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (A_{11} - G_1C_1)(x_0 - \hat{x}_0) \\ (A_{21} - G_2C_1)(x_0 - \hat{x}_0) + A_{22}(x_{\bar{0}} - \hat{x}_{\bar{0}}) \end{pmatrix} \tag{15}$$

(3)确定使$\hat{x}$渐近于x的条件。

由上式，得:

$$\dot{x}_0 - \dot{\hat{x}}_0 = (A_{11} - G_1C_1)(x_0 - \hat{x}_0) \tag{16}$$

$$\dot{x}_{\bar{0}} - \dot{\hat{x}}_{\bar{0}} = (A_{21} - G_2C_1)(x_0 - \hat{x}_0) + A_{22}(x_{\bar{0}} - \hat{x}_{\bar{0}}) \tag{17}$$

由式(16)可知，通过适当选择G_1，可使$(A_{11} - G_1C_1)$的特征值均具负实部，因而有:

$$\lim_{t\to\infty}(x_0 - \hat{x}_0) = \lim_{t\to\infty} e^{(A_{11}-G_1C_1)t}[x_0(0) - \hat{x}_0(0)] = 0 \tag{18}$$

同理，由式（17)可得其解为:

$$x_{\bar{0}} - \hat{x}_{\bar{0}} = e^{A_{22}t}[x_{\bar{0}}(0) - \hat{x}_{\bar{0}}(0)] + \int_0^t e^{A_{22}(t-\tau)}(A_{21} - G_2C_1)e^{(A_{11}-G_1C_1)\tau}[x_0(0) - \hat{x}_0(0)]d\tau \tag{19}$$

由于 $\lim\limits_{t\to\infty} e^{(A_{11}-G_1C_1)t}=0$ ，因此仅当

$$\lim_{t\to\infty} e^{A_{22}t} = 0 \tag{20}$$

成立时，才对任意 $x_{\bar{0}}(0)$ 和 $\hat{x}_{\bar{0}}(0)$，有:

$$\lim_{t\to\infty}(x_{\bar{0}} - \hat{x}_{\bar{0}}) = 0 \tag{21}$$

而 $\lim\limits_{t\to\infty} e^{A_{22}t}=0$ 与 A_{22}特征值均具有负实部等价。只有当Σ_0=(A，B，C)的不能观子系统渐近稳定时，才能使 $\lim\limits_{t\to\infty}(x-\hat{x})=0$。定理得证。

5.5.3 状态观测器的实现

定理5.5.2 若线性定常系统 Σ_0=(A，B，c) 完全能观，则其状态矢量 x可由输出 y和输入 u进行重构。

证明　将输出方程t逐次求导，代以状态方程并整理可得：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \\
\dot{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\
\ddot{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} \\
&\vdots \\
\boldsymbol{y}^{(n-1)} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^{(n-2)} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^{(n-3)} - \cdots - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

将各式等号左边用矢量z表示，则有：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \dot{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}^{(n-1)} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^{(n-2)} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^{(n-3)} - \cdots - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1} \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

若系统完全能观，rank$N=n$，则有：

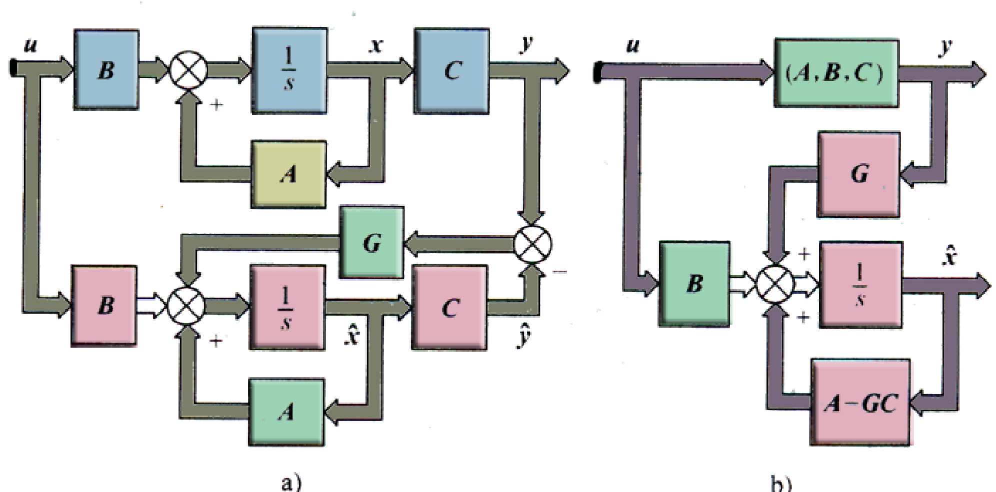
$$x = (N^{\mathrm{T}}N)^{-1}N^{\mathrm{T}}z \tag{24}$$

根据下图可得状态观测器方程：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - \hat{y}) = A\hat{x} + Bu + Gy - GC\hat{x}$$

即

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + Gy + Bu \tag{25}$$



渐近观测器

5.5.4 反馈矩阵G的设计

为了讨论状态估值主趋近于状态真值工的渐近速度，引入状态误差矢量：

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}} \tag{26}$$

可得状态误差方程：

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\hat{\boldsymbol{x}}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \\ &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}) \end{aligned} \tag{27}$$

即

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C})\tilde{\boldsymbol{x}} \tag{28}$$

式(28)是一个关于$\tilde{\boldsymbol{x}}$ 的齐次微分方程，其解为：

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{C})t}\tilde{\boldsymbol{x}}(0), \quad t \geqslant 0 \tag{29}$$

5.5.5 降维观测器（介绍）

以上介绍的观测器是建立在对原系统模拟基础上的，其维数和受控系统维数相同，称**全维观测器**。实际上，系统的输出矢量y总是能够测量的。因此，可以利用系统的输出矢量y来直接产生部分状态变量，从而降低观测器的维数。

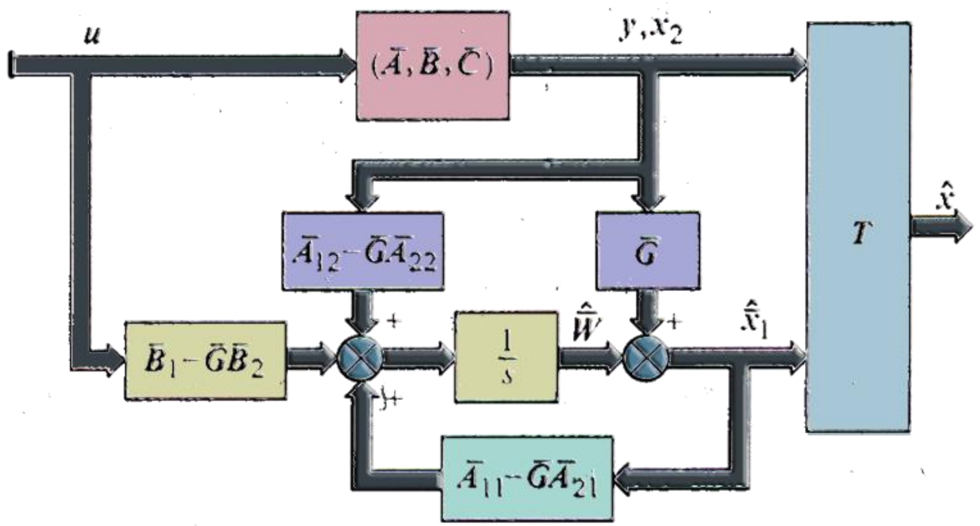
可以证明，若系统能观，输出矩阵c的秩是m，则它的m个状态分量可由y直接获得，那么，其余的$(n-m)$个状态分量便只需用$(n-m)$维的降维观测器进行重构即可。降维观测器的设计方法很多，下面介绍其一般设计方法。

降维观测器设计分两步进行。第一，通过线性变换把状态按能检测性分解成$\bar{x}_1$和$\bar{x}_2$其中$(n-m)$维$\bar{x}_1$需要重构，而m维$\bar{x}_2$可由y直接获得。第二，对$\bar{x}_1$构造$(n-m)$维观测器。

5.6 利用状态观测器实现状态反馈的系统

5.6.1 系统的结构与状态空间表达式

下图是一个带有全维状态观测器的状态反馈系统。



降维观测器结构图

设能控能观的受控系统$\Sigma_0=(A, B, C)$为：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

状态观测器Σ_G为：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \hat{\boldsymbol{y}} &= \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

反馈控制律为：

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v} \tag{3}$$

将式(3)代入式(1)和式(2)整理或直接由结构图得整个闭环系统的状态空间表达式为：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}} &= \boldsymbol{G}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

写成矩阵形式为(A_1, B_1, C_1)，即

$$\left.\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\hat{x}}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}A & BK\\ GC & A-GC+BK\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \hat{x}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B\\ B\end{pmatrix}v\\ y &= (C,\quad 0)\begin{pmatrix}x\\ \hat{x}\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

这是一个$2n$维的闭环控制系统。

5.6.2 闭环系统的基本特性

1.闭环极点设计的分离性

闭环系统的极点包括Σ_0直接状态反馈系统$\Sigma_K=(A+BK, B, C)$的极点和观测器Σ_G的极点两部分。但二者独立，相互分离。

设状态估计误差为 $\tilde{x}=x-\hat{x}$，引入等效变换：

$$\begin{pmatrix}x\\ \tilde{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ I & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \hat{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ x-\hat{x}\end{pmatrix} \tag{6}$$

令变换矩阵为：

$$T=\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix}, T^{-1}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix}=T \tag{7}$$

经线性变换后的系统 $(\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1)$ 为：

$$\bar{A}_1=T^{-1}A_1T=\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & BK \\ GC & A-GC+BK \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A+BK & BK \\ 0 & A-GC \end{pmatrix}$$

$$\bar{B}_1=T^{-1}B_1=\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_1=C_1T=(C, \quad 0)\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix}=(C, \quad 0) \tag{8}$$

或者展开成:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{BK}\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Bv} \\
\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{GC})\tilde{\boldsymbol{x}} \\
\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{Cx}
\end{aligned} \tag{9}$$

由于线性变换不改变系统的极点，因此，有:

$$\begin{aligned}
\det[s\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{A}}_1] &= \det\begin{pmatrix} s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK}) & -\boldsymbol{BK} \\ 0 & s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{GC}) \end{pmatrix} \\
&= \det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK})] \cdot \det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{GC})]
\end{aligned} \tag{10}$$

2.传递函数矩阵的不变性

这个不变性表示用观测器构成的状态反馈系统和状态直接反馈系统具有相同的传递函数矩阵。

3.观测器反馈与直接状态反馈的等效性

5.6.3 带观测器状态反馈系统与带补偿器输出反馈系统的等价性

在工程实际中，往往更关心系统输入和输出之间的控制特性，即传递特性。可以证明，仅就传递特性而言，带观测器的状态反馈系统完全等效于同时带有串联补偿器和反馈补偿器的输出反馈系统。或者说用补偿器可以构成完全等效于观测器反馈的系统。

本章完