

实验十四：

一级倒立摆系统建模及稳定性分析、
基于Matlab的一级倒立摆根轨迹校正、PID校正

实验背景：

倒立摆是机器人技术、控制理论、计算机控制等多个领域、多种技术的有机结合，其被控系统本身又是一个绝对不稳定、高阶次、多变量、强耦合的非线性系统，可以作为一个典型的控制对象对其进行研究。最初研究开始于二十世纪 50 年代，麻省理工学院（MIT）的控制论专家根据火箭发射助推器原理设计出一级倒立摆实验设备。

近年来，新的控制方法不断出现，人们试图通过倒立摆这样一个典型的控制对象，检验新的控制方法是否有较强的处理多变量、非线性和绝对不稳定系统的能力，从而从中找出最优秀的控制方法。倒立摆系统作为控制理论研究中的一种比较理想的实验手段，为自动控制理论的教学、实验和科研构建一个良好的实验平台，以用来检验某种控制理论或方法的典型方案，促进了控制系统新理论、新思想的发展。

由于控制理论的广泛应用，由此系统研究产生的方法和技术将在半导体及精密仪器加工、机器人控制技术、人工智能、导弹拦截控制系统、航空对接控制技术、火箭发射中的垂直度控制、卫星飞行中的姿态控制和一般工业应用等方面具有广阔的利用开发前景。

实验目的：

1. 了解一级倒立摆工作原理；
2. 建立一级倒立摆数学模型；
3. 掌握一级倒立摆的基本分析方法，并在 Matlab 中仿真验证。

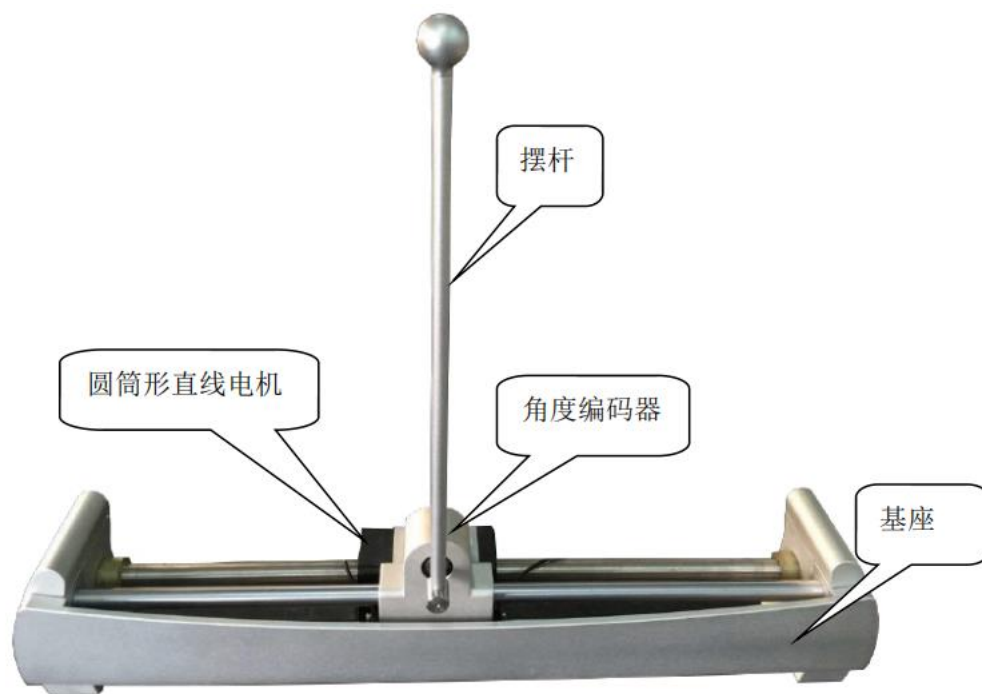
实验任务/要求:

1. 一级倒立摆系统稳定性分析;
2. 设计根轨迹校正环节使系统性能指标达到 $t_s \leq 1$ 秒, $\sigma \leq 10\%$;
3. 设计PID校正环节使系统性能指标达到 $t_s \leq 1$ 秒, $\sigma \leq 10\%$ 。

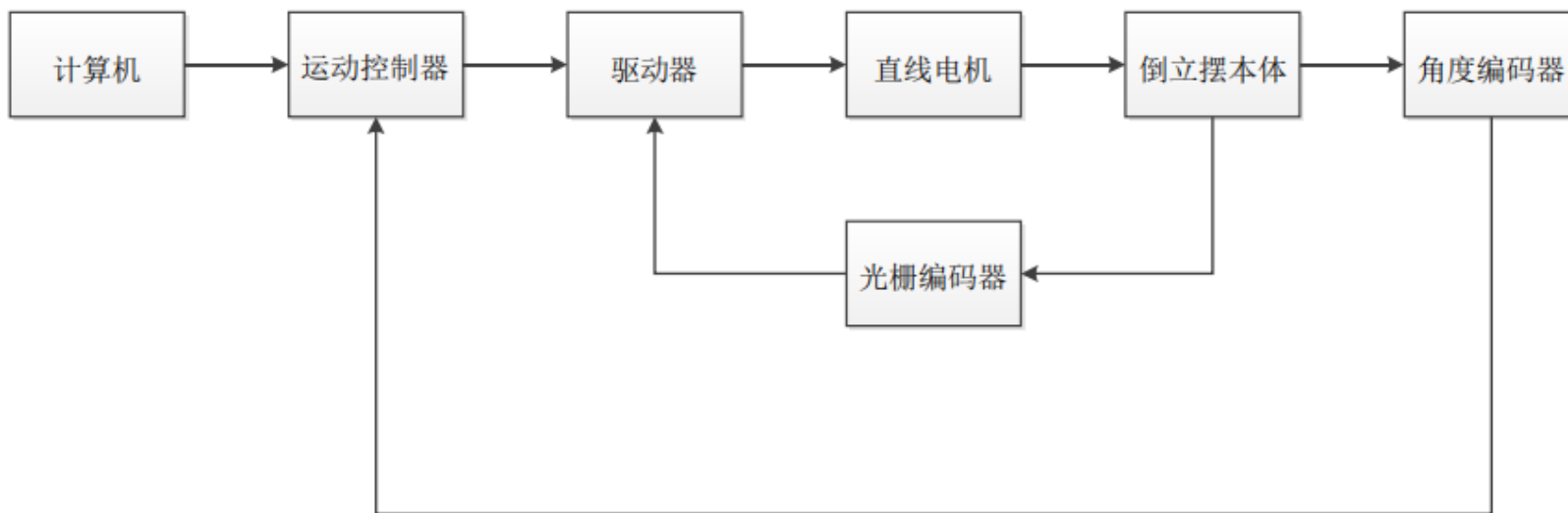
实验仪器、设备及材料：

一级倒立摆本体、倒立摆电控箱、PC机
(Matlab平台、运动控制卡)

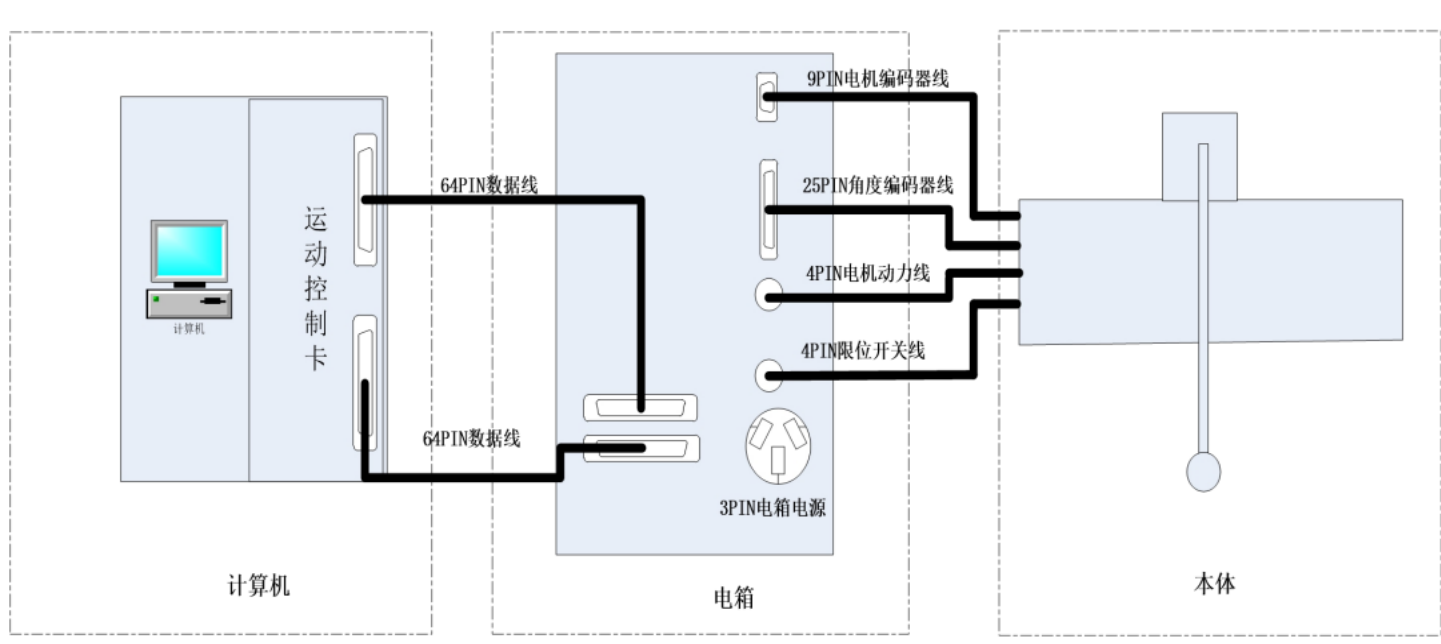
实验原理：



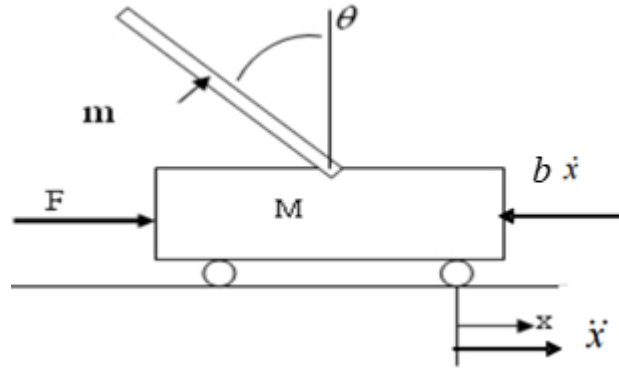
被控对象：一级倒立摆系统



系统控制框图

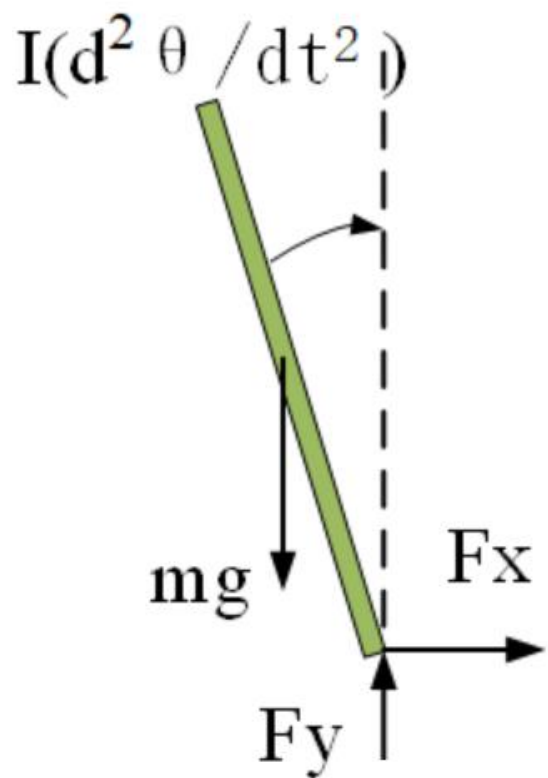


系统连接示意图

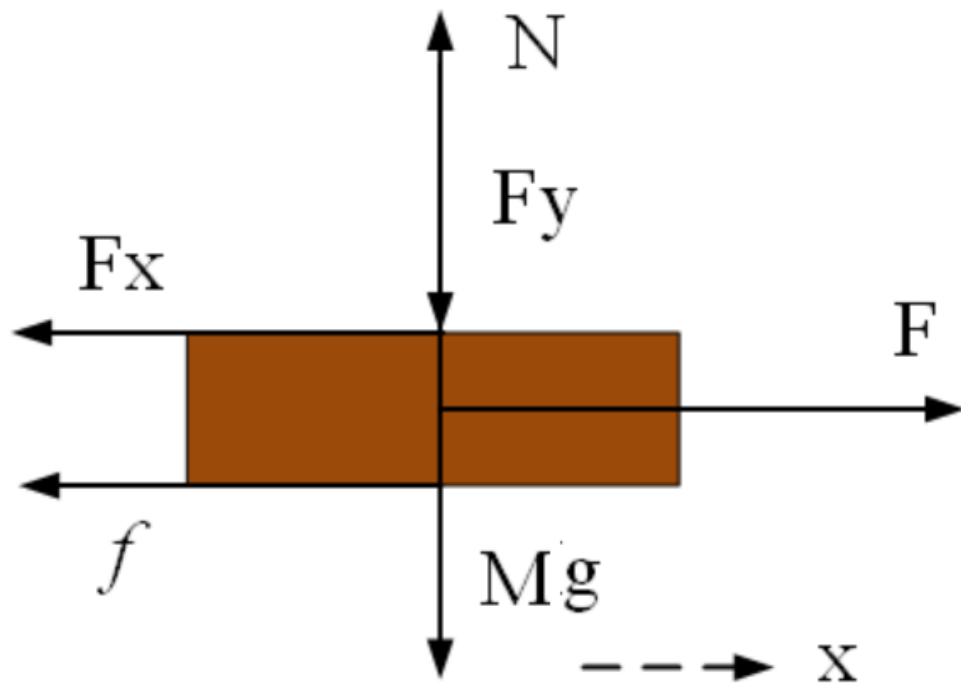


直线一级倒立摆系统

符号	意义	实际数值
M	小车质量（不含动子）	1.42kg
m	摆杆质量	0.12kg
b	小车摩擦力系数*	N/m/sec
l	摆杆转动轴心到杆质心的长度	0.188m
I	摆杆惯量	0.0014kg*m*m
g	重力加速度	9.8 m / s ²
F	加在小车上的力	
x	小车位置	
θ	摆杆与垂直向上方向的夹角	



摆杆受力分析图

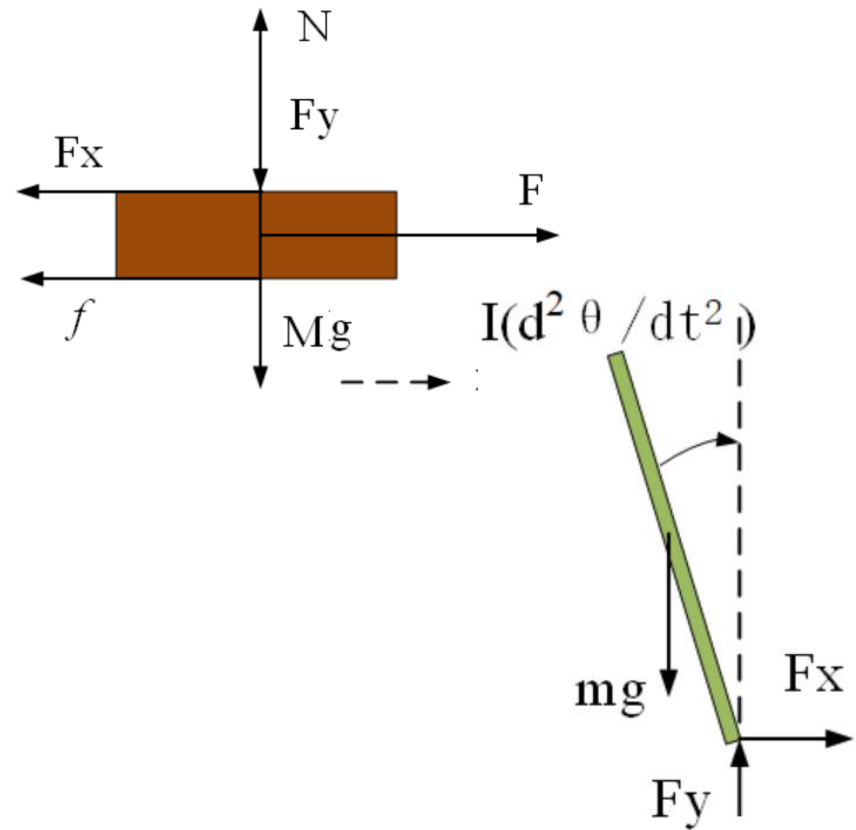


系统中小车的受力分析图

受力分析:

对小车, 水平方向:

$$F - F_x - f = M\ddot{x}$$



对摆杆, 水平方向:

$$F_x = m \frac{d^2}{dt^2} (x - l \sin \theta) = m \frac{d}{dt} (\dot{x} - l \cos \theta \dot{\theta}) = m \ddot{x} + m l \sin \theta \dot{\theta}^2 - m l \cos \theta \ddot{\theta}$$

对摆杆, 垂直方向:

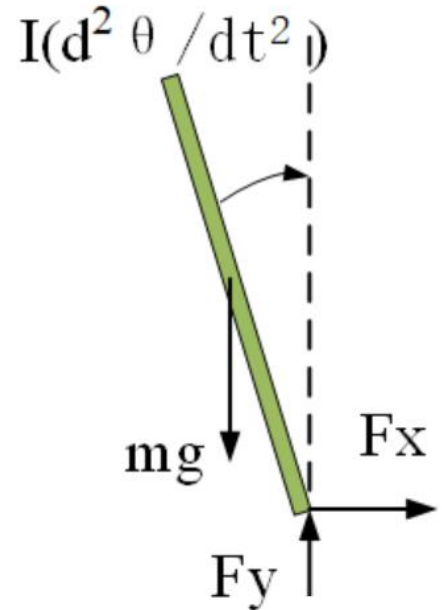
$$mg - F_y = m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = m \frac{d}{dt} (-l \sin \theta \dot{\theta}) = -m l \cos \theta \dot{\theta}^2 - m l \sin \theta \ddot{\theta}$$

摆杆力矩平衡:

$$I\ddot{\theta} = F_y l \sin\theta + F_x l \cos\theta$$

由于控制的目的是保持倒立摆直立，摆杆允许的转动的转角一般较小，可得到如下假设条件:

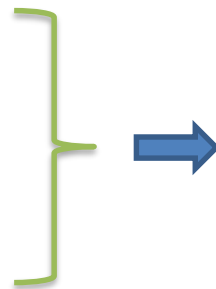
$$\sin\theta = \theta, \cos\theta = 1$$



$$F_x = m\ddot{x} + ml\sin\theta \dot{\theta}^2 - ml\cos\theta \ddot{\theta}$$

$$mg - F_y = -ml\cos\theta \dot{\theta}^2 - ml\sin\theta \ddot{\theta}$$

$$I\ddot{\theta} = F_y l \sin\theta + F_x l \cos\theta$$



$$F_x = m\ddot{x} + ml\theta \dot{\theta}^2 - ml \ddot{\theta} \quad (1)$$

$$F_y = mg + ml \dot{\theta}^2 + ml\theta \ddot{\theta} \quad (2)$$

$$I\ddot{\theta} = F_y l \theta + F_x l \quad (3)$$

把方程（1）、（2）带入到（3）中：

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= (mg + ml\theta \ddot{\theta})l\theta + (m\ddot{x} - ml\ddot{\theta})l \\ &= mgl\theta + ml^2\theta^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{x} - ml^2\ddot{\theta} \end{aligned}$$

因 $I = \frac{1}{3}ml^2$ ，利用 $\theta^2 = 0, \dot{\theta}^2 = 0$ 将上式线性化：

故一阶倒立摆的数学模型：

$$\frac{4}{3}ml\ddot{\theta} - mg\theta = m\ddot{x}$$

代入 $mg = 1.176$ ， $l = 0.188$ 实际数据后

$$\ddot{\theta} - 29.4\theta = 3\ddot{x}$$

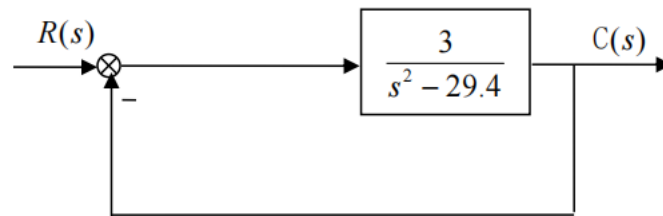
定义:

输入信号: $R(t) = \ddot{x}(t)$

输出信号: $C(t) = \theta(t)$

则系统传递函数:

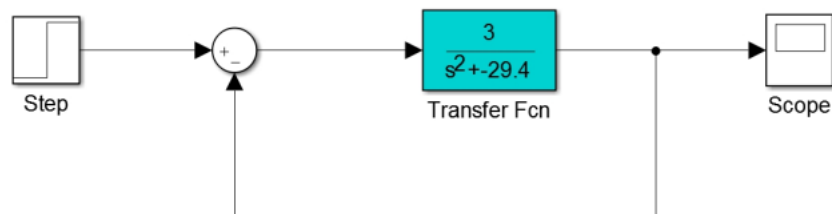
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3}{s^2 - 29.4}$$



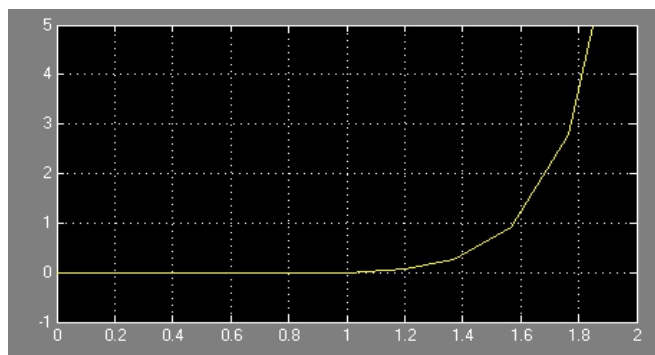
实验步骤:

对任务1: 一级倒立摆系统稳定性分析

在 MATLAB Simulink 中构建如图所示的系统仿真程序

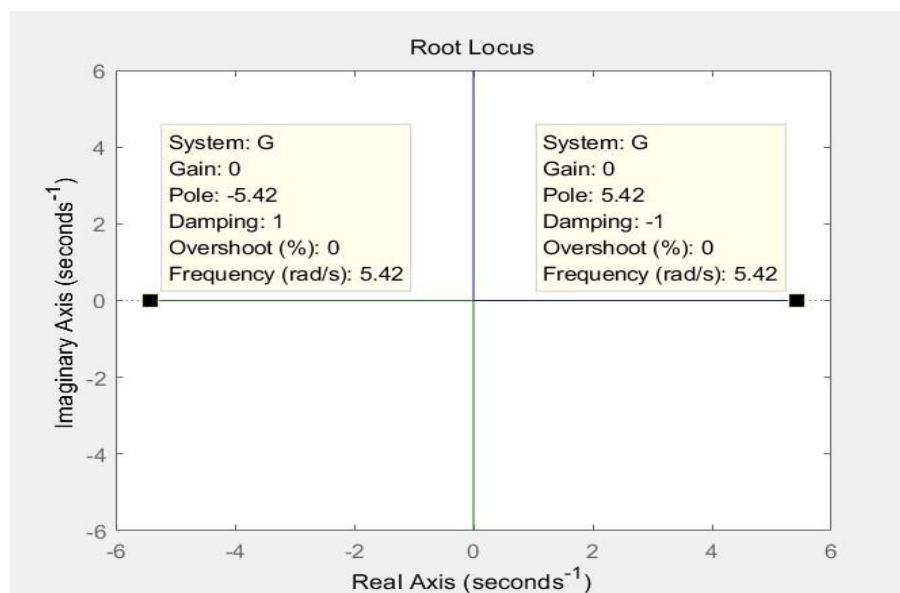


加入阶跃信号, 点击按钮 , 双击 Scope 块, 得到系统仿真曲线, 此时系统不稳定, 发散。



对任务2：一级倒立摆系统根轨迹校正

1. 打开 MATLAB 输入 `gtbox`，点击进入：“Inverted Pendulum/Linear Motor Driven/GLM1SIP-II/C-Typed Linear Motor-Acc/2-Root Locus” 路径下的 “e2_0.m” 程序，画出系统闭环根轨迹：



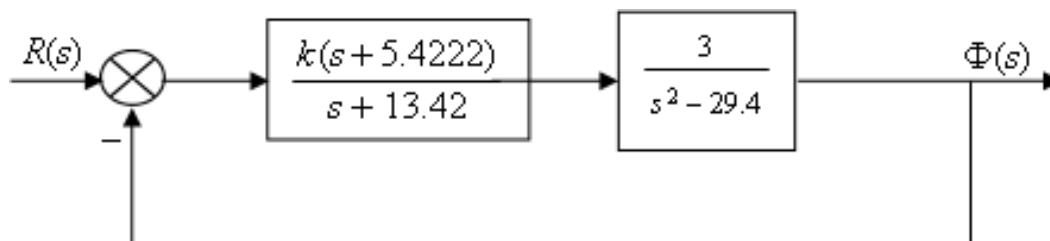
由系统根轨迹图可以看出闭环传递函数的一个开环极点位于右半平面，并且闭环系统的根轨迹关于虚轴对称，这意味着无论根轨迹增益如何变化，闭环根总是位于正实轴或者虚轴上，即系统总是不稳定或临界稳定的。

2) 搭建simulink仿真系统

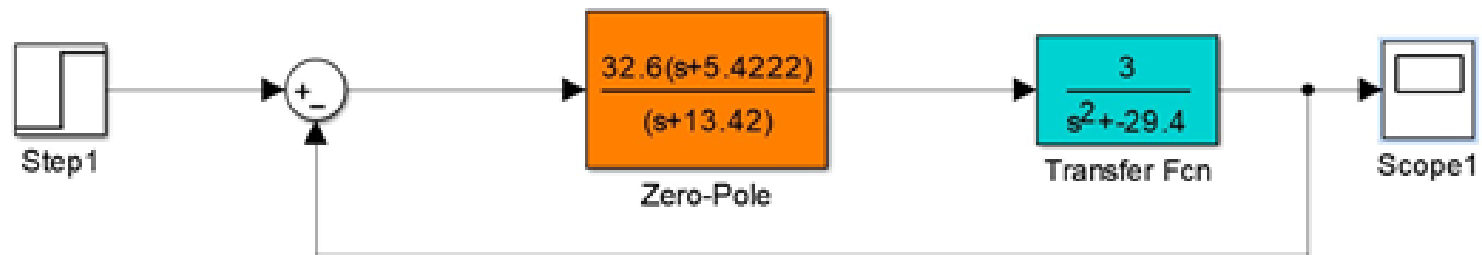
不妨对系统新增加一个开环零点和一个开环极点，零点为-5.4222，消去倒立摆的开环左极点，增加一个位于13.42的开环左极点，（注：13.42是试凑法给出的值，值的范围在10~16），控制器为：

$$G(s) = k \frac{s + 5.4222}{s + 13.42}$$

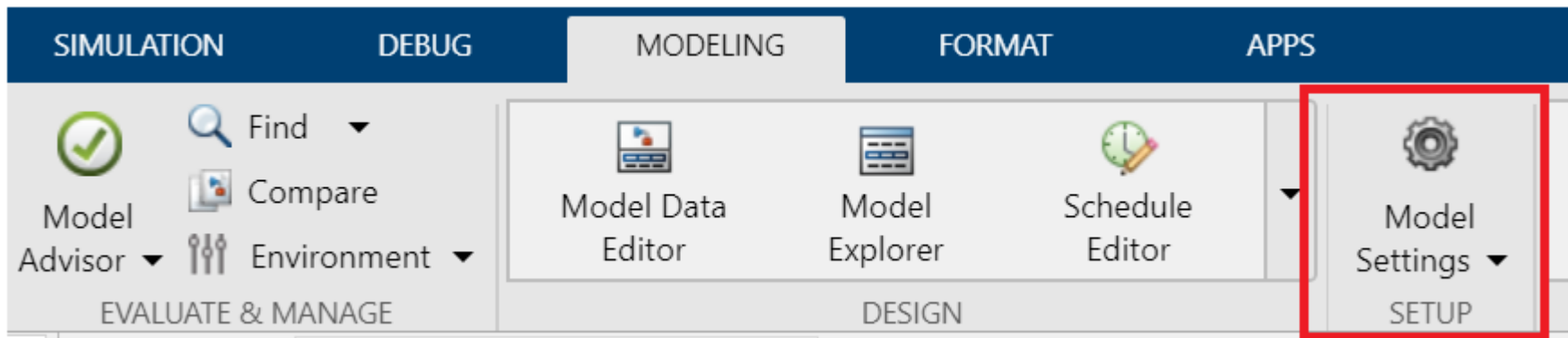
k 为开环增益。控制系统结构图如下：



2. 取增益 $k=32.6$ (k 值是使用试凑法给出的, 范围在 25~40 之间), 搭建如图所示的simulink仿真系统, 并保存。



3. 在Modeling 栏下, 选择“Model Settings”, 在弹出的框中, Solver section \rightarrow type 选择为“Fixed-step”, Fixed-step size 改为“0.001”。



Solver

- Data Import/Export
- Math and Data Types
- ▶ Diagnostics
- Hardware Implementation
- Model Referencing
- Simulation Target
- ▶ Code Generation

Simulation time


Start time: 0.0 Stop time: 10.0

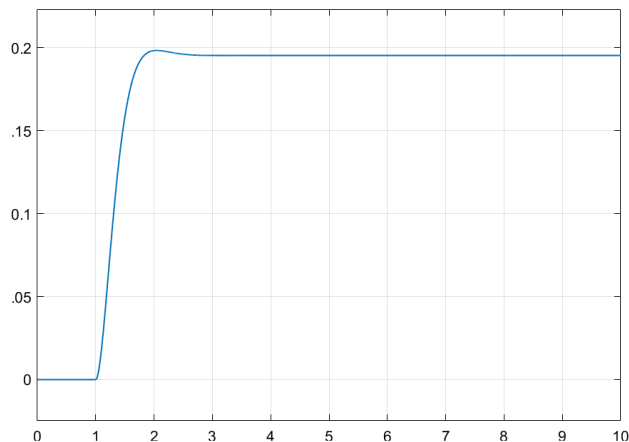
Solver selection

Type: Fixed-step Solver: auto (Automatic solver selection)

▼ Solver details

Fixed-step size (fundamental sample time): 0.001

3. 加入阶跃激励信号 0.05 m/s^2 ，点击按钮 ，双击 Scope 块，得到系统仿真曲线：



分析：计算系统的性能指标：调节时间 t_s 及超调量，满足设计要求。

4. 改变控制器的增益把实验数据填入下表:

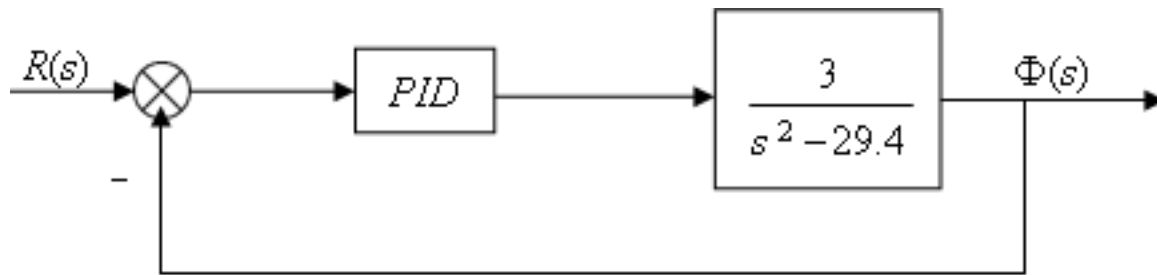
控制器形式及参数	增益 (K)	超调量 σ	调节时间 t_s	系统是否稳定?
$k \frac{s + 5.4222}{s + 13.42}$	29			
	32			
	35			

对任务3：一级倒立摆系统PID校正

PID 参数的确定方法：

PID 的数学模型：

$$G(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$



加了控制器之后系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{3K_d(s^2 + \frac{K_p}{K_d}s + \frac{K_i}{K_d})}{s(s^2 - 29.4)}$$

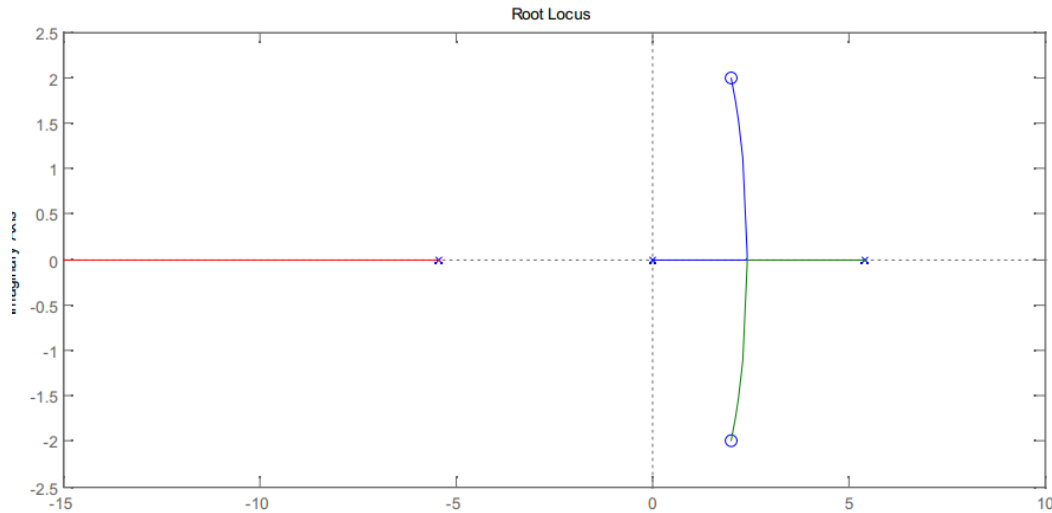
系统开环极点为：-5.42, 0, 5.42.

系统开环零点为：

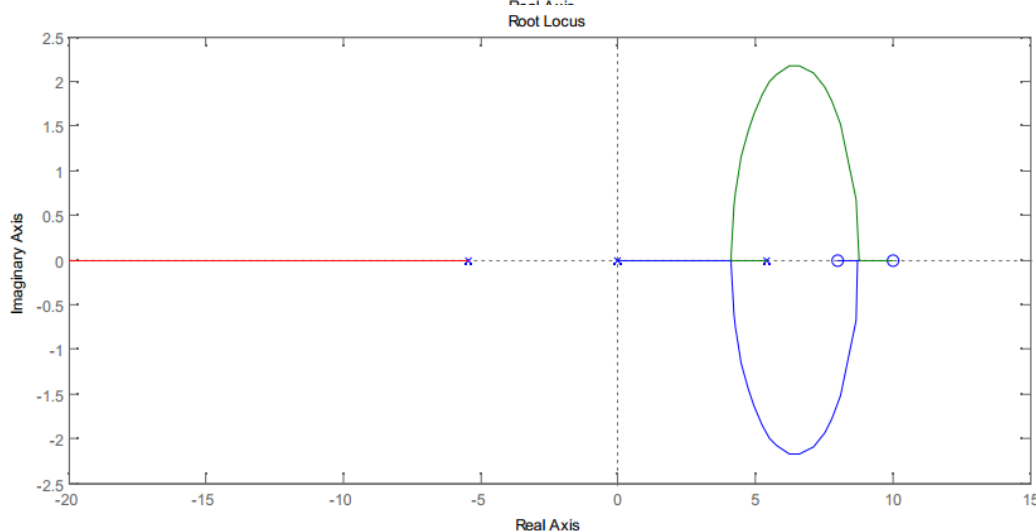
$$\frac{-\frac{K_p}{K_d} + \sqrt{\left(\frac{K_p}{K_d}\right)^2 - 4\frac{K_i}{K_d}}}{2}, \quad \frac{-\frac{K_p}{K_d} - \sqrt{\left(\frac{K_p}{K_d}\right)^2 - 4\frac{K_i}{K_d}}}{2}$$

PID 环节为系统增加了一个位于原点的极点，两个可变的零点。

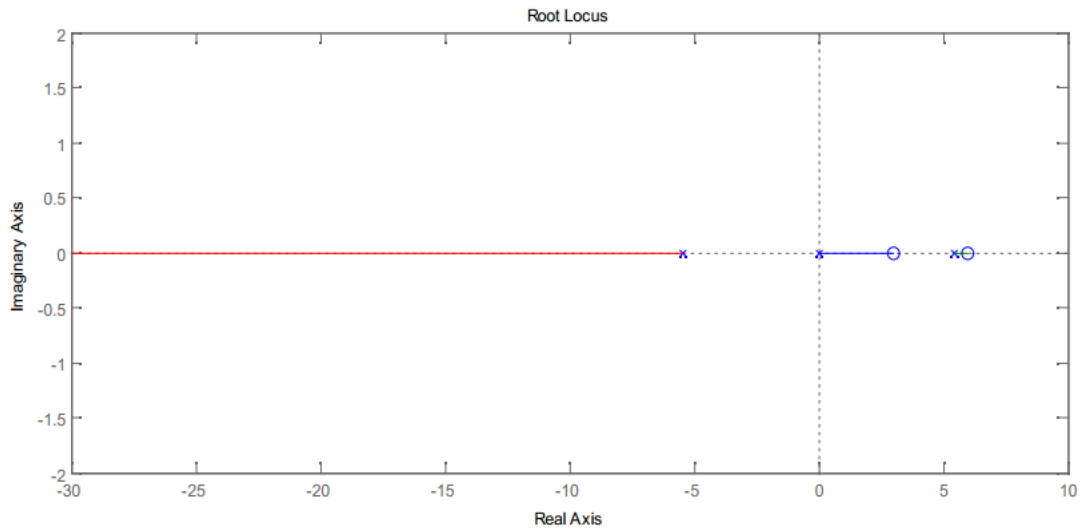
系统有共有**两个零点**、**三个极点**。三阶系统可以采用根轨迹法确定PID 参数。根据两个零点的相对位置，可以把根轨迹分成九种：



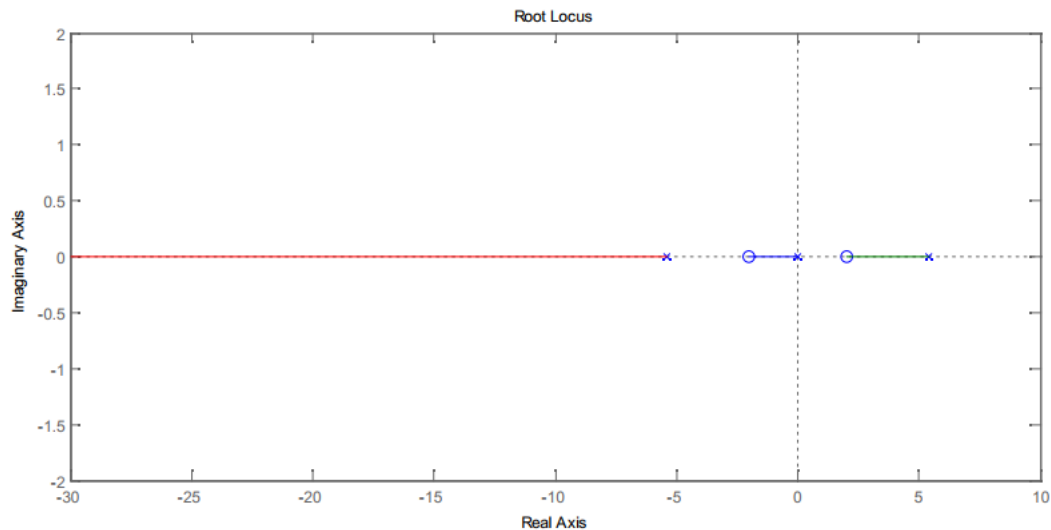
Case 1: 根轨迹图-两个共轭零点位于右半平面



Case 2: 根轨迹图-两个零点在正实轴上，均在正极点的右侧

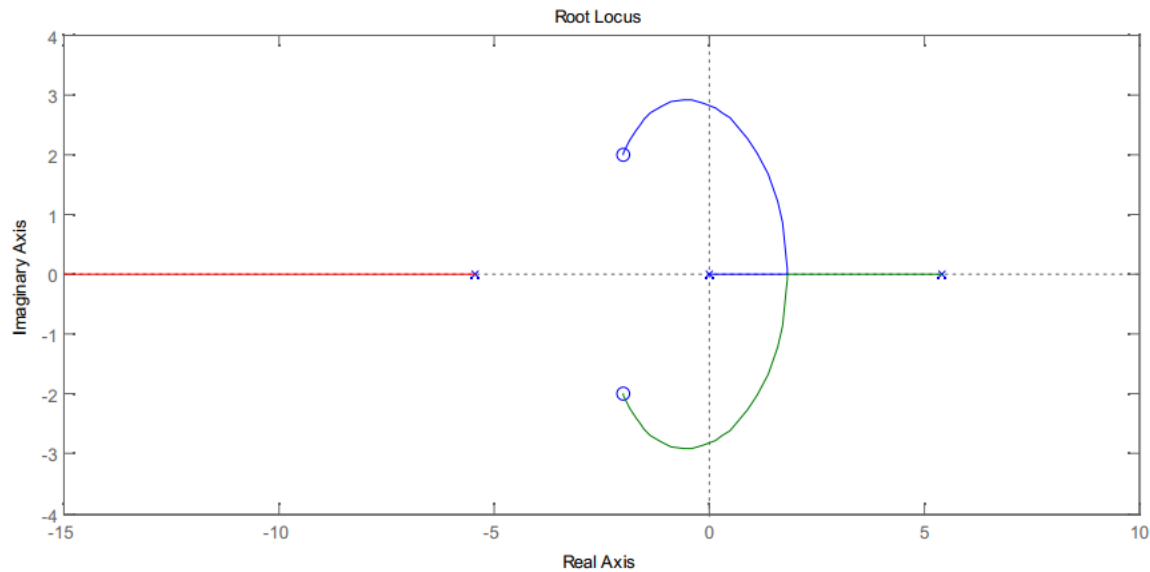


Case 3: 两个零点在正实轴上，
其中一个位于正极点右侧

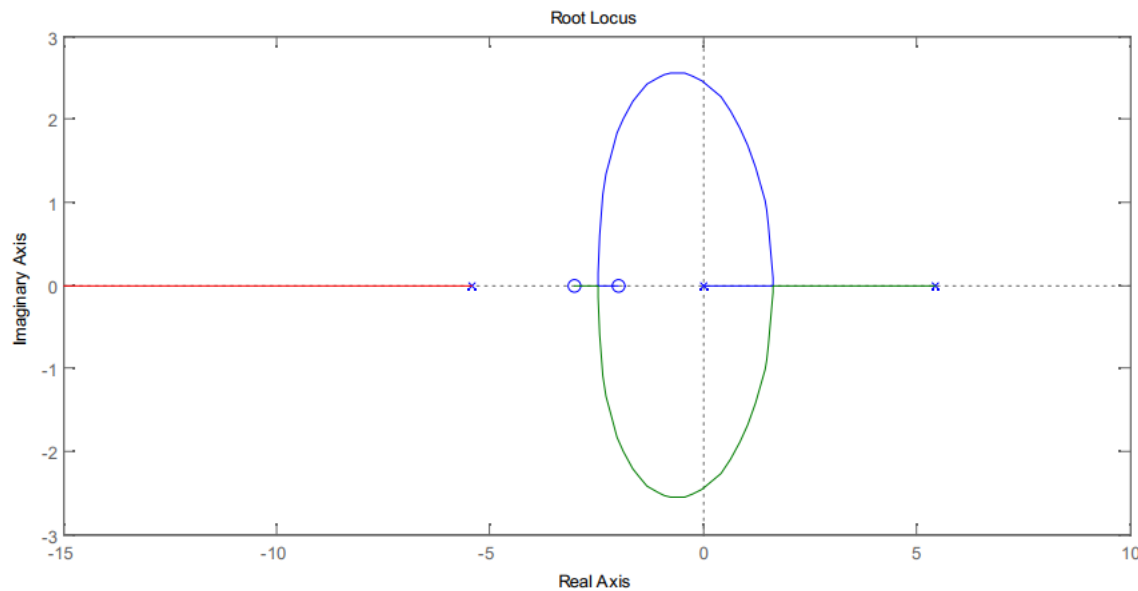


Case 4: 一个零点在正实轴上，
一个位于负实轴上

分析: Case 1-4 所示四种根轨迹，闭环系统一定有右极点，**不稳定**。

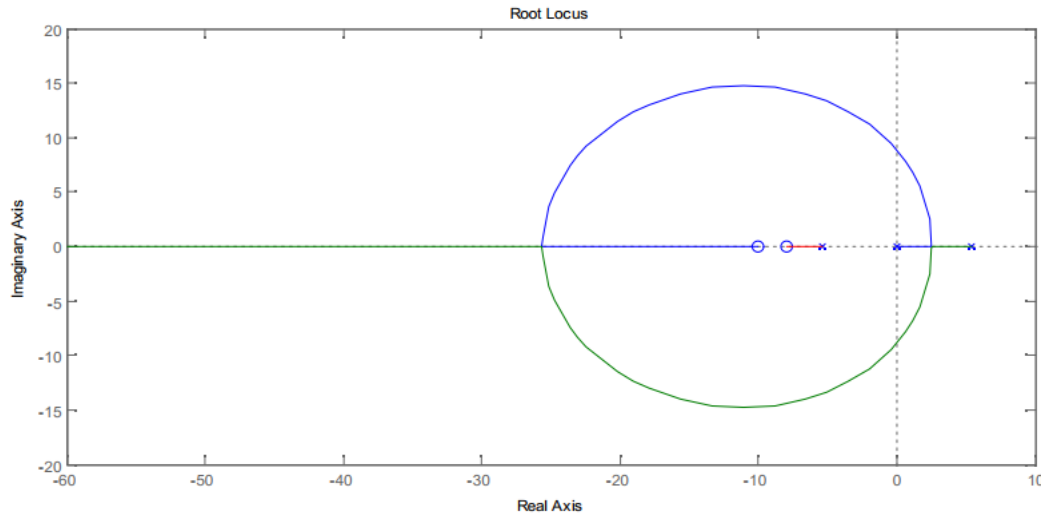


Case 5: 两个共轭零点负实部
介于负极点和原点之间



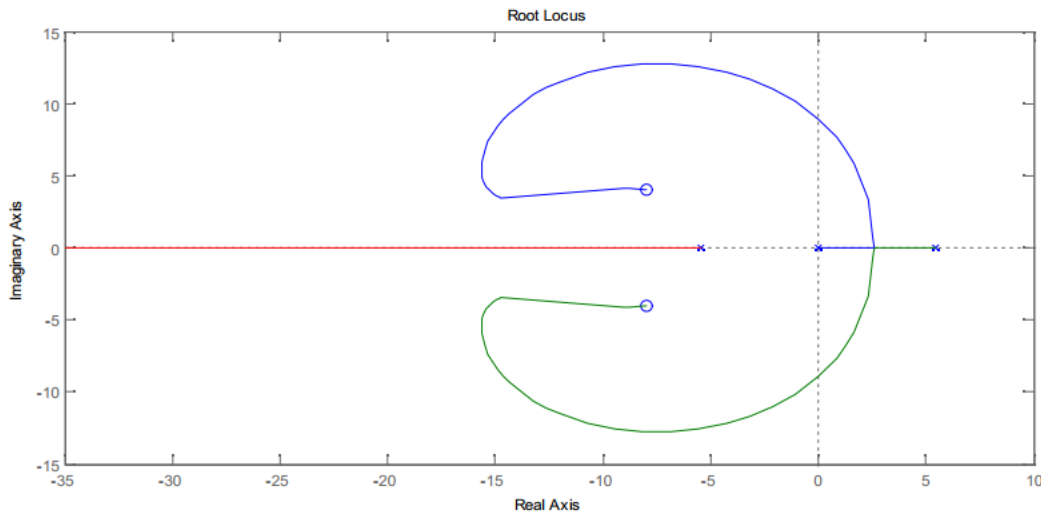
Case 6: 两个负实零点介于负
极点和原点之间

分析: Case5-6 所示的系统, 至少有两个闭环极点位于左极点和原点之间, 系统快速性不好

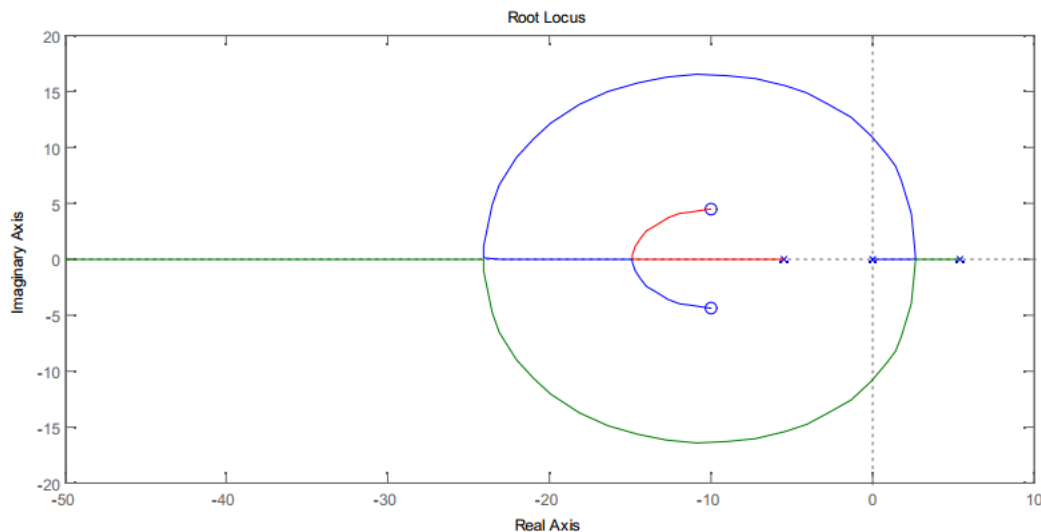


Case 7:两个负实零点位于负极点左边

分析：Case 7所示的系统虽然三个闭环极点均可位于左极点的左侧，但是，中间一根根轨迹分支其长度有限，根轨迹增益即使变化很大，闭环极点的位置变化也很小。



Case 8:两个共轭零点，负实部位于负极点左边，距负极点较近

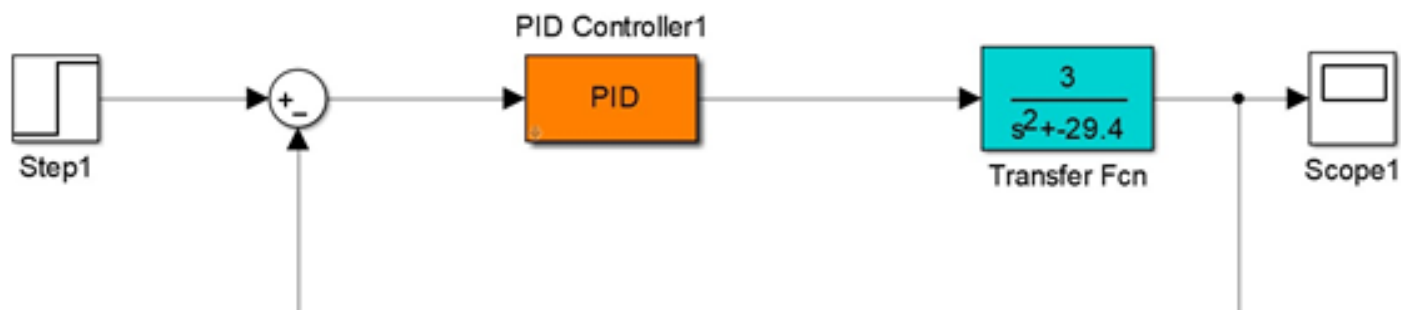


Case 9:两个共轭零点，负实部位于负极点左边，距负极点较远

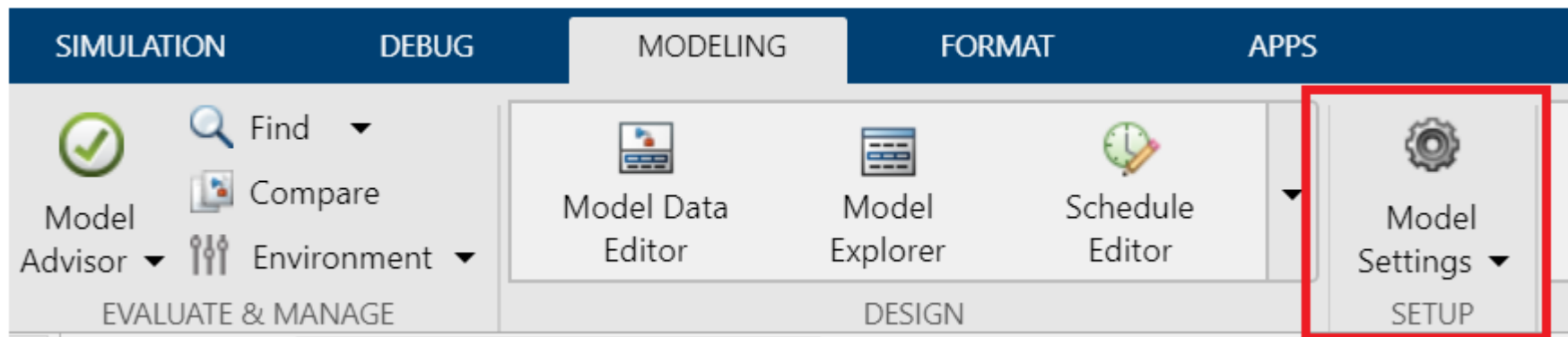
分析: Cases8-9，可以通过调整根轨迹增益使闭环极点位于开环左极点的左侧，并且尽量靠近负实轴，设计出**快速性、稳定性均较好**的系统。

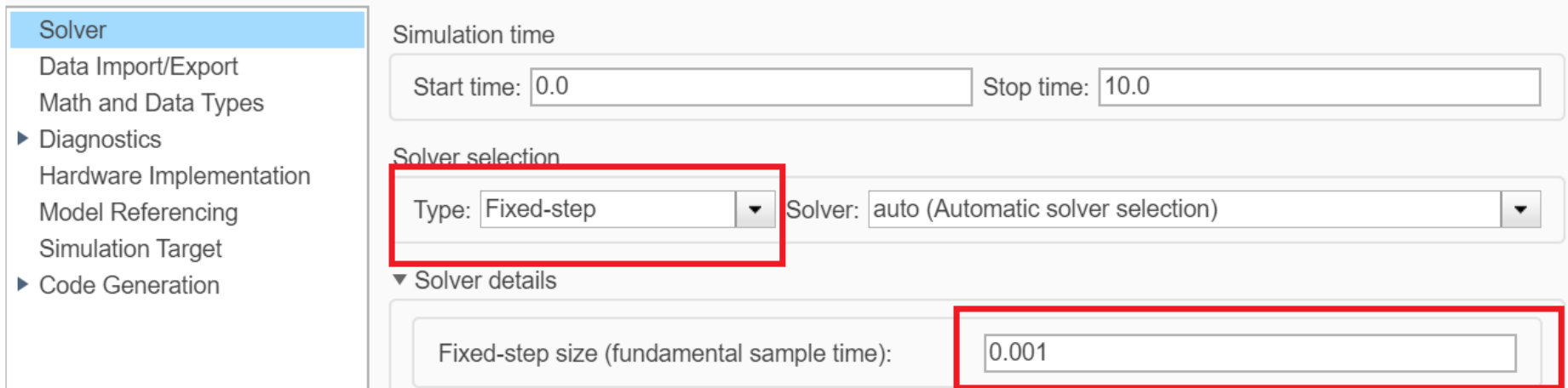
任务3的实验步骤:


1). 取 $k_p=25$, $k_i=5$, $k_d=5$, 此时系统共轭零点位于 -4.791 , -0.2087 , 根轨迹增益 15, 系统闭环极点为 -10.97 , -3.66 , -0.3738 , 搭建如图所示的simulink仿真系统:



2). 在Modeling 栏下, 选择“Model Settings”, 在弹出的框中, Solver section \rightarrow type 选择为“Fixed-step”, Fixed-step size 改为“0.001”。





3) 点击按钮  ，观察系统的输出，并计算系统的性能指标：调节时间 t_s 及超调量 σ ，满足设计要求。

注：可以继续增大根轨迹增益，以减小系统的超调量，减小调节时间。

2) 改变控制器的 PID 值，观察实验现象并把实验数据填入下表

控制器参数	PID 参数	系统性能
$\frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$	$K_p = , KD = , KI =$	$t_s = , \sigma =$
	$K_p = , KD = , KI =$	$t_s = , \sigma =$
	$K_p = , KD = , KI =$	$t_s = , \sigma =$

实验报告要求：

- 1) 实验目的；
- 2) 实验任务/要求
- 3) 实验仪器、设备及材料
- 4) 实验原理；
- 5) 实验步骤；
- 6) 实验结果及心得。