

# 实验十六：

（创新模块）二级倒立摆系统建模及Matlab仿真

## 实验目的：

1. 了解二级倒立摆工作原理；
2. 建立二级倒立摆数学模型；
3. 分析二级倒立摆系统的稳定性、可控性。

## 实验任务/要求:

1. 建立二级倒立摆系统数学模型;
2. 分析二级倒立摆系统的稳定性、可控性。

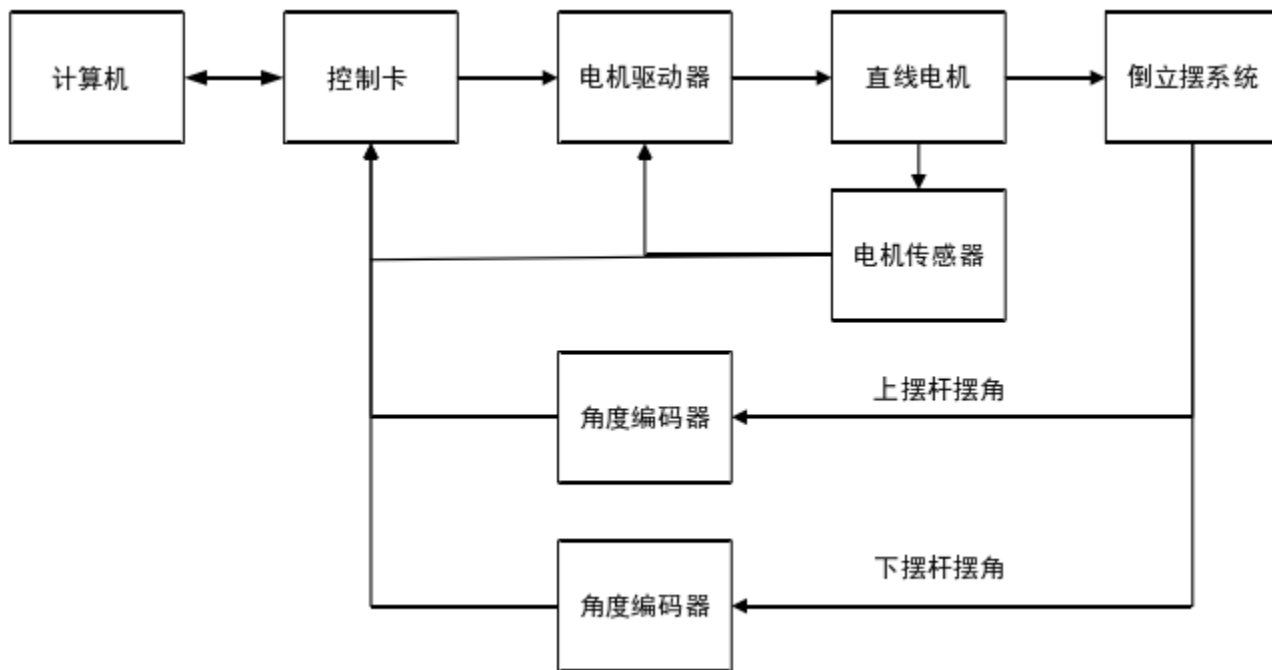
# 实验仪器、设备及材料：

二级倒立摆本体、倒立摆电控箱、PC机  
(Matlab平台、运动控制卡)

# 实验原理：



被控对象：二级倒立摆系统



系统控制框图

**工作原理：**电机传感器由伺服电机自带，可以根据该码盘的反馈通过换算获得小车位移、速度，并反馈给伺服电机和运动控制卡。

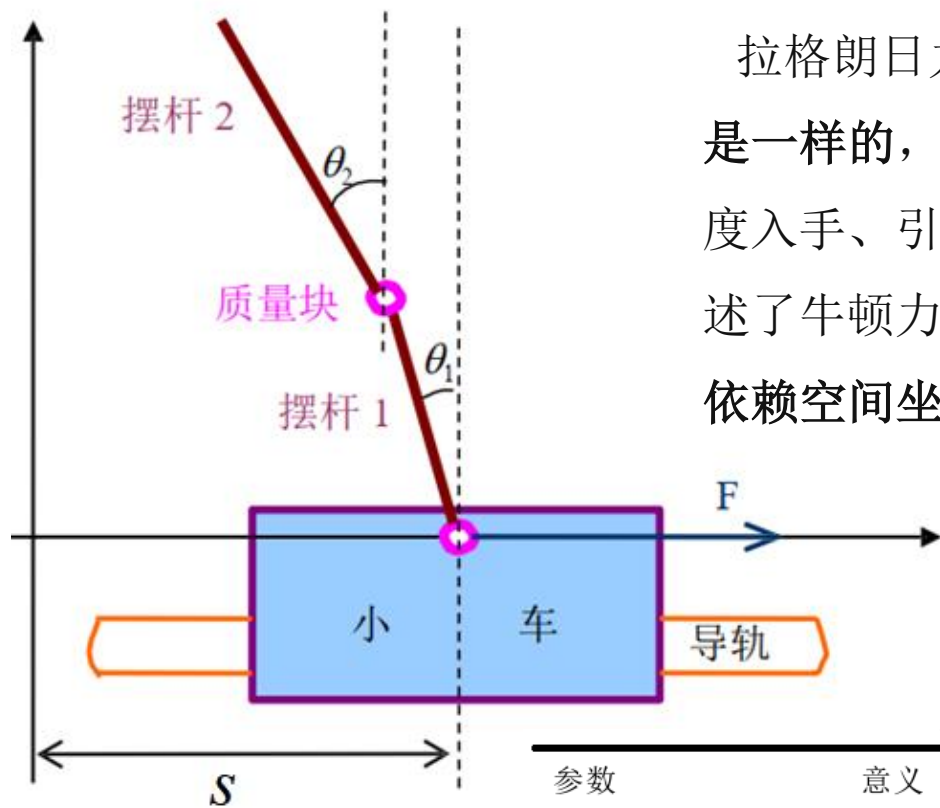
通过角度编码器，可换算出摆杆1和2的角度、角速度，并反馈给运动控制卡。

计算机从运动控制卡中实时读取数据确定控制决策电机的输出力矩并发送给运动控制卡，运动控制卡实现该次控制决策产生相应的控制量使电机转动带动小车运动，以达到控制的目的。

# 运动学分析:

## 分析方法: 拉格朗日力学分析法

拉格朗日力学是分析力学的内容, 本质上与牛顿力学是一样的, 在物理上没有任何新内容。它从功和能量角度入手、引入广义坐标的概念, 用数学分析方法重新表述了牛顿力学。它比牛顿力学好用的地方主要两点: 不依赖空间坐标系, 不需要分析系统内部的约束力。



参数	意义	参数	意义
$M$	小车质量	$\theta_1$	摆杆 1 与竖直方向上的夹角
$m_1$	摆杆 1 质量	$\theta_2$	摆杆 2 与竖直方向上的夹角
$m_2$	摆杆 2 质量	$a$	小车的加速度
$m_3$	质量块质量	$l_2$	摆杆 2 中心到转动中心的距离
$l_1$	摆杆 1 中心到转动中心的距离		

拉格朗日力学分析法的核心思想：

**达朗贝尔原理** (D'Alembert Principle) 任何情况下，质点系主动力（外力）与惯性力所做的虚功之和为0，不需要考虑内部约束力。

**拉格朗日方程：**

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q, \dot{q})$$

其中， $L$ 为拉格朗日算子， $T$ 为系统的动能， $V$ 为系统的势能， $q$ 为广义质心坐标。

假设主动力（外力）都是保守力（保守力所作的功与路径无关，只与起始位置有关），则系统动力学方程可以写为：

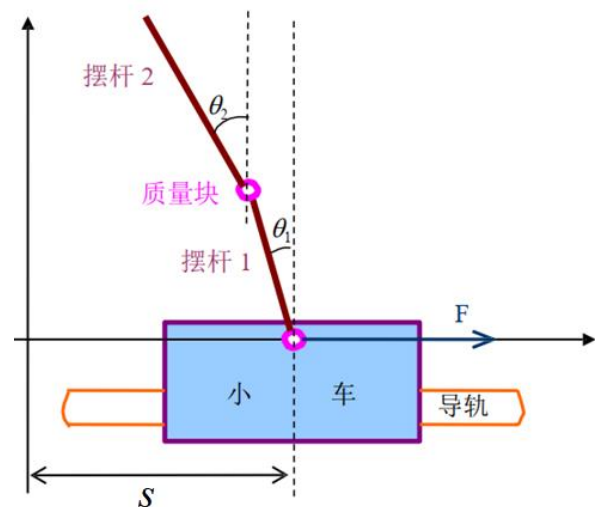
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

注：如果考虑主动力包括非保守力的情况，那么我们需要把这个力 $F$ 加入到式子中。

直线二级倒立摆系统中的广义坐标有三个，分别为小车位移  $s$ ，摆杆 1 角度  $\theta_1$  和摆杆 2 角度  $\theta_2$ 。 $F$  是系统在广义坐标  $s$  上所受到的外力。由于系统在  $\theta_1, \theta_2$  广义坐标系下不受外力，可得：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta_1'} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta_2'} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial s'} - \frac{\partial L}{\partial s} = F \end{cases}$$

直线二级倒立摆模型参数



参数	物理意义	参数	物理意义
$T_{m_{11}}$	摆杆 1 的平动动能	$T_{m_{21}}$	摆杆 2 的平动动能
$T_{m_{12}}$	摆杆 1 的转动动能	$T_{m_{22}}$	摆杆 2 的转动动能
$xpend1$	摆杆 1 的质心横坐标	$xpend2$	摆杆 2 的质心横坐标
$ypend1$	摆杆 1 的质心纵坐标	$ypend2$	摆杆 2 的质心纵坐标
$V_1$	摆杆 1 的势能	$V_2$	摆杆 2 的势能
$xmass$	质量块质心横坐标	$V_3$	质量块的势能
$ymass$	质量块质心纵坐标		

直线二级倒立摆系统的动能由小车动能，摆杆 1 动能，摆杆 2 动能和质量块动能四大部分组成。假设系统总动能为  $T$ ，小车动能为  $T_M$ ，摆杆 1 动能为  $T_{m_1}$ ，摆杆 2 动能为  $T_{m_2}$ ，质量块动能为  $T_{m_3}$ 。故得出系统动能表达式：

$$T = T_M + T_{m_1} + T_{m_2} + T_{m_3}$$

小车动能：

$$T_M = \frac{1}{2} M (s')^2$$

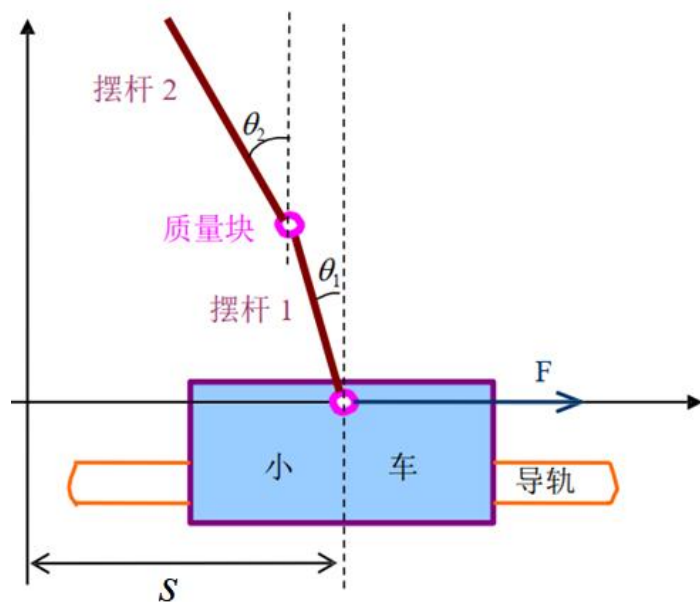
由于摆杆的特性，摆杆 1 和摆杆 2 均存在平动动能和转动动能

摆杆 1 的总动能：

$$T_{m_1} = T_{m_{11}} + T_{m_{12}}$$

摆杆 2 的总动能：

$$T_{m_2} = T_{m_{21}} + T_{m_{22}}$$



摆杆 1 的质心坐标:

$$\begin{cases} x_{pend1} = s - l_1 \sin\theta_1 \\ y_{pend1} = l_1 \cos\theta_1 \end{cases}$$

摆杆 2 的质心坐标:

$$\begin{cases} x_{pend2} = s - 2l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin\theta_2 \\ y_{pend2} = 2l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \end{cases}$$

质量块的质心坐标:

$$\begin{cases} x_{mass} = s - 2l_1 \sin\theta_1 \\ y_{mass} = 2l_1 \cos\theta_1 \end{cases}$$

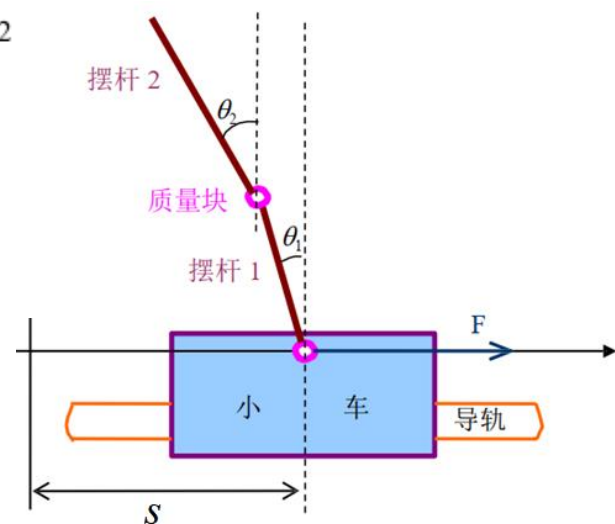
根据动能势能公式可推出以下公式,

摆杆 1 的平动动能:

$$T_{m_{11}} = \frac{1}{2} m_1 \left( \left( \frac{d(x_{pend1})}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d(y_{pend1})}{dt} \right)^2 \right)$$

摆杆 1 的转动动能:

$$T_{m_{12}} = \frac{1}{2} I_{p1} (\theta_1')^2 = \frac{1}{6} m_1 l_1^2 (\theta_1')^2$$



摆杆 2 的平动动能:

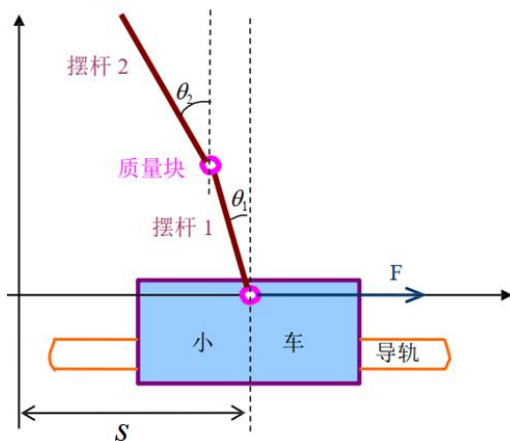
$$T_{m_{21}} = \frac{1}{2} m_2 \left( \left( \frac{d(x_{pend\ 2})}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d(y_{pend\ 2})}{dt} \right)^2 \right)$$

摆杆 2 的转动动能:

$$T_{m_{22}} = \frac{1}{2} I_{p2} (\theta')^2 = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 (\theta_2')^2$$

质量块与摆杆不同，可将其看作一个质点，可直接得出质量块的动能:

$$T_{m_3} = \frac{1}{2} m_3 \left( \left( \frac{d(x_{mass})}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d(y_{mass})}{dt} \right)^2 \right)$$

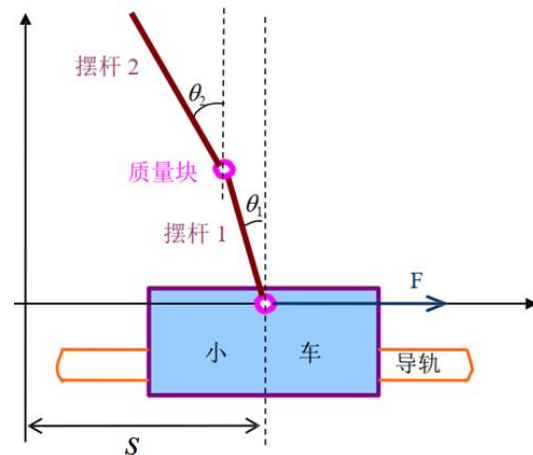


整个倒立摆系统的动能：

$$\begin{aligned} T &= T_M + T_{m_1} + T_{m_2} + T_{m_3} \\ &= \frac{1}{2} M (s')^2 + \frac{1}{2} m_1 \left( \left( \frac{d(xpend1)}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d(ypend1)}{dt} \right)^2 \right) + \frac{1}{6} m_1 l_1^2 (\theta_1')^2 \\ &+ \frac{1}{2} m_2 \left( \left( \frac{d(xpend2)}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d(ypend2)}{dt} \right)^2 \right) + \frac{1}{6} m_2 l_2^2 (\theta_2')^2 \\ &+ \frac{1}{2} m_3 \left( \left( \frac{d(xmass)}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d(ymass)}{dt} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

直线二级倒立摆系统的势能:

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 + V_2 + V_3 = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + m_3 g h_3 \\
 &= m_1 g y_{pend1} + m_2 g y_{pend2} + m_3 g y_{mass} \\
 &= m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g (2l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) + 2m_3 g l_1 \cos \theta_1
 \end{aligned}$$



假设在平衡位置时的系统中所有的变量的初始值均为零:

$$x(t_0) = (s, \theta_1, \theta_2, s', \theta_1', \theta_2', s'') = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

在直线二级倒立摆系统的线性化过程中, 需先求出  $\theta_1''$  和  $\theta_2''$ , 故设:

$$\begin{cases}
 \theta_1'' = f_1(s, \theta_1, \theta_2, s', \theta_1', \theta_2', s'') \\
 \theta_2'' = f_2(s, \theta_1, \theta_2, s', \theta_1', \theta_2', s'')
 \end{cases}$$

函数  $f_1$  和  $f_2$  的形式可由

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta_1'} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta_2'} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= 0\end{aligned}$$

得出。

将  $\theta_1''$  和  $\theta_2''$  在平衡位置  $x(t_0)$  处用泰勒级数展开并线性化，得到方程：

$$\begin{cases} \theta_1'' = k_{11}s + k_{12}\theta_1 + k_{13}\theta_2 + k_{14}s' + k_{15}\theta_1' + k_{16}\theta_2' + k_{17}s'' \\ \theta_2'' = k_{21}s + k_{22}\theta_1 + k_{23}\theta_2 + k_{24}s' + k_{25}\theta_1' + k_{26}\theta_2' + k_{27}s'' \end{cases}$$

式中，

$$k_{11} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial s} \right|_{x(t_0)}, \quad k_{12} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} \right|_{x(t_0)}, \quad k_{13} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} \right|_{x(t_0)} ;$$

$$k_{14} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial s'} \right|_{x(t_0)}, \quad k_{15} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1'} \right|_{x(t_0)}, \quad k_{16} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2'} \right|_{x(t_0)};$$

$$k_{17} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial s''} \right|_{x(t_0)}, \quad k_{21} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial s} \right|_{x(t_0)}, \quad k_{22} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} \right|_{x(t_0)};$$

$$k_{23} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} \right|_{x(t_0)}, \quad k_{24} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial s'} \right|_{x(t_0)}, \quad k_{25} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1'} \right|_{x(t_0)};$$

$$k_{26} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2'} \right|_{x(t_0)}, \quad k_{27} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial s''} \right|_{x(t_0)}$$

将直线二级倒立摆相关参数带入方程中,可得出以下结果:

$$k_{12} = \frac{3g(m_1 + 2(m_2 + m_3))}{(4m_1 + 3(m_2 + 4m_3))l_1} = 86.69, \quad k_{13} = \frac{-9gm_2}{2(4m_1 + 3(m_2 + 4m_3))l_1} = -21.62,$$

$$k_{17} = \frac{3(2m_1 + m_2 - 4m_3)}{2(4m_1 + 3(m_2 + 4m_3))l_1} = 6.64, \quad k_{22} = \frac{-9g(m_1 + 2(m_2 + m_3))}{2(4m_1 + 3(m_2 + 4m_3))l_2} = -40.31,$$

$$k_{23} = \frac{3g(m_1 + 2(m_2 + m_3))}{(4m_1 + 3(m_2 + 4m_3))l_2} = 39.45, \quad k_{24} = \frac{3(m_1 - l_2m_3)}{2(4m_1 + 3(m_2 + 4m_3))l_2} = -0.088。$$

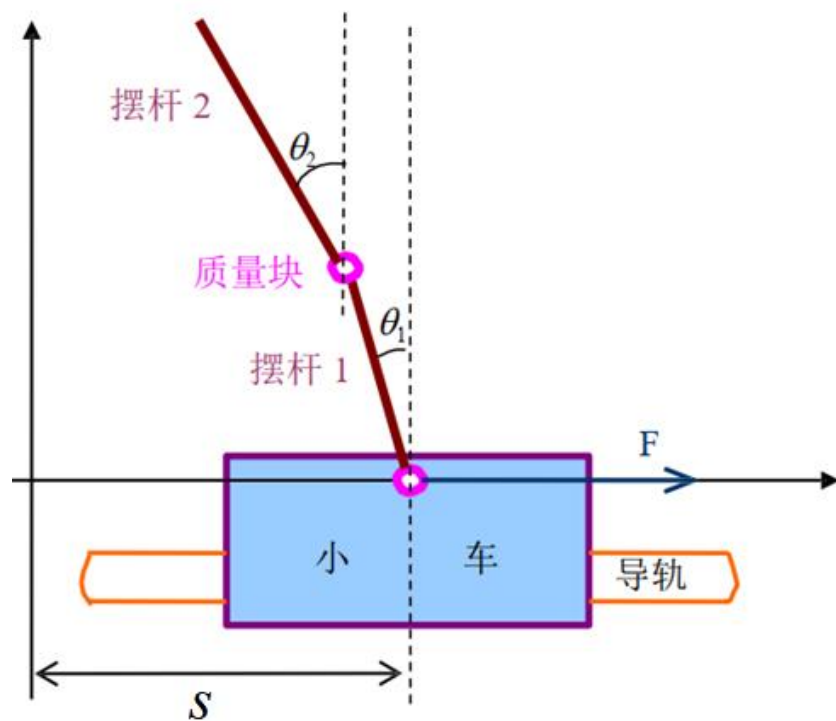
注: 其余参数值为0.

系统状态变量： $\{s, \theta_1, \theta_2, s', \theta_1', \theta_2'\}$ ,

系统状态方程标准形式：

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu \\ y(t) = Cx(t) + Du \end{cases}$$

注：在二级倒立摆系统中，控制输入一般采用小车的加速度。



将以上结果带入动态方程可得：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} s' \\ \theta_1' \\ \theta_2' \\ s'' \\ \theta_1'' \\ \theta_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 86.69 & -21.62 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -40.31 & 39.45 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ s' \\ \theta_1' \\ \theta_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 6.64 \\ -0.088 \end{bmatrix} u$$

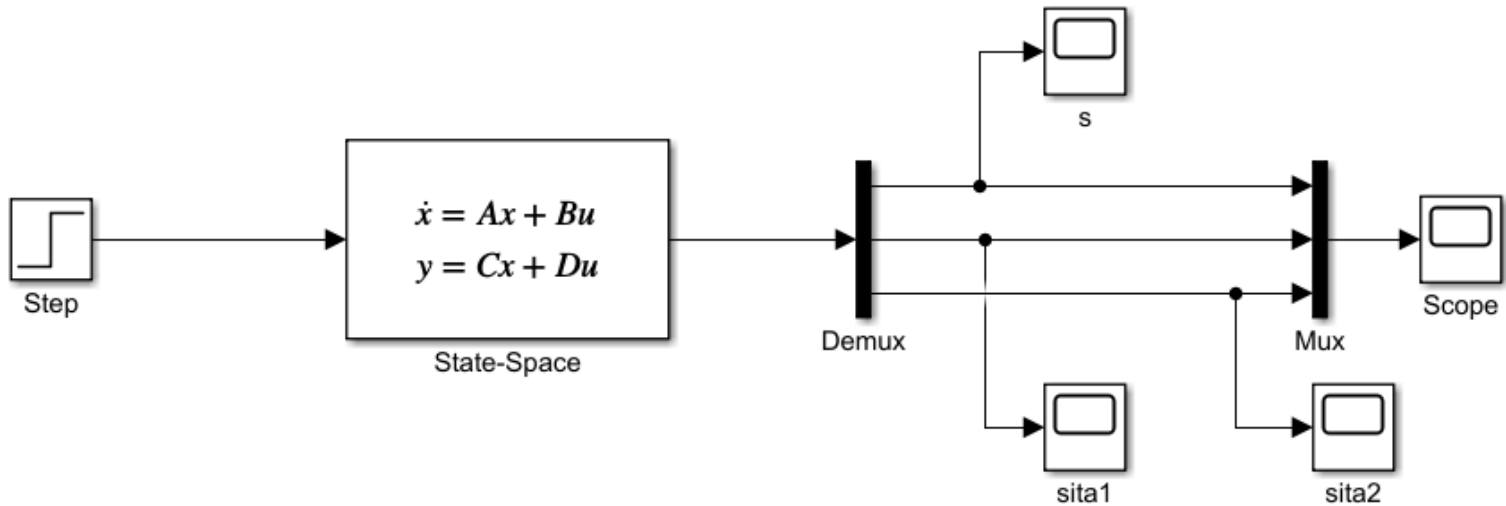
$$y = \begin{bmatrix} s \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ s' \\ \theta_1' \\ \theta_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

**思考：对二级倒立摆，为什么不采用自动控制原理中的传递函数来描述系统？**

# 实验步骤:

## 任务1: 二级倒立摆系统的稳定性分析

1) 打开Matlab, 建立如下的simulink仿真模块, 并保存。



其中，step函数的幅值为0.01，相当于一个噪声信号

Block Parameters: Step

Step  
Output a step.

Main Signal Attributes

Step time:  
1

Initial value:  
0

Final value:  
0.01

Sample time:  
0

Interpret vector parameters as 1-D  
 Enable zero-crossing detection

? OK Cancel Help Apply

## State-space模块的参数为:

Parameters

A:

[0, 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 0, 0, 0; 0, 89.69, -21.62, 0, 0, 0; 0, -40.31, 39.45, 0, 0, 0]

B:

[0; 0; 0; 1; 6.64; -0.088]

C:

[1, 0, 0, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 0, 0, 0]

D:

[0; 0; 0]

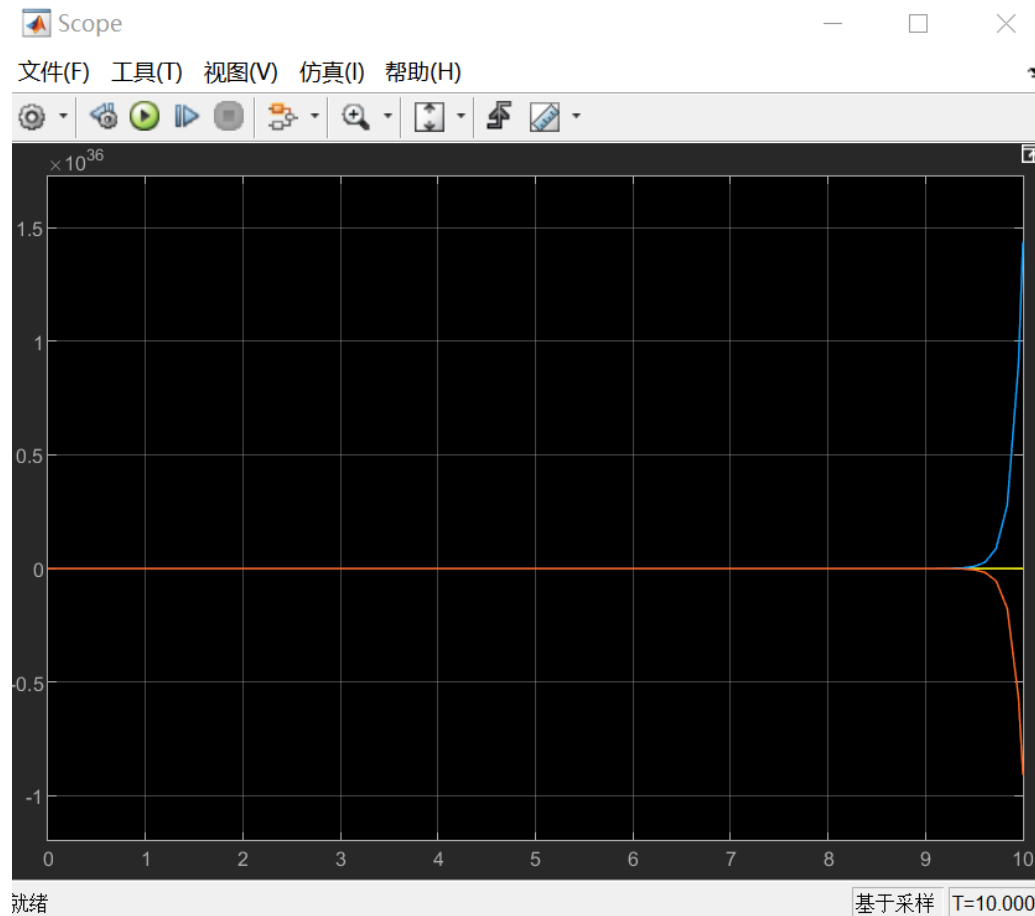
Initial conditions:

0

Parameter tunability: Auto

Allow non-zero values for D matrix initially specified as zero

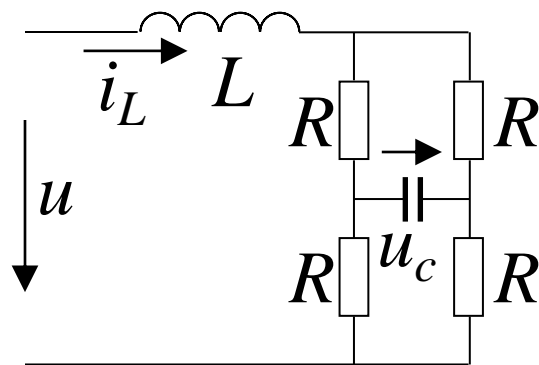
2) 点击scope, 观察输出y, 可看到状态发散, 说明需要设计控制器才能满足要求。



注意到：二级倒立摆系统有6个状态，但只有一个控制信号 $u$ ，即小车的加速度。对某些系统，不是所有的状态都能用 $u$ 来调节。换句话说，有些时候，无论怎么设计控制器 $u$ ，都无法改变系统的某些状态。因此，需要讨论倒立摆系统的可控性。

例：系统如图所示

状态  $x_1 = i_L$ ,  $x_2 = u_c$ ,  $y = u_c$



桥式电路

**表明：控制量 $u$ 可以控制状态 $x_1$ ，但对状态 $x_2$ 无控制能力，即 $x_1$ 是能控制的，而 $x_2$ 是不能控制的。**

# 能控性判据：秩判据

## 线性定常系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0 \quad t \geq 0$$

完全能控的充分必要条件是

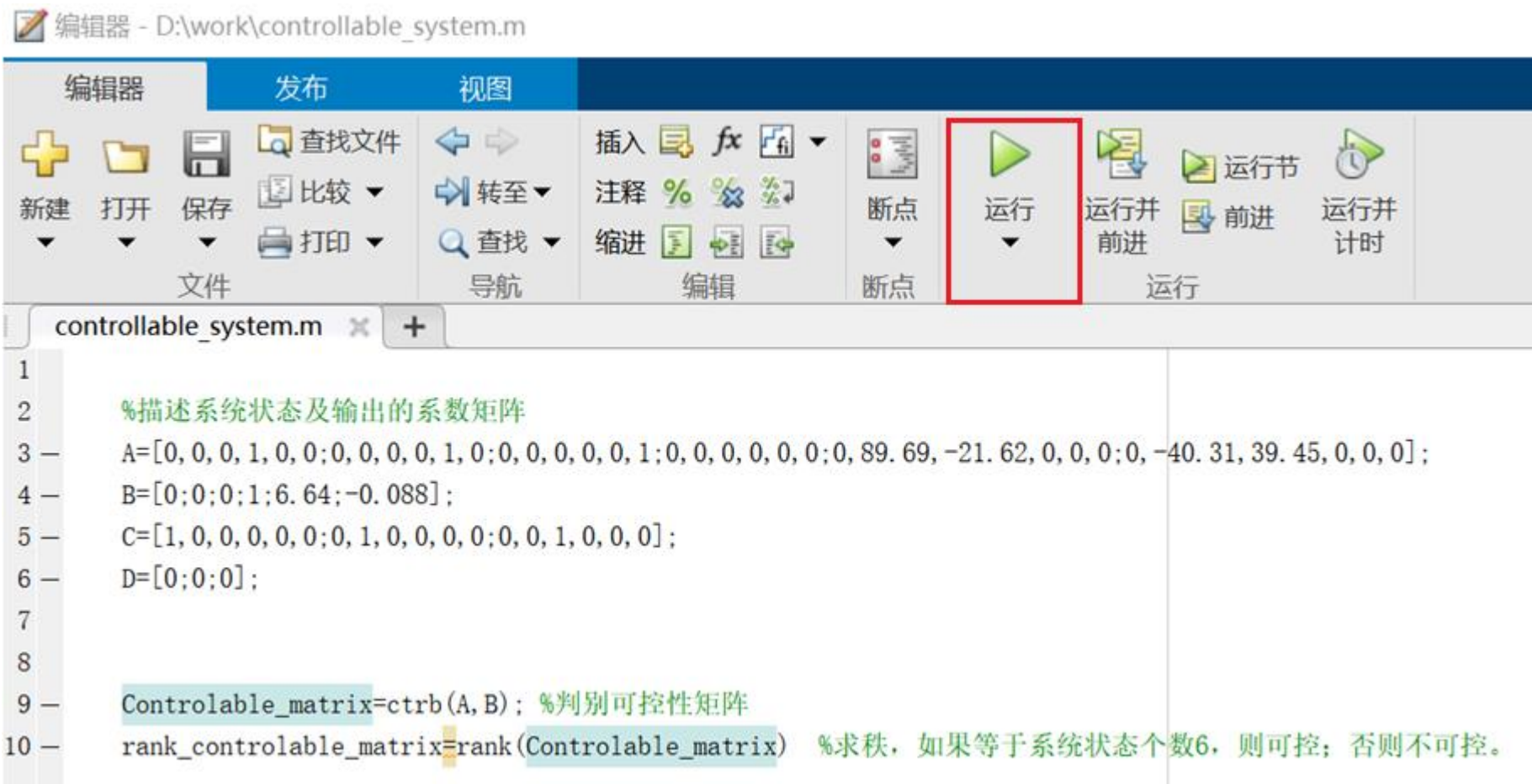
$$\text{rank} Q_c = \text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

其中：  $n$  为矩阵  $A$  的维数，  $Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$

称为系统的能控性判别阵。

## 任务2：二级倒立摆系统的可控性分析

1) 在Matlab中新建一个.m 文件，输入如下代码，保存后运行。



编辑器 - D:\work\controllable\_system.m

编辑 发布 视图

新建 打开 保存 查找文件 比较 打印 转至 查找 插入 注释 缩进 断点 运行 运行并前进 运行并计时

```
1  
2 %描述系统状态及输出的系数矩阵  
3 A=[0,0,0,1,0,0;0,0,0,0,1,0;0,0,0,0,0,1;0,0,0,0,0,0;0,89.69,-21.62,0,0,0;0,-40.31,39.45,0,0,0];  
4 B=[0;0;0;1;6.64;-0.088];  
5 C=[1,0,0,0,0,0;0,1,0,0,0,0;0,0,1,0,0,0];  
6 D=[0;0;0];  
7  
8  
9 Controlable_matrix=ctrb(A,B); %判别可控性矩阵  
10 rank_controlable_matrix=rank(Controlable_matrix) %求秩，如果等于系统状态个数6，则可控；否则不可控。
```

2) 输出结果:

```
>> controllable_system  
  
rank_controlable_matrix =  
  
6
```

这说明二级倒立摆系统是可控的，即设计合适的 $u$ ，可使得系统的输出满足要求。

设计二级倒立摆控制器 $u$ 的方法有很多，如极点配置、输出反馈、神经网络控制、模糊控制等等。

我们将采用最优控制中的线性二次型调节器方法(LQR)来设计控制器 $u$ ，这将是我们的下一次实验的主要内容。

# 实验报告要求：

- 1) 实验目的；
- 2) 实验任务/要求
- 3) 实验仪器、设备及材料
- 4) 实验原理；
- 5) 实验步骤；
- 6) 实验结果及心得。