《复变函数》综合测试题及答案

一、选择题（单选题）

1、（容易）复数 $z=\sqrt{3}-i$ 的幅角主值为（　　）

（A）$\frac{\pi}{3}$　　（B）$-\frac{\pi}{3}$　　（C）$-\frac{\pi}{6}$　　（D）$\frac{\pi}{6}$

2、（中等）复数 $z=1-\cos\theta+i\sin\theta$，$0\le\theta\le\pi$ 的模为（　　）

（A）$2\sin\frac{\theta}{2}$　　（B）$-2\sin\frac{\theta}{2}$　　（C）$2-2\cos\theta$　　（D）$2\cos\theta-2$

3、（容易）设 $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$，则 $\bar{z}$ 的指数表示为（　　）

（A）$z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$　　（B）$z=e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$　　（C）$z=\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}$　　（D）$z=e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}}$

4、（中等）若 ω 是方程 $z^3-1=0$ 的一个非零复数根，则 $1+\omega+\omega^2=$（　　）

（A）0　　（B）i　　（C）ω^2　　（D）$-\omega$

5、（容易）函数 $f(z)=\bar{z}$ 在 z 平面上（　　）

（A）不连续　（B）连续且可导　（C）连续但处处不可导　（D）以上答案都不对

6、（容易）满足 $|z-1|=|z+1|$ 的点 z 所组成的点集为（　　）

（A）$\operatorname{Im} z=0$　　（B）$\operatorname{Re} z=0$　　（C）$\operatorname{Im} z>0$　　（D）$\operatorname{Re} z>0$

7、（容易）函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析的充要条件是（　　）

（A）$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ 都在 D 内连续

（B）在 D 内 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

（C）$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ 都在 D 内存在，且 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

（D）$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ 都在 D 内连续，且 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

8、（容易）$\int_{|z-a|=\rho}\frac{1}{(z-a)^n}dz\ (\rho>0)$ 的值为（　　）

（A）当 $n=1$ 时为 $2\pi i$；当 $n\ne1$ 时为 0　　（B）0　　（C）$2\pi i$　　（D）$2n\pi i$

9、（容易）$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=$（　　）

（A）0　　（B）$\frac{\pi}{2}$　　（C）$2\pi i$　　（D）$(2\pi+k)i\ (k=0,1,2,\cdots$,

10、（容易）$f(z)$ 在复平面上解析且有界，则 $f(z)$ 在平面上为（　　）

（A）0　　（B）常数　　（C）z　　（D）$z^n\ (n\in N)$

11、（容易）复级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件是（　　）

（A）对一切 n，$z_n=0$　　（B）存在一列自然数 $\{n_k\}$，使得 $z_{n_k}=0$

（C）$\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$　　（D）$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$

12、（容易）幂级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^n}$ 的收敛半径为（　　）

（A）$+\infty$　　（B）0　　（C）1　　（D）2

13、（容易）$z=0$ 为 $f(z)=z-\sin z$ 的（　　）

（A）极点　　（B）非孤立奇点　　（C）本性奇点　　（D）3 阶零点

14、（容易）设 $f(z)=\frac{1}{e^z-1}$，则 $z=0$ 是 $f(z)$ 的（　　）

（A）1 阶极点　　（B）2 阶极点　　（C）可去奇点　　（D）本性奇点

15、（容易）$z_0\neq\infty$ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\mathrm{Res}(f,z_0)=$（　　）

（A）$f(z_0)$　　（B）0　　（C）2π　　（D）$2\pi i$

16、（容易）若复数 $z=2-2i$，则 $\bar{z}$ 的幅角主值为（　　）

（A）$\frac{\pi}{2}$　　（B）$-\frac{\pi}{2}$　　（C）$\frac{\pi}{4}$　　（D）$-\frac{\pi}{4}$

17、（中等）复数 $z=1+\cos\theta+i\sin\theta\ (0\le\theta\le\pi)$ 的模为（　　）

（A）$2\cos\frac{\theta}{2}$　　（B）$-2\cos\frac{\theta}{2}$　　（C）$2+2\cos\theta$　　（D）$2\sin\theta+2$

18、（容易）设 $z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$，则 $\bar{z}$ 的指数表示为（　　）

（A）$z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$　　（B）$z=e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$　　（C）$z=\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}$　　（D）$z=e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}}$

19、（中等）若 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则 $\omega+\omega^2+\omega^3=$（　　）

（A）0　　（B）ω　　（C）ω^2　　（D）$-\omega$

20、（中等）函数 $f(z)=\mathrm{Re}\,z$ 在 z 平面上（　　）

（A）不连续　（B）连续且可导　（C）连续但处处不可导　（D）以上答案都不对

21、（容易）下列哪些点集是区域（B　）

（A） $\operatorname{Im} z = 0$　（B） $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$　（C） $|z + 1 + i| \leq 2$　（D） $\operatorname{Re} z \geq 0$

22、（中等）若 $f(z) = u + iv$ ，且在区域 D 内满足 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ，则（　　　）

（A） $f(z)$ 在 D 内解析　（B） $f(z)$ 在 D 内不解析　（C） $f(z)$ 在 D 内可微

（D） $f(z)$ 在 D 内不一定可微

23、（容易） $\int_{|z|=1} \frac{1}{z-3} dz$ 的值为（　　）

（A） $2\pi i$　（B） 0　（C） 1　（D） -1

24、（容易） $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz =$ （　　）

（A） 0　（B） πi　（C） $2\pi i$　（D） $-2\pi i$

25、(中等)若区域 D 内解析函数 $f(z) = u + iv$ 满足 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$,则 $f(z)$ 在区域 D 内为(　　)

（A） 0　（B）常数　（C）不一定为常数　（D） $v = 0$

26、若复级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛，则（　　）

（A）对一切 n ， $z_n \neq 0$　（B）存在一列自然数 $\{n_k\}$ ，使得 $z_{n_k} \neq 0$

（C） $\lim_{n \to \infty} z_n \neq 0$　（D） $\lim_{n \to \infty} z_n = 0$

27、（容易）幂级数 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径为（　　）

（A） $+\infty$　（B） 0　（C） 1　（D） 2

28、（中等） $z = 0$ 为 $f(z) = 1 - \cos z$ 的（　　）

（A）极点　（B）非孤立奇点　（C）本性奇点　（D）2 阶零点

29、（容易）设函数 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < +\infty$ 内解析，且 $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ ，则 z_0 是 $f(z)$ 的（　　）

（A）非孤立奇点　（B）极点　（C）本性奇点　（D）解析点

30、（容易）变换 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$（a，b，c，d 为复常数）为分式线性变换的条件是（　　）

（A）$ad-bc\neq 0$　　（B）$ad-bc=0$　　（C）$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$　　（D）$a=b=c=d$

31、（容易）复数 $z=1+\sqrt{3}i$ 的幅角主值为（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$-\dfrac{\pi}{6}$　　（C）$\dfrac{\pi}{3}$　　（D）$-\dfrac{\pi}{3}$

32、（中等）若 ω 是方程 $z^3-1=0$ 的一个非零复数根，则 $\omega^3+\omega^4+\omega^5=$（　　）

（A）0　　（B）i　　（C）ω^2　　（D）$-\omega$

33、（容易）下列等式正确的是（　　）

（A）$z\cdot\bar{z}=|z|$　　（B）$z\cdot\bar{z}=|z|^2$　　（C）$z+\bar{z}=2i\operatorname{Im}z$　　（D）$z-\bar{z}=2\operatorname{Re}z$

34、（中等）下列哪些函数在复平面上解析（　　）

（A）$\sin z$　　（B）$\bar{z}$　　（C）$|z|^2$　　（D）$\operatorname{Re}z$

35、（中等）满足 $|z-1|>|z+1|$ 的点 z 所组成的点集为（　　）

（A）$\operatorname{Im}z<0$　　（B）$\operatorname{Re}z<0$　　（C）$\operatorname{Im}z>0$　　（D）$\operatorname{Re}z>0$

36、（容易）使函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析的柯西—黎曼条件是（　　）

（A）在 D 内 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}$　　（B）在 D 内 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

（C）在 D 内 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}$　　（D）在 D 内 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

37、（中等）设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $U=\{z\,\|z-z_0|<\delta\}\subset D$，在 U 上 $f(z)=0$，则在 D 内（　　）

（A）$f(z)$ 不恒为零　　（B）$f(z)$ 为不为零的常数

（C）$f(z)$ 只有惟一的零点　　（D）$f(z)\equiv 0$

38、（容易）$\int_C \dfrac{1}{(z-a)^n}dz$（其中 C 为包围点 a 任意围线）的值为（　　）

（A）当 $n=1$ 时为 $2\pi i$；当 $n\neq 1$ 时为 0　　（B）0　　（C）$2\pi i$　　（D）$2n\pi i$

39、（容易）$\int_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z^2}dz=$（　　）

（A）0　　（B）$\dfrac{\pi}{2}$　　（C）$2\pi i$　　（D）πi

40、（中等）$f(z)$ 在复平面上解析且 $\operatorname{Re}f(z)$ 有界，则 $f(z)$ 在平面上为（　　）

（A）0　　（B）常数　　（C）e^z　　（D）$\ln z$

41、（中等）在$|z|<1$内解析，在区间$(-1,1)$上具有展式$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$的函数只能是（　　）

（A）$\frac{1}{1+z}(|z|<1)$　　（B）$\ln(1-z)\ (|z|<1)$

（C）$\frac{1}{z-1}(|z|<1)$　　（D）$\frac{1}{1-z}(|z|<1)$

42、（中等）幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}$的收敛半径为（　　）

（A）$+\infty$　　（B）1　　（C）0　　（D）2

43、（容易）若$f(z)=\cos\frac{1}{z+i}$，则$z=-i$是$f(z)$的（　　）

（A）可去奇点　　（B）非孤立奇点　　（C）极点　　（D）本性奇点

44、（中等）若$f(z)=\frac{g(z)}{z-a}$，且$g(z)$在点a解析，$g(a)\neq 0$，则$\mathrm{Res}(f,a)=$（　　）

（A）$g(a)$　　（B）$2\pi i g(a)$　　（C）0　　（D）$g'(a)$

45、（中等）变换$w=\frac{z-a}{1-\overline{a}\cdot z}\ (0<|a|<1)$把单位圆$|z|<1$保形映射成（　　）

（A）上半平面$\mathrm{Im}\ z>0$　　（B）单位圆$|w|<1$

（C）下半平面$\mathrm{Im}\ z<0$　　（D）$|w|>1$

46、（容易）$\arg(-3+4i)=$（　）

（A）$\pi-\arctan\frac{3}{4}$（B）$\pi+\arctan\frac{3}{4}$　（C）$\pi-\arctan\frac{4}{3}$　（D）$\pi+\arctan\frac{4}{3}$

47、（中等）若ω是方程$z^3=1$的一个非零复数根，则下列哪些也是此方程的根（　）

（A）$\overline{\omega}$　　（B）$-\omega$　　（C）$-\omega^2$　　（D）i

48、（中等）下列等式不正确的是（　）

（A）$z\cdot\overline{z}=|z|^2$　　（B）$\arg z_1\cdot z_2=\arg z_1+\arg z_2$（$z_1\neq 0$，$z_2\neq 0$）

（C）$A\mathrm{rg}\, z_1\cdot z_2=A\mathrm{rg}\, z_1+A\mathrm{rg}\, z_2$（$z_1\neq 0$，$z_2\neq 0$）　　（D）$\arg\overline{z}=-\arg z\ (z\neq 0)$

49、（容易）下列哪些函数在复平面上不解析（　）

（A）$\sin\overline{z}$　　（B）$\cos z$　　（C）chz　　（D）e^{-z}

50、（容易）设$E=\{z\,\|\mathrm{Im}\ z|<2,|\mathrm{Re}\ z|<3\}$，则$E$一定是（　）

（A）无界区域　（B）有界单连通区域　（C）多连通区域　（D）闭区域

51、（容易）使函数$f(z)=u+iv$在区域D内解析的充要条件是（　）

（A）u，v 在 D 内具有一阶连续的偏导数
（B）u，v 在 D 内可微，且在 D 内满足柯西—黎曼条件
（C）u，v 在 D 内具有一阶偏导数，且在 D 内满足柯西—黎曼条件
（D）u，v 在 D 内在 D 内满足柯西—黎曼条件

52、（容易）设 $f(z)$ 在复平面上解析，且 C 为不通过原点的围线，则 $\int_C \frac{f(z)}{z}dz =$ （ ）

（A）$2\pi i \cdot f(0)$　　（B）$f(0)$

（C）0　　（D）0 或 $2\pi i \cdot f(0)$

53、（中等）$\int_{|z|=1} \frac{1}{\cos z}dz =$ （ ）

（A）0　　（B）1　　（C）$2\pi i$　　（D）πi

54、（容易）若 $f(z)$ 在区域 D 内满足 $f'(z) = 0$，则 $f(z)$ 在区域 D 内必为（ ）

（A）0　　（B）z　　（C）常数　　（D）e^z

55、（中等）$f(z)$ 在复平面上解析且 $\mathrm{Im}\ f(z)$ 有界，则 $f(z)$ 在平面上为（ ）

（A）0　　（B）常数　　（C）e^z　　（D）$\ln z$

56、（中等）在复平面上解析，在区间 $[0,1]$ 上等于 $\sin x$ 的函数只能是（ ）

（A）$\sin(\frac{\pi}{2}+z)$　　（B）$\sin(\pi+z)$

（C）$\sin iz$　　（D）$\sin z$

57、（容易）若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R > 0$，则在闭圆 $|z| \le r(< R)$ 上 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ （ ）

（A）不绝对收敛　　（B）一致收敛且绝对收敛
（C）绝对收敛但不一致收敛　　（D）一致收敛但不绝对收敛

58、（中等）$z = 0$ 为 $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$ 的（ ）

（A）本性奇点　　（B）非孤立奇点　　（C）二阶极点　　（D）可去奇点

59、（容易）函数 $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ 在 $z = 0$ 处的留数为（ ）

（A）0　　（B）$2\pi i$　　（C）1　　（D）πi

60、（容易）变换 $w = \frac{z-i}{z+i}$ 把上半平面 $\mathrm{Im}\ z > 0$ 保形映射成（ ）

（A）上半平面 $\mathrm{Im}\ z > 0$　　（B）单位圆 $|w| < 1$

（C）下半平面 $\mathrm{Im}\ z < 0$　　（D）$|w| > 1$

61、（容易）若复数 $z = 1 - i$，则 z 的幅角主值为（ ）

（A）$-\frac{\pi}{4}$　　（B）$\frac{\pi}{4}$　　（C）$-\frac{3\pi}{4}$　　（D）$\frac{3\pi}{4}$

62、（中等）若 $z^2=-1$，则 z 等于（　　）

（A）$-i$　（B）$\pm i$　（C）i　（D）± 1

63、（容易）下列点集是区域的是（　　）

（A）$\{z \mid \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}\}$　（B）$\{z \mid |z| = 1\}$　（C）$\{z \mid \operatorname{Im} z > \frac{1}{2}\}$　（D）$\{z \mid z^2 = 1\}$

64、（容易）设 $f(z)=x-yi$（$x,y\in R$），则（　　）

（A）$f(z)$ 在 z 平面上解析　　（B）$f(z)$ 在 $z=0$ 可导

（C）$f(z)$ 在 z 平面上处处可导　　（D）$f(z)$ 在 z 平面上连续

65、（中等）设 $f(z)=u+iv$，且在区域 D 内满足柯西—黎曼条件，则（　　）

（A）$f(z)$ 在 D 内不一定解析　　（B）$f(z)$ 在 D 内解析

（C）$f(z)$ 在 D 内可导　　（D）$f(z)$ 在 D 内一定不可导

66、（容易）下列哪些函数在 z 平面上解析（　　）

（A）$\bar{z}$　（B）$\cos z$　（C）$|z|$　（D）$e^{|z|}$

67、（容易）$\int_{|z|=1} \frac{1}{\cos z} dz =$（　　）

（A）1　（B）$2\pi i$　（C）0　（D）-1

68、（容易）$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz =$（　　）

（A）0　（B）1　（C）$\frac{1}{2\pi i}$　（D）$2\pi i$

69、（中等）若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $\operatorname{Re} f(z)=$ 实常数，则 $f(z)$ 在区域 D 内为（　　）

（A）复常数　（B）$\operatorname{Re} z$　（C）$\bar{z}$　（D）$\sin z$

70、（容易）若 $f(z)=\sin z$，则下列结论不成立的是（　　）

（A）$f(z)$ 为解析函数　（B）$f(z)$ 有界　（C）$f(z)$ 为周期函数　（D）$f(z)$ 有零点

71、（中等）复级数 $\sum_{n=0}^{\infty} i^n$（　　）

（A）一定收敛　　（B）等于 $\frac{1}{1-i}$

（C）一定发散　　　　　　（D）以上结论都不对

72、（容易）设幂级数为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$，则（　　）

（A）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 仅在点z_0收敛　　（B）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 在全平面上收敛

（C）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 在点z_0不收敛　　（D）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 在点z_0收敛

73、（容易）幂级数$1+\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot z^n$的收敛半径为（　　）

（A）0　　（B）$+\infty$　　（C）1　　（D）2

74、（容易）幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$在$|z|<1$内的和函数为（　　）

（A）$\frac{1}{1-z}$　　（B）$\frac{z}{1-z}$　　（C）$\frac{1}{1+z}$　　（D）$\frac{z}{1+z}$

75、（中等）$f(z)=1-\cos z$以$z=0$为（　　）

（A）一阶零点　　（B）一阶极点　　（C）二阶零点　　（D）二阶极点

76、（容易）设$f(z)$在$0<|z-z_0|<R$内解析，且$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$，则$z_0$是$f(z)$的（　　）

（A）零点　　（B）可去奇点　　（C）非孤立奇点　　（D）极点

77、（中等）若$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$，则$z=0$必为$f(z)$的（　　）

（A）可去奇点　（B）零点　　（C）本性奇点　　（D）二阶极点

78、（中等）若∞是函数$f(z)$的可去奇点，则$\mathrm{Res}(f,\infty)=$（　　）

（A）0　　（B）不一定为0　（C）不存在　　（D）以上结论都不对

79、（容易）若$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$，则$\mathrm{Res}(f,0)=$（　　）

（A）∞　　（B）0　　（C）1　　（D）以上答案都不对

80、（中等）映射$w=z^3+2z^2$在点$z=i$处的伸缩率为（　　）

（A）$\sqrt{5}$　　（B）$2\sqrt{5}$　　（C）25　　（D）5

81、（容易）若复数$z=-1+\sqrt{3}\cdot i$，则z的幅角主值为（　　）

（A）$\frac{2\pi}{3}$　　（B）$-\frac{2\pi}{3}$　　（C）$-\frac{\pi}{6}$　　（D）$\frac{\pi}{6}$

82、（中等）若$z^3=1$且$\mathrm{Im}\, z>0$，则z等于（　　）

（A）1　　（B）$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　（C）$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　（D）$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

83、（容易）下列点集不是区域的是（　　）

（A）$\{z \mid \mathrm{Im}\, z>0\}$　　（B）$\{z \mid \mathrm{Re}\, z<0\}$　　（C）$\{z \mid |z| \le |1+i|\}$　　（D）$\{z \mid |z|>1\}$

84、（中等）设$f(z)=i\cdot \bar{z}$，则（　　）

（A）$f(z)$ 在 z 平面上处处不连续　　（B）$f(z)$ 在 z 平面上解析

（C）$f(z)$ 为整函数　　（D）$f(z)$ 在 z 平面上处处不解析

85、（容易）设 $f(z)=u+iv$，则使得 $f(z)$ 在区域 D 内解析的柯西—黎曼条件是（　　）

（A）$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$　　（B）$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$

（C）$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$　　（D）$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$

86、（容易）在 z 平面上处处不解析的函数是（　　）

（A）z　　（B）$\operatorname{Im} z$　　（C）$\cos z$　　（D）$e^{\sin z}$

87、（容易）$\int_{|z|=1}\frac{z}{z-3}dz=$（　　）

（A）$-2\pi i$　　（B）$2\pi i$　　（C）0　　（D）1

88、（中等）$\int_{|z|=1}\frac{\sin z^2}{z}dz=$（　　）

（A）$2\pi i$　　（B）1　　（C）$-\pi i$　　（D）0

89、（中等）若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $|f(z)|=$ 实常数，则 $f(z)$ 在区域 D 内为（　　）

（A）复常数　　（B）0　　（C）z　　（D）$e^{|z|}$

90、（容易）若 $f(z)=e^z$，则下列结论不成立的是（　　）

（A）$f(z)$ 为整函数　（B）$f(z)$ 非周期函数　（C）$f(z)$ 无零点　（D）$f(z)$ 无界

91、（容易）幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n!\cdot z^n$ 的收敛半径为（　　）

（A）$+\infty$　　（B）1

（C）0　　（D）以上结论都不对

92、（容易）设幂级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R>0$，则此幂级数的和函数（　　）

（A）在 $|z|<R$ 内不连续　　（B）在 $|z|<R$ 内不解析

（C）在 $|z|<R$ 内不能逐项求导　　（D）在 $|z|<R$ 内可逐项积分

93、（中等）在 $|z|<1$ 内解析，且在区间 $(-1,1)$ 上具有展式 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n$ 的函数只能为（　　）

（A）$\frac{1}{1+z}$　　（B）$\frac{1}{1-z}$　　（C）$\frac{1}{1+z^2}$　　（D）$\frac{1}{1-z^2}$

94、（容易）若 $f(z)=\cos\frac{1}{z+i}$，则 $z=-i$ 为 $f(z)$ 的（　　）

（A）极点　（B）本性奇点　（C）可去奇点　（D）非孤立奇点

95、（中等）$f(z)=\frac{z}{(e^z-1)^2}$ 以 $z=0$ 为（　　）

（A）可去奇点　（B）本性奇点　（C）一阶极点　（D）二阶极点

96、（容易）若 $f(z)=\frac{\varphi(z)}{z-a}$，且 $\varphi(z)$ 在点 a 解析，则 $\mathrm{Res}(f,a)=$（　　）

（A）0　（B）$\varphi'(a)$　（C）$2\pi i\cdot\varphi'(a)$　（D）$\varphi(a)$

97、（容易）$f(z)=\frac{e^{iz^2}}{z^2+1}$ 在 $z=i$ 的留数为（　　）

（A）$-\frac{i}{2}e^{-i}$　（B）0　（C）$-\frac{i}{2}e^{-1}$　（D）$-\frac{1}{2}e^{-1}$

98、（容易）$\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的幂级数展开式为（　　）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$　（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}$　（D）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

99、（中等）变换 $w=e^{i\theta}\frac{z-i}{1+i\cdot z}$（$\theta$ 为实常数）把单位圆 $|z|<1$ 保形映射成（　　）

（A）上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$　（B）下半平面 $\mathrm{Im}\,z<0$　（C）$|w|<1$　（D）$|w|>1$

100、（中等）变换 $w=e^{i\theta}\frac{z-i}{z+i}$（$\theta$ 为实常数）把上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 保形映射成（　　）

（A）左半平面 $\mathrm{Re}\,z<0$　（B）右半平面 $\mathrm{Re}\,z>0$　（C）上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$　（D）$|z|<1$

二、多项选择题（每题至少有两个或两个以上的正确答案）

1、（较难）若 $\omega=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 是方程 $z^3=1$ 的根，则下列哪些值不为 $1+\omega+\omega^2$ 的值（　　）

（A）0　（B）i　（C）$-i$　（D）ω^2

2、（较难）复数 $z=1-\cos\theta+i\sin\theta$（$0<\theta<\pi$）的模为（　　）

（A）$2\sin\frac{\theta}{2}$　（B）$\sqrt{2(1-\cos\theta)}$　（C）$2(1-\cos\theta)$　（D）$-2\sin\frac{\theta}{2}$

3、（较难）下列点集哪些是区域（　　）

（A）$\mathrm{Im}\,z>\mathrm{Re}(1+i)$　（B）$0<\arg z\le\frac{\pi}{4}$　（C）$1<\mathrm{Im}\,z<2$　（D）$\mathrm{Im}\,z=3$

4、（较难）若 $f(z)=\mathrm{Re}\,z$，则下列结论正确的是（　　）

（A）$f(z)$ 在 z 平面上连续　（B）$f(z)$ 在 z 平面上处处不解析

（C） $f(z)$ 在 z 平面上解析　　　　　（D） $f(z)$ 仅在 $z=0$ 处解析

5、(较难) 若 $f(z)=1+\frac{1}{z}$，则下列结论正确的是　(　　　　)

（A） $Res(f,0)=1$　　　　　（B） $Res(f^2,0)=1$

（C） $Res(f^2,0)=2$　　　　　（D） $Res(z\cdot f,0)=0$

6、(较难)若 ω 不是方程 $z^3=1$ 的虚数根，则下列哪些值也一定不是此方程的根(　　　　　)

（A） $\overline{\omega}$　　　（B） ω^3　　　（C） -1　　　（D） $-\omega$

7、(较难) 复数 $z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ 的指数表示形式为　(　　　　)

（A） $z=e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}}$　（B） $z=e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$　（C） $z=e^{-i\cdot(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$　$(k\in Z)$（D） $z=e^{i\cdot(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$　$(k\in Z)$

8、(较难) 设 $E=\{z\,|-1<\operatorname{Im} z<1,-1<\operatorname{Re} z<1\}$，则 E 一定不能是　(　　　　)

（A）有界单连通区域　（B）有界闭区域　　（C）无界区域　　（D）区域

9、(较难) 下列哪些函数在全平面上不解析 (　　　　)

（A） $\sin z$　　　（B） $\overline{z}$　　　（C） $\operatorname{Re} z$　　　（D） $|z|^2$

10、(较难) 若 $f(z)=\sin\frac{1}{z}$，则 $z=0$ 为 $f(z)$ 的 (　　　　)

（A）本性奇点　　　　　（B）孤立奇点

（C）可去奇点　　　　　（D）极点

三、填空题（将正确的答案填在横线上）

1、(中等) 复数 $z=\frac{(3+i)(2-i)}{(3-i)(2+i)}$ 的模 $|z|=$ ________________。

2、(容易) 函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析是指______________________________________。

3、(容易) $\int_{|z-1|=1}\frac{1}{z+3}dz=$ __________________________。

4、(容易) 刘维尔定理是指____。

5、(中等) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot z^n}{2^n}$ 的收敛半径 $R=$ _______________，收敛圆为___________。

6、（容易）函数 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在 $z=0$ 处的幂级数展式为________________________。

7、（容易）设 $f(z)=\dfrac{e^{i\cdot z}}{1+z^2}$，则 $\mathrm{Res}(f,i)=$ ________________________________。

8、（容易）分式线性变换的一般形式为____________________________________。

9、（容易）设非零复数 z 的幅角为 θ，则 z 的三角表示式为______________________。

10、（中等）满足等式 $e^{i\cdot k\frac{\pi}{2}}=i$ 的最小正整数 $k=$ __________________。

11、（中等） $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z$ 的可导点为_______________________。

12、（较难）设 $f(z)$ 在闭区域 $\{z\,|1\le|z|\le 2\}$ 上解析，且 $\int\limits_{|z|=1}f(z)dz=\pi$，则

$\int\limits_{|z|=2}f(z)dz=$ _____。

15、（容易）函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析是指___________________________________。

16、（容易）若复数 $z=5+i\sin 1$，则 $\mathrm{Re}(iz)=$ _______________。

17、（中等）设 $z=x+iy$， x， y 为实数， $x>0$，则 $\arg z=$ _______________。

18、（较难）若 $f(z)=(1+i)u$ 在区域 D 内解析， u 为 x， y 的二元实函数，则在区域 D 内

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=$ _______， $u=$ __________。

19、（容易）设函数 $f(z)$ 在复平面上解析，且有界，则 $f(z)$ 在复平面上为_______________。

20、（容易）若函数 $f(z)$ 在点 z_0 解析，则 $f(z)$ 在点 z_0 ________导数。

21、（容易）函数 $f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}$ 在 $z=0$ 处的幂级数展式为________________________。

22、（中等）设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，且 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内有罗朗展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

则 z_0 必为 $f(z)$ 的__________奇点。

23、（中等）设 $f(z)=\dfrac{e^{i\cdot z}}{1+z^2}$，则 $\mathrm{Res}(f,-i)=$ __________________。

24、（中等）对任意的非零复数 z， $Argz$ 是多值的，彼此相差______的整数倍。

25、（中等）设 z_1， z_2 是互为共轭的非零复数，则 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=$ ______________。

26、（中等）若区域D内解析的函数$f(z)$，在区域D内满足$\mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{Im}\, f(z)$，则在区域$D$内$f(z) =$ ________。

27、（容易）设函数$f(z)$在长度为l的光滑曲线C上可积，且在C上，$|f(z)| \le M$，则$\left|\int_C f(z)dz\right| \le$ ____________________。

28、（容易）在复平面上 n 次多项式$P(z)$的零点个数为__________个（几阶零点要算几个零点）。

29、（容易）函数$f(z) = e^{z^2}$在$z = 0$处的幂级数展式为 ______________________________。

30、（中等）$f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$在$0 < |z| < 1$内的罗朗展式为________________________________。

31、（容易）一般分式线性变换是由____________、___________、__________、_________四种更简单的分式线性变换复合而成。

32、（容易）若复数$z = 2006 + i\cos 2005$，则$\mathrm{Re}(iz) =$ __________________。

33、（容易）设$f(z)$在z平面上解析，且有界，则$f(z)$在z平面上为_____________。

34、（容易）$f(z) = \sin z$在$z = 0$处的幂级数展式为______________________________。

35、（较难）设$f(z)$在闭区域$1 \le |z| \le 100$上解析，且$\int_{|z|=100} f(z)dz = 100$，则$\int_{|z|=1} f(z)dz =$ ______。

36、（容易）设$f(z) = \dfrac{e^{-i\cdot z}}{1+z^2}$，则$\mathrm{Res}(f, i) =$ ____。

37、（容易）若复数$z = 2006 + i\cdot 2005$，则$\mathrm{Im}(i\bar{z}) =$ __________________。

38、（中等）设$f(z)$是以∞为可去奇点的整函数，则$f(z)$必为_____________。

39、（容易）$f(z) = \cos z$在$z = 0$处的幂级数展式为______________________________。

40、（中等）设$f(z)$在$|z-a| < R$内解析，且以点a为非孤立零点，则在$|z-a| < R$内$f(z) =$ ____。

41、（中等）设$f(z) = e^{\sin z}$，则$\mathrm{Res}(f, 0) =$ ____________________________。

四、判断题（正确的打“√”，错误的打“×”）

1、（容易）设 z_1 和 z_2 是两个不相等的复数，则 z_1 和 z_2 必可比较大小。（ ）

2、（中等） $f(z)$ 在点 a 解析是指 $f(z)$ 在点 a 可导。（ ）

3、（中等）在复数范围内，$z^3=1$ 的充要条件是 $z=1$。（ ）

4、（容易）若 $f(z)$ 在以围线 C 为边界的单连通区域 D 内解析，且在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则 $\int_C f(z)dz=0$。（ ）

5、（中等）若 $\mathrm{Res}(f,z_0)=a$，则 $\mathrm{Res}(f^2,z_0)=a^2$。（ ）

6、（中等）若复数 z 与其共轭复数 $\overline{z}$ 相等，则 z 必为纯虚数。（ ）

7、（容易） $f(z)$ 在点 a 点可导，则 $f(z)$ 在点 a 解析。（ ）

8、（中等）存在函数 $f(z)$ 在复平面上处处连续，但处处不可导。（ ）

9、（较难）设 $f(z)=\dfrac{1}{z}$，则 $\mathrm{Res}(f,0)=1$，从而 $\mathrm{Res}(f^2,0)=1^2=1$。（ ）

10、（中等）如果 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，则 $w=f(z)$ 是区域 D 内的保形映射。（ ）

11、（容易）因为 $1<2$，则 $i<2i$。（ ）

12、（容易）复数 0 的模和幅角都没有意义。（ ）

13、（中等）若 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，则 $g(z)=-v+i\cdot u$ 也在区域 D 内解析。（ ）

14、（中等）若解析函数 $f(z)$ 以 z_0 为零点，则存在 z_0 的某邻域，使得 z_0 为 $f(z)$ 在此邻域内的惟一的零点。（ ）

15、（容易）设 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内解析，则 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在。（ ）

16、（中等）在复数范围内，$z^2=-1 \Leftrightarrow z=i$。（ ）

17、（容易）若函数 $f(z)$ 在区域 D 内的每一点都可导，则 $f(z)$ 在 D 内不一定解析。（ ）

18、（较难） $f(z)=|z|^2$ 在复平面上连续，但在复平面上处处不可导。（ ）

19、（中等）若函数 $f(z)$ 在有界区域 D 内解析，在闭区域 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则 $f(z)$ 在边界 C 上且只在边界 C 达到最大模。（ ）

20、（容易）分式线性变换 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}\ (ad-bc\neq 0)$ 在扩充 z 平面上是保形的。（ ）

21、（容易）任意两个复数必可比较大小。（ ）

22、（容易）若 $f(z)$ 在点 z_0 可导，则 $f(z)$ 在点 z_0 不一定解析。（　　）

23、（中等）不存在在 z 平面上处处连续处处不可导的复变函数。（　　）

24、（中等）设 $f(z)=\frac{1}{z}$，则 $\mathrm{Res}(f,0)=1$，$\mathrm{Res}(f^2,0)=1^2=1$。（　　）

25、（中等）若 $w=f(z)$ 是区域 D 内的解析函数，则 $f(D)$ 也必为区域。（　　）

26、（中等）$z-\bar{z}=0$ 是 z 为实数的充要条件。（　　）

27、（容易）若 $f(z)$ 在点 z_0 解析，则 $f(z)$ 在点 z_0 一定可导。（　　）

28、（中等）$f(z)=|z|^2$ 在 z 平面上处处不可导。（　　）

29、（中等）若 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\mathrm{Res}(f,\infty)=0$。（　　）

30、（容易）若 $w=f(z)$ 是区域 D 内的单叶解析函数，则 $f(D)$ 不一定为区域。（　　）

五、计算题

1、（较难）将复数 $z=(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^2$ $(0\le\varphi<\pi)$ 化为指数形式。

2、（中等）在复数范围内解方程 $z^4+a^4=0$ $(a>0)$。

3、（中等）计算积分 $\int_C |z|dz$，其中（1）C 是从 -1 到 1 的直线段；（2）C 是从 -1 到 1 的上半单位圆周：$|z|=1$。

4、（较难）求 $\int_C \frac{z-2}{z^2-z}dz$，其中 C 是圆周：$|z|=2$。

5、（中等）求下列函数在 $z=0$ 处的幂级数展开式

（1）$\int_0^z e^{\xi^2}d\xi$；　　（2）$\frac{1}{(1-z)^2}$。

6、（较难）求实积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$。

7、（较难）试求把单位圆盘 $|z|<1$ 保形映射成单位圆盘 $|w|<1$，并且把 $|z|<1$ 内的一点 $z_0\ne 0$ 变成 0 的分式线性变换。

8、（中等）在复数范围内解方程 $z^8+1=0$。

9、（中等）计算积分 $\int_{|z-a|=R}\frac{1}{(z-a)^n}dz$，其中 n 为整数，$R>0$。

10、（较难）计算积分 $\int_{|z|=5} \frac{5z-2}{z^2-1} dz$ 。

11、（较难）设 $f(z) = \int_{|\xi|=3} \frac{e^{\xi}-\xi}{\xi - z} d\xi$ ，求 $f'(i)$ 。

12、（中等）设 $f(z) = e^{\frac{1}{(z-1)^2}}$ ，求 $\mathrm{Res}(f,1)$ 。

13、求 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环 $0 < |z-1| < 1$ 内的罗郎展式。

14、（较难）利用留数计算实积分 $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{5+4\cos x} dx$ 。

15、（较难）试求把单位圆盘 $|z| < 1$ 保形映射成单位圆盘 $|w| < 1$ 的分式线性变换 $w = L(z)$ ，

并且 $L(\frac{1}{2}) = 0$ ， $L(0) = -\frac{1}{2}$ 。

16、（较难）将复数 $z = (1-\cos\varphi + i\sin\varphi)^2$ $(0 \le \varphi < \pi)$ 化为指数形式。

17、（中等）求积分 $\int_C \frac{1}{z^2 - z} dz$ ，其中 C 是圆周： $|z| = 2$ 。

18、（中等）计算积分 $\int_{|z|=2} \frac{e^z \sin z}{z^2-9} dz$ 。

19、（较难）设 $f(z) = \int_{|\xi|=3} \frac{3\xi^2 + 7\xi + 1}{\xi - z} dz$ ，求 $f'(1+i)$ 和 $f'(3+3i)$ 。

20、（中等）设 $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ ，求 $\mathrm{Res}(f,0)$ 。

21、（中等）求 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环 $1 < |z| < 2$ 内的罗郎展式。

22、（较难）利用留数计算实积分 $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta} d\theta$ 。

23、（较难）试求把上半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 保形映射成单位圆盘 $|w| < 1$ 的分式线性变换 $w = L(z)$ ，

并且满足 $L(i) = 0$ ， $L(0) = -1$ 。

24、（中等）求复数 $z = \frac{(2005+2006i)(2003-2004i)}{(2005-2006i)(2003+2004i)}$ 的模。

25、（中等）求积分$\int_{C} \frac{1}{z^{2}+2z+2} dz$，其中$C$是圆周：$|z|=1$。

26、（较难）计算积分$\int_{|z|=2} \frac{z}{(z^{2}-9)(z+i)} dz$。

27、（难）用复积分和留数定理两种方法计算积分$\int_{|z|=2} \frac{e^{z}}{(z^{2}+1)^{2}} dz$。

28、（较难）设$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+1)^{2}}$，求$\mathrm{Res}(f,-1)$和$\mathrm{Res}(f,\infty)$。

29、（中等）求$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$在圆环$2<|z|<+\infty$内的罗郎展式。

30、（较难）利用留数计算实积分$I=\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5}+\sin\theta} d\theta$。

31、（难）试求把带形区域$0<\mathrm{Im}\, z<\pi$映射成单位圆盘$|w|<1$的保形映射变换$w=f(z)$。

33、（中等）在复数范围内解方程$z^{6}+a^{6}=0\ (a>0)$。

34、（中等）计算复积分$\int_{|z-2|=R} \frac{1}{(z-2)^{n}} dz$，其中$n\geq 1$为自然数，$R>0$。

35、（较难）设$f(z)=\int_{|\xi|=2} \frac{e^{\xi}-\xi^{2}-1}{\xi-z} dz$，求$f'(i)$，$f'(2+i)$。

36、（中等）求出函数$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$在扩充平面上的所有孤立奇点的去心邻域内的罗郎展式。

37、（较难）用留数计算实积分$\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2+\cos\theta} d\theta$。

38、（中等）设复数$z=\frac{(1+\sqrt{3}+i)(\sin\sqrt{2}-i)}{(1+\sqrt{3}-i)(\sin\sqrt{2}+i)}$，求$|\bar{z}|$。

39、（中等）计算复积分$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^{2}+4z+5} dz$。

40、（较难）设$f(z)=\int_{|\xi|=2} \frac{5\xi^{2}+9\xi^{2}+3}{\xi-z} dz$，求$f'(i)$，$f'(1+2i)$。

41、（中等）求出函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ 在扩充平面上的所有孤立奇点的去心邻域内的罗朗展式。

42、（较难）用留数计算实积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2\theta}d\theta$ 。

六、证明题

1、（中等）证明：$\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=2(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2)$，并说明其几何意义。

2、（难）设 $u(x,y)=x^3-3xy^2$，证明：

（1）$u(x,y)$ 是 z 平面上的调和函数；

（2）求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(0)=i$ 。

3、（难）（1）证明：$\displaystyle\int_C\frac{1}{z+2}dz=0$，其中 $C:\left|z\right|=1$；

（2）利用（1）的结果证明 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$ 。

4、（难）若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在区域 D 内，$\mathrm{Re}\, z=e$，则在区域 D 内 $f(z)=e+ic$，其中 c 为是实常数。

5、（难）设 $f(z)$ 在闭区域 $\left|z-z_0\right|\le R\ (R>0)$ 上解析，令 $M(R)=\max\limits_{\left|z-z_0\right|=R}\left|f(z)\right|$，证明：

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|\le\frac{n!\cdot M(R)}{R^n}\ (n=0,1,2,\cdots,\qquad \text{---------- 柯西不等式。}$$

6、（难）若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在区域 D 内，$\mathrm{Im}\, z=1$，则在区域 D 内 $f(z)=c+i$，其中 c 为是实常数。

7、（难）设 $f(z)$ 在闭区域 $\left|z\right|<R\ (R>0)$ 上解析，并且具有泰勒展式

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots\ .\ {}_n\ \ .\ \cdots,$$

令 $M(r)=\max\limits_{\left|z\right|=r}\left|f(z)\right|$，证明：

$$\left|a_n\right|\le\frac{M(r)}{r^n}\quad(n=0,1,2,\cdots,\quad \cdots<R)\quad 。$$

8、（难）若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，$\overline{f(z)}$ 也在区域 D 内解析，则在区域 D 内 $f(z)$ 恒为常数。

9、（难）设 $f(z)$ 在闭圆 $|z| \le 1$ 上解析，且

$$\int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = 0, \quad z \in \{z \| z| < 1\},$$

证明：在 $|z| \le 1$ 内 $f(z)$ 恒为常数。

10、（难）若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $\overline{i \cdot f(z)}$ 也在区域 D 内解析，则 $f(z)$ 在区域 D 内必为常数。

11、（难）设 $f(z)$ 在闭圆域 $|z| \le 1$ 上解析，且在圆域 $|z| < 1$ 内，恒有 $\left|\int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi\right| = 1$，证明：在闭圆域 $|z| \le 1$ 上，$f(z) \equiv c$，且 $c = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{i\theta}$，$\theta$ 为实常数。

12、（难）若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $\mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{Im}\, f(z)$，则 $f(z)$ 在区域 D 内必为常数。

13、（难）设 $f(z)$ 在闭圆域 $|z| \le 1$ 上解析，且在圆域 $|z| < 1$ 内，恒有 $\mathrm{Re}[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi] = 1$，证明：在闭圆域 $|z| \le 1$ 上，$f(z) \equiv 1 + i \cdot c$，其中 c 为实常数。

复变函数综合测试题库

（解答）

一、选择题（单选题）

1、复数 $z = \sqrt{3} - i$ 的幅角主值为（ C ）

（A）$\frac{\pi}{3}$　　（B）$-\frac{\pi}{3}$　　（C）$-\frac{\pi}{6}$　　（D）$\frac{\pi}{6}$

2、复数 $z = 1 - \cos\theta + i\sin\theta$，$0 \le \theta \le \pi$ 的模为（ A ）

（A）$2\sin\frac{\theta}{2}$　（B）$-2\sin\frac{\theta}{2}$　（C）$2-2\cos\theta$　（D）$2\cos\theta-2$

3、设 $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$，则 $\bar{z}$ 的指数表示为（ B ）

（A）$z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$　（B）$z=e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$　（C）$z=\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}$　（D）$z=e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}}$

4、若 ω 是方程 $z^3-1=0$ 的一个虚部非零的根，则 $1+\omega+\omega^2=$（ A ）题目不严密，若 $w=1$ 则 $1+\omega+\omega^2=3$

（A）0　（B）i　（C）ω^2　（D）$-\omega$

5、函数 $f(z)=\bar{z}$ 在 z 平面上（ C ）

（A）不连续　（B）连续且可导　（C）连续但处处不可导　（D）以上答案都不对

6、满足 $|z-1|=|z+1|$ 的点 z 所组成的点集为（B ）

（A）$\operatorname{Im} z=0$　（B）$\operatorname{Re} z=0$　（C）$\operatorname{Im} z>0$　（D）$\operatorname{Re} z>0$

7、函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析的充要条件是（ D ）

（A）$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ 都在 D 内连续

（B）在 D 内 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

（C）$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ 都在 D 内存在，且 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

（D）$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ 都在 D 内连续，且 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

8、$\int_{|z-a|=\rho}\frac{1}{(z-a)^n}dz\ (\rho>0)$ 的值为（ A ）

（A）当 $n=1$ 时为 $2\pi i$；当 $n\neq 1$ 时为 0　（B）0　（C）$2\pi i$　（D）$2n\pi i$

9、$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=$（ C ）

（A）0　（B）$\frac{\pi}{2}$　（C）$2\pi i$　（D）$(2\pi+k)i\ (k=0,1,2,\cdots,$

10、$f(z)$ 在复平面上解析且有界，则 $f(z)$ 在平面上为（B ）

（A）0　（B）常数　（C）z　（D）$z^n\ (n\in N)$

11、复级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛的必要条件是（ D ）

（A）对一切n， $z_n = 0$　　　（B）存在一列自然数$\{n_k\}$，使得$z_{n_k} = 0$

（C）$\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$　　　（D）$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

12、幂级数$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^n}$的收敛半径为（A ）

（A）$+\infty$　（B）0　（C）1　（D）2

13、$z=0$为$f(z)=z-\sin z$的（ D ）

（A）极点　（B）非孤立奇点　（C）本性奇点　（D）3阶零点

14、设$f(z)=\frac{1}{e^z-1}$，则$z=0$是$f(z)$的（ A ）

（A）1阶极点　（B）2阶极点　（C）可去奇点　（D）本性奇点

15、$z_0 \neq \infty$是函数$f(z)$的可去奇点，则$\mathrm{Res}(f,z_0)=$（ B ）

（A）$f(z_0)$　（B）0　（C）2π　（D）$2\pi i$

16、若复数$z=2-2i$，则$\bar{z}$的幅角主值为（ C ）

（A）$\frac{\pi}{2}$　（B）$-\frac{\pi}{2}$　（C）$\frac{\pi}{4}$　（D）$-\frac{\pi}{4}$

17、复数$z=1+\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\le\theta\le\pi)$的模为（ A ）

（A）$2\cos\frac{\theta}{2}$　（B）$-2\cos\frac{\theta}{2}$　（C）$2+2\cos\theta$　（D）$2\sin\theta+2$

18、设$z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$，则$\bar{z}$的指数表示为（ B ）

（A）$z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$　（B）$z=e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$　（C）$z=\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}$　（D）$z=e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}}$

19、若$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则$\omega+\omega^2+\omega^3=$（ A ）

（A）0　（B）ω　（C）ω^2　（D）$-\omega$

20、函数$f(z)=\mathrm{Re}\,z$在z平面上（ C ）

（A）不连续　（B）连续且可导　（C）连续但处处不可导　（D）以上答案都不对

21、下列哪些点集是区域（B ）

（A）$\mathrm{Im}\,z=0$　（B）$\mathrm{Re}\,z>\frac{1}{2}$　（C）$|z+1+i|\le 2$　（D）$\mathrm{Re}\,z\ge 0$

22、若 $f(z)=u+iv$ ，且在区域 D 内满足 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，则（ D ）

（A） $f(z)$ 在 D 内解析　（B） $f(z)$ 在 D 内不解析　（C） $f(z)$ 在 D 内可微

（D） $f(z)$ 在 D 内不一定可微

23、 $\int_{|z|=1}\frac{1}{z-3}dz$ 的值为（ B ）

（A） $2\pi i$　（B） 0　（C） 1　（D） -1

24、 $\int_{|z|=1}\frac{\sin z}{z}dz=$ （ A ）

（A） 0　（B） πi　（C） $2\pi i$　（D） $-2\pi i$

25、若区域 D 内解析函数 $f(z)=u+iv$ 满足 $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=0\\ \frac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$ ，则 $f(z)$ 在区域 D 内为（B ）

（A） 0　（B）常数　（C）不一定为常数　（D） $v=0$

26、若复级数 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 收敛，则（ D ）

（A）对一切 n ， $z_n\neq 0$　（B）存在一列自然数 $\{n_k\}$ ，使得 $z_{n_k}\neq 0$

（C） $\lim_{n\to\infty}z_n\neq 0$　（D） $\lim_{n\to\infty}z_n=0$

27、幂级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径为（A ）

（A） $+\infty$　（B） 0　（C） 1　（D） 2

28、 $z=0$ 为 $f(z)=1-\cos z$ 的（ D ）

（A）极点　（B）非孤立奇点　（C）本性奇点　（D）2 阶零点

29、设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<+\infty$ 内解析，且 $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$ ，则 z_0 是 $f(z)$ 的（ B ）

（A）非孤立奇点　（B）极点　（C）本性奇点　（D）解析点

30、变换 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ （ a ， b ， c ， d 为复常数）为分式线性变换的条件是（ A ）

（A） $ad-bc\neq 0$　（B） $ad-bc=0$　（C） $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$　（D） $a=b=c=d$

31、复数 $z=1+\sqrt{3}i$ 的幅角主值为（ C ）

（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$-\frac{\pi}{6}$　　（C）$\frac{\pi}{3}$　　（D）$-\frac{\pi}{3}$

32、若ω是方程$z^3-1=0$的一个非零复数根，则$\omega^3+\omega^4+\omega^5=$（ A ）

（A）0　　（B）i　　（C）ω^2　　（D）$-\omega$

33、下列等式正确的是（ B ）

（A）$z\cdot\bar{z}=|z|$　　（B）$z\cdot\bar{z}=|z|^2$　　（C）$z+\bar{z}=2i\operatorname{Im}z$　　（D）$z-\bar{z}=2\operatorname{Re}z$

34、下列哪些函数在复平面上解析（ A ）

（A）$\sin z$　　（B）$\bar{z}$　　（C）$|z|^2$　　（D）$\operatorname{Re}z$

35、满足$|z-1|>|z+1|$的点z所组成的点集为（B ）

（A）$\operatorname{Im}z<0$　　（B）$\operatorname{Re}z<0$　　（C）$\operatorname{Im}z>0$　　（D）$\operatorname{Re}z>0$

36、使函数$f(z)=u+iv$在区域D内解析的柯西—黎曼条件是（B ）

（A）在D内$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$　　（B）在D内$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

（C）在D内$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$　　（D）在D内$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

37、设$f(z)$在区域D内解析，且$U=\{z\,\big|\,|z-z_0|<\delta\}\subset D$，在$U$上$f(z)=0$，则在$D$内的（ D ）

（A）$f(z)$不恒为零　　（B）$f(z)$为不为零的常数

（C）$f(z)$只有惟一的零点　　（D）$f(z)\equiv 0$

38、$\int_C\frac{1}{(z-a)^n}dz$（其中$C$为包围点$a$任意围线）的值为（ A ）

（A）当$n=1$时为$2\pi i$；当$n\neq 1$时为0　　（B）0　　（C）$2\pi i$　　（D）$2n\pi i$

39、$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2}dz=$（ C ）

（A）0　　（B）$\frac{\pi}{2}$　　（C）$2\pi i$　　（D）πi

40、$f(z)$在复平面上解析且$\operatorname{Re}f(z)$有界，则$f(z)$在平面上为（B ）

（A）0　　（B）常数　　（C）e^z　　（D）$\ln z$

41、在$|z|<1$内解析，在区间$(-1,1)$上具有展式$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$的函数只能是（ D ）

（A）$\frac{1}{1+z}(|z|<1)$　　（B）$\ln(1-z)\,(|z|<1)$

（C）$\frac{1}{z-1}(|z|<1)$　　（D）$\frac{1}{1-z}(|z|<1)$

42、幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}$的收敛半径为（B　）

（A）$+\infty$　（B）1　（C）0　（D）2

43、若$f(z)=\cos\frac{1}{z+i}$，则$z=-i$是$f(z)$的（ D　）

（A）可去奇点　（B）非孤立奇点　（C）极点　（D）本性奇点

44、若$f(z)=\frac{g(z)}{z-a}$，且$g(z)$在点a解析，$g(a)\neq 0$，则$\mathrm{Res}(f,a)=$（ A　）

（A）$g(a)$　（B）$2\pi i g(a)$　（C）0　（D）$g'(a)$

45、变换$w=\frac{z-a}{1-\overline{a}\cdot z}(0<|a|<1)$把单位圆$|z|<1$保形映射成（ B　）

（A）上半平面$\mathrm{Im}\ z>0$　（B）单位圆$|w|<1$

（C）下半平面$\mathrm{Im}\ z<0$　（D）$|w|>1$

46、$\arg(-3+4i)=$（ C　）

（A）$\pi-\arctan\frac{3}{4}$（B）$\pi+\arctan\frac{3}{4}$　（C）$\pi-\arctan\frac{4}{3}$　（D）$\pi+\arctan\frac{4}{3}$

47、若ω是方程$z^3=1$的一个非零复数根，则下列哪些也是此方程的根（ A　）

（A）$\overline{\omega}$　（B）$-\omega$　（C）$-\omega^2$　（D）i

48、下列等式不正确的是（ B ）

（A）$z\cdot\overline{z}=|z|^2$　　（B）$\arg z_1\cdot z_2=\arg z_1+\arg z_2$（$z_1\neq 0$，$z_2\neq 0$）

（C）$A\arg z_1\cdot z_2=A\arg z_1+A\arg z_2$（$z_1\neq 0$，$z_2\neq 0$）　（D）$\arg\overline{z}=-\arg z\ (z\neq 0)$

49、下列哪些函数在复平面上不解析（ A　）

（A）$\sin\overline{z}$　（B）$\cos z$　（C）chz　（D）e^{-z}

50、设$E=\{z\,\|\mathrm{Im}\ z|<2,|\mathrm{Re}\ z|<3\}$，则$E$一定是（B　）

（A）无界区域　（B）有界单连通区域　（C）多连通区域　（D）闭区域

51、使函数$f(z)=u+iv$在区域D内解析的充要条件是（B　）

（A）u，v在D内具有一阶连续的偏导数
（B）u，v在D内可微，且在D内满足柯西—黎曼条件
（C）u，v在D内具有一阶偏导数，且在D内满足柯西—黎曼条件
（D）u，v在D内在D内满足柯西—黎曼条件

52、设 $f(z)$ 在复平面上解析，且 C 为不通过原点的围线，则 $\int_C \frac{f(z)}{z} dz =$ （ D ）

（A） $2\pi i \cdot f(0)$　　（B） $f(0)$

（C） 0　　（D） 0 或 $2\pi i \cdot f(0)$

53、$\int_{|z|=1} \frac{1}{\cos z} dz =$ （ A ）

（A） 0　　（B） 1　　（C） $2\pi i$　　（D） πi

54、若 $f(z)$ 在区域 D 内满足 $f'(z)=0$，则 $f(z)$ 在区域 D 内必为（ C ）

（A） 0　　（B） z　　（C）常数　　（D） e^z

55、$f(z)$ 在复平面上解析且 $\operatorname{Im} f(z)$ 有界，则 $f(z)$ 在平面上为（B ）

（A） 0　　（B）常数　　（C） e^z　　（D） $\ln z$

56、在复平面上解析，在区间 $[0,1]$ 上等于 $\sin x$ 的函数只能是（ D ）

（A） $\sin(\frac{\pi}{2}+z)$　　（B） $\sin(\pi+z)$

（C） $\sin iz$　　（D） $\sin z$

57、若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R>0$，则在闭圆 $|z| \le r(<R)$ 上 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ （B ）

（A）不绝对收敛　　（B）一致收敛且绝对收敛

（C）绝对收敛但不一致收敛　　（D）一致收敛但不绝对收敛

58、$z=0$ 为 $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$ 的（ D ）

（A）本性奇点　　（B）非孤立奇点　　（C）二阶极点　　（D）可去奇点

59、函数 $f(z)=\frac{e^z-1}{z}$ 在 $z=0$ 处的留数为（ A ）

（A） 0　　（B） $2\pi i$　　（C） 1　　（D） πi

60、变换 $w=\frac{z-i}{z+i}$ 把上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 保形映射成（ B ）

（A）上半平面 $\operatorname{Im} z>0$　　（B）单位圆 $|w|<1$

（C）下半平面 $\operatorname{Im} z<0$　　（D） $|w|>1$

61、若复数 $z=1-i$，则 z 的幅角主值为（ A ）

（A） $-\frac{\pi}{4}$　　（B） $\frac{\pi}{4}$　　（C） $-\frac{3\pi}{4}$　　（D） $\frac{3\pi}{4}$

62、若 $z^2=-1$，则 z 等于（ B ）

（A） $-i$　　（B） $\pm i$　　（C） i　　（D） ± 1

63、下列点集是区域的是（ C ）

（A）$\{z \mid \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}\}$ （B）$\{z \mid |z| = 1\}$ （C）$\{z \mid \operatorname{Im} z > \frac{1}{2}\}$ （D）$\{z \mid z^2 = 1\}$

64、设 $f(z) = x - yi$ （$x, y \in R$），则（ D ）

（A） $f(z)$ 在 z 平面上解析 （B） $f(z)$ 在 $z = 0$ 可导

（C） $f(z)$ 在 z 平面上处处可导 （D） $f(z)$ 在 z 平面上连续

65、设 $f(z) = u + iv$，且在区域 D 内满足柯西—黎曼条件，则（ A ）

（A） $f(z)$ 在 D 内不一定解析 （B） $f(z)$ 在 D 内解析

（C） $f(z)$ 在 D 内可导 （D） $f(z)$ 在 D 内一定不可导

66、下列哪些函数在 z 平面上解析（B ）

（A） $\bar{z}$ （B） $\cos z$ （C） $|z|$ （D） $e^{|z|}$

67、$\int_{|z|=1} \frac{1}{\cos z} dz =$ （ C ）

（A） 1 （B） $2\pi i$ （C） 0 （D） -1

68、$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz =$ （ D ）

（A） 0 （B） 1 （C） $\frac{1}{2\pi i}$ （D） $2\pi i$

69、若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $\operatorname{Re} f(z) =$ 实常数，则 $f(z)$ 在区域 D 内为（ A ）

（A）复常数 （B） $\operatorname{Re} z$ （C） $\bar{z}$ （D） $\sin z$

70、若 $f(z) = \sin z$，则下列结论不成立的是（B ）

（A） $f(z)$ 为解析函数 （B） $f(z)$ 有界 （C） $f(z)$ 为周期函数 （D） $f(z)$ 有零点

71、复级数 $\sum_{n=0}^{\infty} i^n$ （ C ）

（A）一定收敛 （B）等于 $\frac{1}{1-i}$

（C）一定发散 （D）以上结论都不对

72、设幂级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$，则（ D ）

（A）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 仅在点 z_0 收敛　（B）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 在全平面上收敛

（C）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 在点 z_0 不收敛　（D）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 在点 z_0 收敛

73、幂级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot z^n$ 的收敛半径为（A　）

（A）0　（B）$+\infty$　（C）1　（D）2

74、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ 在 $|z|<1$ 内的和函数为（ B　）

（A）$\frac{1}{1-z}$　（B）$\frac{z}{1-z}$　（C）$\frac{1}{1+z}$　（D）$\frac{z}{1+z}$

75、$f(z)=1-\cos z$ 以 $z=0$ 为（ C　）

（A）一阶零点　（B）一阶极点　（C）二阶零点　（D）二阶极点

76、设 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内解析，且 $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$，则 z_0 是 $f(z)$ 的（ D　）

（A）零点　（B）可去奇点　（C）非孤立奇点　（D）极点

77、若 $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$，则 $z=0$ 必为 $f(z)$ 的 （ A　）

（A）可去奇点　（B）零点　（C）本性奇点　（D）二阶极点

78、若 ∞ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\mathrm{Res}(f,\infty)=$（ B　）

（A）0　（B）不一定为 0　（C）不存在　（D）以上结论都不对

79、若 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$，则 $\mathrm{Res}(f,0)=$ （ C　）

（A）∞　（B）0　（C）1　（D）以上答案都不对

80、映射 $w=z^3+2z^2$ 在点 $z=i$ 处的伸缩率为 （ D　）

（A）$\sqrt{5}$　（B）$2\sqrt{5}$　（C）25　（D）5

81、若复数 $z=-1+\sqrt{3}\cdot i$，则 z 的幅角主值为（ A　）

（A）$\frac{2\pi}{3}$　（B）$-\frac{2\pi}{3}$　（C）$-\frac{\pi}{6}$　（D）$\frac{\pi}{6}$

82、若 $z^3=1$ 且 $\mathrm{Im}\, z>0$，则 z 等于（ B　）

（A）1　（B）$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　（C）$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　（D）$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

83、下列点集不是区域的是（ C ）

（A）$\{z \mid \mathrm{Im}\, z>0\}$　（B）$\{z \mid \mathrm{Re}\, z<0\}$　（C）$\{z \mid |z| \le |1+i|\}$　（D）$\{z \mid |z|>1\}$

84、设 $f(z)=i\cdot\bar{z}$，则（ D　）

（A）$f(z)$ 在 z 平面上处处不连续　（B）$f(z)$ 在 z 平面上解析

（C） $f(z)$ 为整函数　　（D） $f(z)$ 在 z 平面上处处不解析

85、设 $f(z)=u+iv$，则使得 $f(z)$ 在区域 D 内解析的柯西—黎曼条件是（ A ）

（A） $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$　　（B） $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$

（C） $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$　　（D） $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$

86、在 z 平面上处处不解析的函数是（B ）

（A） z　（B） $\operatorname{Im} z$　（C） $\cos z$　（D） $e^{\sin z}$

87、$\int_{|z|=1}\frac{z}{z-3}dz=$（ C ）

（A） $-2\pi i$　（B） $2\pi i$　（C） 0　（D） 1

88、$\int_{|z|=1}\frac{\sin z^2}{z}dz=$（ D ）

（A） $2\pi i$　（B） 1　（C） $-\pi i$　（D） 0

89、若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $|f(z)|=$ 实常数，则 $f(z)$ 在区域 D 内为（ A ）

（A）复常数　（B） 0　（C） z　（D） $e^{|z|}$

90、若 $f(z)=e^z$，则下列结论不成立的是（B ）

（A） $f(z)$ 为整函数　（B） $f(z)$ 非周期函数　（C） $f(z)$ 无零点　（D） $f(z)$ 无界

91、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}n!\cdot z^n$ 的收敛半径为（ C ）

（A） $+\infty$　　（B） 1

（C） 0　　（D）以上结论都不对

92、设幂级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 的收敛半径 $R>0$，则此幂级数的和函数（ D ）

（A）在 $|z|<R$ 内不连续　　（B）在 $|z|<R$ 内不解析

（C）在 $|z|<R$ 内不能逐项求导　　（D）在 $|z|<R$ 内可逐项积分

93、在 $|z|<1$ 内解析，且在区间 $(-1,1)$ 上具有展式 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n$ 的函数只能为（A ）

（A） $\frac{1}{1+z}$　（B） $\frac{1}{1-z}$　（C） $\frac{1}{1+z^2}$　（D） $\frac{1}{1-z^2}$

94、若 $f(z)=\cos\frac{1}{z+i}$，则 $z=-i$ 为 $f(z)$ 的（ B ）

（A）极点　（B）本性奇点　　（C）可去奇点　　（D）非孤立奇点

95、$f(z)=\frac{z}{(e^{z}-1)^{2}}$ 以 $z=0$ 为（ C ）

（A）可去奇点　　（B）本性奇点　　　（C）一阶极点　　　（D）二阶极点

96、若 $f(z)=\frac{\varphi(z)}{z-a}$，且 $\varphi(z)$ 在点 a 解析，则 $\mathrm{Res}(f,a)=$ 的（ D ）

（A）0　　　（B）$\varphi'(a)$　　　（C）$2\pi i\cdot\varphi'(a)$　　　（D）$\varphi(a)$

97、$f(z)=\frac{e^{iz^{2}}}{z^{2}+1}$ 在 $z=i$ 的留数为 （ A ）

（A）$-\frac{i}{2}e^{-i}$　　（B）0　　　（C）$-\frac{i}{2}e^{-1}$　　　（D）$-\frac{1}{2}e^{-1}$

98、$\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的幂级数展开式为（ B ）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}}{n}$　　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{n}}{n}$　　　（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{n}}{n}$　　　（D）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}$

99、变换 $w=e^{i\theta}\frac{z-i}{1+i\cdot z}$ （θ 为实常数）把单位圆 $|z|<1$ 保形映射成（ C ）

（A）上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$　（B）下半平面 $\mathrm{Im}\,z<0$　　（C）$|w|<1$　（D）$|w|>1$

100、变换 $w=e^{i\theta}\frac{z-i}{z+i}$ （θ 为实常数）把上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 保形映射成（ D ）

（A）左半平面 $\mathrm{Re}\,z<0$　（B）右半平面 $\mathrm{Re}\,z>0$　（C）上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$　（D）$|z|<1$

101、若 $Z_1=$（a, b）,$Z_2=$(c, d), 则 $Z_1\cdot Z_2=$（ C ）

（A）（ac+bd, a）　　　（B）(ac-bd, b)　　　（C）（ac-bd, ac+bd）　　（D） (ac+bd, bc-ad)

102、若 f(z)=z+1, 则 f(z)在复平面上（ C ）

A 仅在点 z=0 解析　　B 无处解析　　C 处处解析　　D 在 z=0 不解析且在 z≠0 解析

103、若 f（z）在复平面解析，g(z)在复平面上连续，则 f(z)+g(z)在复平面上（ C ）

A 解析　　　B 可导　　　C 连续　　　D 不连续

104、级数 $\sum_{n=0}^{\infty}z^{n}$ 的收敛圆为(D).

(A) | z-1|< 3　　　(B) |z|<3　　　(C) |z-1| >1　　　(D) |z| <1

二、多项选择题（每题至少有两个或两个以上的正确答案）？**6** 题

1、若$\omega=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$是方程$z^3=1$的根，则下列哪些值不为$1+\omega+\omega^2$的值（B、C、D）

（A）0　　（B）i　　（C）$-i$　　（D）ω^2

2、复数$z=1-\cos\theta+i\sin\theta$（$0<\theta<\pi$）的模为（ A、B ）

（A）$2\sin\frac{\theta}{2}$　　（B）$\sqrt{2(1-\cos\theta)}$　　（C）$2(1-\cos\theta)$　　（D）$-2\sin\frac{\theta}{2}$

3、下列点集哪些是区域 （A、C ）

（A）$\mathrm{Im}\ z>\mathrm{Re}(1+i)$　　（B）$0<\arg z\le\frac{\pi}{4}$　　（C）$1<\mathrm{Im}\ z<2$　　（D）$\mathrm{Im}\ z=3$

4、若$f(z)=\mathrm{Re}\,z$，则下列结论正确的是（ A、B ）

（A）$f(z)$在z平面上连续　　（B）$f(z)$在z平面上处处不解析

（C）$f(z)$在z平面上解析　　（D）$f(z)$仅在$z=0$处解析

5、若$f(z)=1+\frac{1}{z}$，则下列结论正确的是 （ A、C、D）

（A）$\mathrm{Res}(f,0)=1$　　（B）$\mathrm{Res}(f^2,0)=1$

（C）$\mathrm{Res}(f^2,0)=2$　　（D）$\mathrm{Res}(z\cdot f,0)=0$

6、若ω不是方程$z^3=1$的虚数根，则下列哪些值也一定不是此方程的根（C、）

（A）$\overline{\omega}$　　（B）ω^3　　（C）-1　　（D）$-\omega$

7、复数$z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$的指数表示形式为 （ A、C ）

（A）$z=e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}}$　（B）$z=e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$　（C）$z=e^{-i\cdot(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$　（$k\in Z$）（D）$z=e^{i\cdot(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$　（$k\in Z$）

8、设$E=\{z\,\big|-1<\mathrm{Im}\ z<1,-1<\mathrm{Re}\ z<1\}$，则$E$一定不能是 （B、C ）

（A）有界单连通区域　（B）有界闭区域　（C）无界区域　（D）区域

9、下列哪些函数在全平面上不解析（B、C、D ）

（A）$\sin z$　　（B）$\overline{z}$　　（C）$\mathrm{Re}\ z$　　（D）$|z|^2$

10、若$f(z)=\sin\frac{1}{z}$，则$z=0$为$f(z)$的（ A、B ）

（A）本性奇点　　（B）孤立奇点

（C）可去奇点　　（D）极点

三、填空题（将正确的答案填在横线上）

1、复数 $z=\dfrac{(3+i)(2-i)}{(3-i)(2+i)}$ 的模 $|z|=$ ___1___。

2、函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析是指 ___$f(z)$在区域 D 内每一点可导___。

3、$\int\limits_{|z-1|=1}\dfrac{1}{z+3}dz=$ ___0___。

4、刘维尔定理是指___有界整函数必为常数___。

5、幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n\cdot z^n}{2^n}$ 的收敛半径 $R=\underline{2}$，收敛圆为 ___$|z|<2$___。

6、函数 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在 $z=0$ 处的幂级数展式为 ___$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$___。

7、设 $f(z)=\dfrac{e^{i\cdot z}}{1+z^2}$，则 $\operatorname{Res}(f,i)=$ ___$-\dfrac{1}{2}e^{-1}i$___。

8、分式线性变换的一般形式为 ___$w=\dfrac{az+b}{cz+d}\quad(ad-bc\neq 0)$___。

9、设非零复数 z 的幅角为 θ，则 z 的三角表示式为 ___$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$___。

10、满足等式 $e^{i\cdot k\frac{\pi}{2}}=i$ 的最小正整数 $k=$ ___1___。

11、$f(z)=z\operatorname{Re}z$ 的可导点为 ___$z=0$___。

12、设 $f(z)$ 在闭区域 $\{z\,|1\le|z|\le 2\}$ 上解析，且 $\int\limits_{|z|=1}f(z)dz=\pi$，则 $\int\limits_{|z|=2}f(z)dz=$ ___π___。

13、函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析是指___$f(z)$在区域 D 内可导（或每一点可导）___。

14、$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内的罗朗展式为 ___$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\cdot\dfrac{1}{z^n}$___。

15、设 $z_0\neq\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\operatorname{Res}(f,z_0)=$ ___0___。

16、设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $|f(z)|$ 在区域 D 内的某一点达到最大值，则 $f(z)$ 在区域 D 内为___常数___。

17、若复数 $z=5+i\sin 1$，则 $\operatorname{Re}(iz)=$ ___$-\sin 1$___。

18、设 $z=x+iy$，x，y 为实数，$x>0$，则 $\arg z=$ ___$\arctan\dfrac{y}{x}$___。

19、若 $f(z)=(1+i)u$ 在区域 D 内解析，u 为 x，y 的二元实函数，则在区域 D 内 $\frac{\partial u}{\partial x}=$ __0__，$u=$ __常数__。

20、设函数 $f(z)$ 在复平面上解析，且有界，则 $f(z)$ 在复平面上为 __常数__。

21、若函数 $f(z)$ 在点 z_0 解析，则 $f(z)$ 在点 z_0 __必有__ 导数。

22、函数 $f(z)=\frac{1}{1-z^2}$ 在 $z=0$ 处的幂级数展式为 __$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n},\ |z|<1$__。

23、设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，且 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内有罗朗展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

则 z_0 必为 $f(z)$ 的 __可去__ 奇点。

24、设 $f(z)=\frac{e^{i\cdot z}}{1+z^2}$，则 $\mathrm{Res}(f,-i)=$ __$\frac{1}{2}e\cdot i$__。

25、对任意的非零复数 z，$Argz$ 是多值的，彼此相差 __2π__ 的整数倍。

26、设 z_1，z_2 是互为共轭的非零复数，则 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=$ __1__。

27、若区域 D 内解析的函数 $f(z)$，在区域 D 内满足 $\mathrm{Re}\, f(z)=\mathrm{Im}\, f(z)$，则在区域 D 内 $f(z)=$ __常数__。

28、设函数 $f(z)$ 在长度为 l 的光滑曲线 C 上可积，且在 C 上，$|f(z)|\le M$，则 $\left|\int_C f(z)dz\right|\le$ __$M\cdot l$__。

29、在复平面上，n 次多项式 $P(z)$ 的零点个数为 __n__ 个（几阶零点要算几个零点）。

30、函数 $f(z)=e^{z^2}$ 在 $z=0$ 处的幂级数展式为 __$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!},\ |z|<+\infty$__。

31、$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$ 在 $0<|z|<1$ 内的罗朗展式为 __$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty} z^n$__。

32、一般分式线性变换是由 __平移变换__、__伸缩变换__、__旋转变换__、__反演变换__ 四种更简单的分式线性变换复合而成。

33、若复数 $z=2006+i\cos 2005$，则 $\mathrm{Re}(iz)=$ $\underline{\ -\cos 2005\ }$ 。

34、设 $f(z)$ 在 z 平面上解析，且有界，则 $f(z)$ 在 z 平面上为____常数____。

35、 $f(z)=\sin z$ 在 $z=0$ 处的幂级数展式为 $\underline{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}}$ 。

36、设 $f(z)$ 在闭区域 $1\le|z|\le 100$ 上解析，且 $\int_{|z|=100} f(z)dz=100$，则 $\int_{|z|=1} f(z)dz=$ $\underline{\ 100\ }$ 。

37、设 $f(z)=\dfrac{e^{-i\cdot z}}{1+z^2}$， 则 $\mathrm{Res}(f,i)=$ $\underline{-\dfrac{1}{2}e\cdot i}$ 。

38、若复数 $z=2006+i\cdot 2005$，则 $\mathrm{Im}(i\bar{z})=$ $\underline{\ 2006\ }$ 。

39、设 $f(z)$ 是以 ∞ 为可去奇点的整函数，则 $f(z)$ 必为____常数____。

40、 $f(z)=\cos z$ 在 $z=0$ 处的幂级数展式为 $\underline{f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}}$ 。

41、设 $f(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析，且以点 a 为非孤立零点，则在 $|z-a|<R$ 内 $f(z)=$ $\underline{\ 0\ }$ 。

42、设 $f(z)=e^{\sin z}$，则 $\mathrm{Res}(f,0)=$ $\underline{\ 0\ }$ 。

43、级数 $1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dots\dots+\dfrac{z^n}{n!}+\dots\dots$ 的收敛圆 R=+∞．即整个复平面.

44、若 f(z)= $k\cdot\sin z$ (k 为常数),则 z=mπ (m=0, $\pm 1,\pm 2$ ……)为 f(z)的 _1_级零点.

45、幂有数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!z^n$ 的收敛半径等于__0__.

46、z=0 是 f(z)=e^z-1 的__1__ 级零点.

四、判断题（正确的打“√”，错误的打“×”）

1、设 z_1 和 z_2 是两个不相等的复数，则 z_1 和 z_2 必可比较大小。 （ × ）

2、 $f(z)$ 在点 a 解析是指 $f(z)$ 在点 a 可导。 （ × ）

3、在复数范围内， $z^3=1$ 的充要条件是 $z=1$ 。 （ × ）

4、若 $f(z)$ 在以围线 C 为边界的单连通区域 D 内解析，且在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则 $\int_C f(z)dz=0$ 。 （ √ ）

5、若$\operatorname{Res}(f,z_0)=a$，则$\operatorname{Res}(f^2,z_0)=a^2$。　（ ×　）

6、若复数z与其共轭复数$\overline{z}$相等，则z必为纯虚数。　（ ×　）

7、$f(z)$在点a点可导，则$f(z)$在点a解析。　（ ×　）

8、存在函数$f(z)$在复平面上处处连续，但处处不可导。　（ √　）

9、设$f(z)=\dfrac{1}{z}$，则$\operatorname{Res}(f,0)=1$，从而$\operatorname{Res}(f^2,0)=1^2=1$。　（ ×　）

10、如果$w=f(z)$在区域D内解析，则$w=f(z)$是区域D内的保形映射。（ ×　）

11、因为$1<2$，则$i<2i$。　（ ×　）

12、复数0的模和幅角都没有意义。　（ ×　）

13、若$f(z)=u+iv$在区域D内解析，则$g(z)=-v+i\cdot u$也在区域D内解析。　（ √　）

14、若解析函数$f(z)$以z_0为零点，则存在z_0的某邻域，使得z_0为$f(z)$在此邻域内的惟一的零点。（ ×　）

15、设$f(z)$在$0<|z-z_0|<R$内解析，则z_0为$f(z)$的可去奇点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$存在。

（ √　）

16、在复数范围内，$z^2=-1 \Leftrightarrow z=i$。　（ ×　）

17、若函数$f(z)$在区域D内的每一点都可导，则$f(z)$在D内不一定解析。　（ ×　）

18、$f(z)=|z|^2$在复平面上连续，但在复平面上处处不可导。　（ ×　）

19、若函数$f(z)$在有界区域D内解析，在闭区域$\overline{D}=D+C$上连续，则$f(z)$在边界C上且只在边界C达到最大模。（ ×　）

20、分式线性变换$w=\dfrac{az+b}{cz+d}\ (ad-bc\neq 0)$在扩充$z$平面上是保形的。(c≠0)　（ ×　）

21、任意两个复数必可比较大小。　（ ×　）

22、若$f(z)$在点z_0可导，则$f(z)$在点z_0不一定解析。　（ √　）

23、不存在在z平面上处处连续处处不可导的复变函数。　（ ×　）

24、设$f(z)=\dfrac{1}{z}$，则$\operatorname{Res}(f,0)=1$，$\operatorname{Res}(f^2,0)=1^2=1$。（ ×　）

25、若$w=f(z)$是区域D内的解析函数，则$f(D)$也必为区域。　（ ×　）

26、$z-\overline{z}=0$是z为实数的充要条件。　（ √　）

27、若$f(z)$在点z_0解析，则$f(z)$在点z_0一定可导。　（ √　）

28、$f(z)=|z|^2$ 在 z 平面上处处不可导。　（ × ）

29、若 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\mathrm{Res}(f,\infty)=0$。（ × ）

30、若 $w=f(z)$ 是区域 D 内的单叶解析函数，则 $f(D)$ 不一定为区域。　（ × ）

五、计算题

1、将复数 $z=(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^2\ (0\le\varphi<\pi)$ 化为指数形式。

解：　$z=(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^2=4\cos^2\dfrac{\varphi}{2}\cdot e^{i\varphi}\quad(0\le\varphi<\pi)$

2、在复数范围内解方程 $z^4+a^4=0\ (a>0)$。

解：由原方程可得　$z^4=-a^4=a^4\cdot e^{i\pi}$

所以 方程的解为 $z_k=a\cdot e^{i\frac{(2k+1)}{4}\pi}\quad k=0,1,2,3$。

3、计算积分 $\int_C |z|dz$，其中（1）C 是从 -1 到 1 的直线段；（2）C 是从 -1 到 1 的上半单位圆周：$|z|=1$。

解：（1）C 的参数方程为 $z=t\ (-1\le t\le 1)$，所以

$$\int_C |z|dz=\int_{-1}^{1}|t|dt=2\int_0^1 tdt=1。$$

（2）因为在 C 上，$|z|=1$，所以 $\int_C |z|dz=\int_C dz=1-(-1)=2$。

4、求 $\int_C \dfrac{z-2}{z^2-z}dz$，其中 C 是圆周：$|z|=2$。

解：$\int_C \dfrac{z-2}{z^2-z}dz=\int_C\left(\dfrac{2}{z}-\dfrac{1}{z-1}\right)dz=\int_C \dfrac{2}{z}dz-\int_C \dfrac{1}{z-1}dz=4\pi i-2\pi i=2\pi i$。

5、求下列函数在 $z=0$ 处的幂级数展开式

（1）$\int_0^z e^{\xi^2}d\xi$；　　（2）$\dfrac{1}{(1-z)^2}$。

解：（1）$\int_0^z e^{\xi^2}d\xi=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^{2n}}{n!}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!}$，$|z|<+\infty$ 。

（2）$\frac{1}{(1-z)^2}=(\frac{1}{1-z})'=(\sum_{n=0}^{\infty}z^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$，$|z|<1$ 。

6、求实积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$ 。

解：因 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx=\mathrm{Im}[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}e^{ix}dx]$，而 $\frac{z}{1+z^2}$ 在上半平面内仅有一个一阶极点 $z=i$，且在实数范围内 $1+z^2\neq 0$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}e^{ix}dx=2\pi i\,\mathrm{Res}(\frac{z}{1+z^2}e^{iz},i)=2\pi i\cdot\frac{1}{2}e^{-1}=\pi e^{-1}i$，

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx=\mathrm{Im}[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}e^{ix}dx]=\pi e^{-1}$ 。

7、试求把单位圆盘 $|z|<1$ 保形映射成单位圆盘 $|w|<1$，并且把 $|z|<1$ 内的一点 $z_0\neq 0$ 变成0的分式线性变换。

解：根据分式线性变换的保圆周性和保对称点性，可设所求的分式线性变换为

$$w=k\cdot\frac{z-z_0}{z-\frac{1}{\overline{z_0}}}=-k\overline{z_0}\cdot\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}\cdot z}$$

再由保圆周性得，当 $z=1$ 时，$1=\left|-k\overline{z_0}\cdot\frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}}\right|=\left|-k\overline{z_0}\right|$，即 $-k\overline{z_0}=e^{i\alpha}$ 。

所以所求的分式线性变换为 $w=e^{i\alpha}\cdot\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}\cdot z}$ α 为实常数。

8、在复数范围内解方程 $z^8+1=0$ 。

解：由原方程可得 $z^8=-1=e^{i\pi}$

所以 方程的解为 $z_k=e^{i\frac{(2k+1)}{8}\pi}$ $k=0,1,2,3,4,5,6,7$ 。

9、计算积分 $\int_{|z-a|=R}\frac{1}{(z-a)^n}dz$，其中 n 为整数，$R>0$ 。

解：令 $z = a + R \cdot e^{i\theta} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$ ，由复积分的参数方程计算公式得。

$$\int_{|z-a|=R} \frac{1}{(z-a)^n} dz = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi i, n = 1 \\ 0, n \ne 1 \end{cases}.$$

10、计算积分 $\int_{|z|=5} \frac{5z-2}{z^2-1} dz$ 。

解：

$$\int_{|z|=5} \frac{5z-2}{z^2-1} dz = \int_{|z|=5} \left(\frac{2}{z} + \frac{3}{z-1}\right) dz = 2\int_{|z|=5} \frac{1}{z} dz + 3\int_{|z|=5} \frac{1}{z-1} dz = 4\pi i + 6\pi i = 10\pi i$$

11、设 $f(z) = \int_{|\xi|=3} \frac{e^{\xi} - \xi}{\xi - z} d\xi$ ，求 $f'(i)$ 。

解：由柯西积分公式以及柯西积分定理得

$$f(z) = \int_{|\xi|=3} \frac{e^{\xi} - \xi}{\xi - z} dz = \begin{cases} 2\pi i(e^z - z), & |z| < 3 \\ 0, & |z| > 3 \end{cases}$$

所以 $$f'(z) = \begin{cases} 2\pi i(e^z - 1), & |z| < 3 \\ 0, & |z| > 3 \end{cases}$$

从而 $f'(i) = 2\pi i(e^i - 1)$ （因为 $|i| = 1 < 3$ ）。

12、设 $f(z) = e^{\frac{1}{(z-1)^2}}$ ，求 $\mathrm{Res}(f,1)$ 。

解：因为在 $0 < |z-1| < +\infty$ 内

$$f(z) = e^{\frac{1}{(z-1)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(z-1)^{2n}}$$，显然其中 $\frac{1}{z-1}$ 项的系数为 0，

所以 $\mathrm{Res}(f,1=)$ 。

13、求 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环 $0 < |z-1| < 1$ 内的罗郎展式。

解：因为 $$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

所以 在 $0 < |z-1| < 1$ 内，

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1-1}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n \text{。}$$

14、利用留数计算实积分 $I=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{5+4\cos x}dx$ 。

解：$I=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{5+4\cos x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{5+4\cos\theta}d\theta \overset{\sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i}}{\underset{\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}}{=}} \frac{i}{16}\cdot\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2+\frac{5}{2}z+1)}dz$$

$$=\frac{i}{16}\cdot 2\pi i[\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,-\frac{1}{2})]=\frac{\pi}{8}$$

15、试求把单位圆盘 $|z|<1$ 保形映射成单位圆盘 $|w|<1$ 的分式线性变换 $w=L(z)$ ，并且 $L(\frac{1}{2})=0$ ，$L(0)=-\frac{1}{2}$ 。

:解：由题设可设所求的分式线性变换为

$$w=L(z)=e^{i\alpha}\cdot\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}=e^{i\alpha}\cdot\frac{2z-1}{2-z}$$

又 $-\frac{1}{2}=L(0)=e^{i\alpha}\cdot\frac{-1}{2}$，即 $e^{i\alpha}=1$，所以所求的分式线性变换为

$$w=L(z)=-1\cdot\frac{2z-1}{2-z}=\frac{1-2z}{2-z}\text{。}$$

16、将复数 $z=(1-\cos\varphi+i\sin\varphi)^2$ $(0\le\varphi<\pi)$ 化为指数形式。

解：$z=(1-\cos\varphi+i\sin\varphi)^2=4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot[\cos(\frac{\pi-\varphi}{2})+i\sin(\frac{\pi-\varphi}{2})]^2$

$$=4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot e^{i(\pi-\varphi)} \quad (0\le\varphi<\pi$$

17、求积分 $\int_C\frac{1}{z^2-z}dz$ ，其中 C 是圆周：$|z|=2$ 。

解：

$$\int_C\frac{1}{z^2-z}dz=\int_C-(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1})dz=-\int_C\frac{1}{z}dz+\int_C\frac{1}{z-1}dz=2\pi i-2\pi i=0$$

18、计算积分 $\int_{|z|=2} \frac{e^{z}\sin z}{z^{2}-9}dz$ 。

解：因为被积函数的不解析点 $z=\pm 3\notin |z|\le 2$ ，所以被积函数在 $|z|\le 2$ 上解析。

由柯西积分定理得 $\int_{|z|=2} \frac{e^{z}\sin z}{z^{2}-9}dz = 0$ 。

19、设 $f(z)=\int_{|\xi|=3} \frac{3\xi^{2}+7\xi+1}{\xi - z}dz$ ，求 $f'(1+i)$ 和 $f'(3+3i)$ 。

解：由柯西积分公式和柯西积分定理得

$$f(z)=\int_{|\xi|=3} \frac{3\xi^{2}+7\xi+1}{\xi - z}dz = \begin{cases} 2\pi i(3z^{2}+7z+1), & |z|<3 \\ 0, & |z|>3 \end{cases}.$$

所以 $$f'(z)=\begin{cases} 2\pi i(6z+7), & |z|<3 \\ 0, & |z|>3 \end{cases}.$$

故 $f'(1+i)=2\pi i(13+6i)=2\pi(-6+13i)$， $f'(3+3i)=0$ 。

（因为 $|1+i|=\sqrt{2}<2$， $|3+3i|=3\sqrt{2}>3$ ）

20、设 $f(z)=\sin\frac{1}{z}$，求 $\mathrm{Res}(f,0)$ 。

解：因为在 $0<|z|<+\infty$ 内

$f(z)=\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}\cdot\frac{1}{z^{2n-1}}$ ，显然其中 $\frac{1}{z}$ 这一项的系数为1，

所以 $\mathrm{Res}(f,0)=1$ 。

21、求 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环 $1<|z|<2$ 内的罗朗展式。

解：因为 $$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

所以 在 $1<|z|<2$ 内，

$$f(z) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\text{。}$$

22、利用留数计算实积分 $I = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}d\theta$ 。

解：令 $z = e^{i\theta}$，则 $\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}d\theta = \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z^2+4z+1}dz$

显然被积函数在单位圆内仅有一个一阶极点 $z = -2+\sqrt{3}$ 。

所以　由留数定理

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}d\theta = \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z^2+4z+1}dz$$

$$= \frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+4z+1}, -2+\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\text{。}$$

23、试求把上半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 保形映射成单位圆盘 $|w| < 1$ 的分式线性变换 $w = L(z)$ ，并且满足 $L(i) = 0$ ， $L(0) = -1$ 。

解：由题设可设所求的分式线性变换为

$$w = L(z) = e^{i\alpha}\cdot\frac{z-i}{z+i}$$

又　$-1 = L(0) = e^{i\alpha}\cdot(-1)$ ，即 $e^{i\alpha} = 1$，所以所求的分式线性变换为

$$w = L(z) = \frac{z-i}{z+i}\text{。}$$

24、求复数 $z = \frac{(2005+2006i)(2003-2004i)}{(2005-2006i)(2003+2004i)}$ 的模。

解：因　$|2005+2006i| = |2005-2006i|$，$|2003-2004i| = |2003+2004i|$

所以　$|z| = \left|\frac{(2005+2006i)(2003-2004i)}{(2005-2006i)(2003+2004i)}\right| = \frac{|2005+2006i||2003-2004i|}{|2005-2006i||2003+2004i|} = 1$ 。

25、求积分 $\int_C \frac{1}{z^2+2z+2}dz$ ，其中 C 是圆周：$|z| = 1$ 。

解：因被积函数的不解析点为 $z = -1\pm i \notin |z| \le 1$，所以 被积函数在闭圆 $|z| \le 1$ 上解析。

由柯西积分定理得 $\int_{C}\frac{1}{z^{2}+2z+2}dz=0$。

26、计算积分 $\int_{|z|=2}\frac{z}{(z^{2}-9)(z+i)}dz$。

解：因为 $\frac{z}{z^{2}-9}$ 在 $|z|\le 2$ 上解析，

所以　由柯西积分公式得

$$\int_{|z|=2}\frac{z}{(z^{2}-9)(z+i)}dz=\int_{|z|=2}\frac{\frac{z}{z^{2}-9}}{z+i}dz=2\pi i\cdot\frac{z}{z^{2}-9}\Big|_{z=-i}=-\frac{\pi}{5}$$

27、用复积分和留数定理两种方法计算积分 $\int_{|z|=2}\frac{e^{z}}{(z^{2}+1)^{2}}dz$。

解：（复积分的方法）在 $|z|=2$ 内分别以 $z=i$ 和 $z=-i$ 为心，$\frac{1}{2}$ 为半径作圆周

$$C_{1}:|z-i|=\frac{1}{2}\text{ 和 }C_{2}:|z+i|=\frac{1}{2}$$

显然 C_{1} 和 C_{2} 都属于 $|z|<2$，且互不相交也互不包含，于是由复合闭路原理得

$$\int_{|z|=2}\frac{e^{z}}{(z^{2}+1)^{2}}dz=\int_{C_{1}}\frac{\frac{e^{z}}{(z+i)^{2}}}{(z-i)^{2}}dz+\int_{C_{2}}\frac{\frac{e^{z}}{(z-i)^{2}}}{(z+i)^{2}}dz$$

再由解析函数的高阶导数公式得

$$\int_{|z|=2}\frac{e^{z}}{(z^{2}+1)^{2}}dz=\int_{C_{1}}\frac{\frac{e^{z}}{(z+i)^{2}}}{(z-i)^{2}}dz+\int_{C_{2}}\frac{\frac{e^{z}}{(z-i)^{2}}}{(z+i)^{2}}dz=2\pi i[(\frac{e^{z}}{(z+i)^{2}})'\Big|_{z=i}+(\frac{e^{z}}{(z-i)^{2}})'\Big|_{z=-i}]$$

$$=2\pi i[\frac{i}{4}e^{i}(-1+i)+\frac{i}{4}e^{-i}(i+1)]=\frac{\pi}{2}[(1-i)e^{i}-(1+i)e^{-i}]\text{。}$$

（留数定理的方法）因为被积函数在 $|z|=2$ 内仅有两个孤立奇点 $z=\pm i$，且都是二阶极点，

所以　由留数定理得

$$\int_{|z|=2}\frac{e^{z}}{(z^{2}+1)^{2}}dz=2\pi i\{\mathrm{Res}[\frac{e^{z}}{(z^{2}+1)^{2}},-i]+\mathrm{Res}[\frac{e^{z}}{(z^{2}+1)^{2}},i]\}$$

$$=2\pi i[(\frac{e^{z}}{(z+i)^{2}})'\Big|_{z=i}+(\frac{e^{z}}{(z-i)^{2}})'\Big|_{z=-i}]$$

$$= 2\pi i[\frac{i}{4}e^{i}(i-1)+\frac{i}{4}e^{-i}(i+1)] = -\frac{\pi}{2}[e^{i}(i-1)+e^{-i}(i+1)]$$。

28、设 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$，求 $\mathrm{Res}(f,-1)$ 和 $\mathrm{Res}(f,\infty)$。

解：因为 $z=-1$ 是 $f(z)$ 的二阶极点，$z=1$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，且 $f(z)$ 在扩充平面上仅有三个奇点 $z=\pm 1$ 和 $z=\infty$，且都是孤立奇点。

所以 由推广的留数定理得

$$\mathrm{Res}(f,-1)+\mathrm{Res}(f,1)+\mathrm{Res}(f,\infty)=0$$

又 $$\mathrm{Res}(f,-1)=(\frac{z}{z-1})'\Big|_{z=-1}=-\frac{1}{(z-1)^2}\Big|_{z=-1}=-\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Res}(f,1)=\frac{z}{(z+1)^2}\Big|_{z=1}=\frac{1}{4}$$

所以 $$\mathrm{Res}(f,\infty)=-[\mathrm{Res}(f,1)+\mathrm{Res}(f,-1)]=-[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}]=0$$

29、求 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环 $2<|z|<+\infty$ 内的罗郎展式。

解：在圆环 $2<|z|<+\infty$ 内，

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}$$。

30、利用留数计算实积分 $I=\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sin\theta}d\theta$。

解：令 $z=e^{i\cdot\theta}$，则

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{5}+\sin\theta}d\theta \overset{\sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i}}{=} 2\int_{|z|=1}\frac{1}{z^2+2\sqrt{5}\cdot iz-1}dz$$

显然被积函数在单位圆内仅有一个一阶极点 $z=(-\sqrt{5}+2)i$。

所以 由留数定理

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{5}+\sin\theta}d\theta \overset{\sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i}}{=} 2\int_{|z|=1}\frac{1}{z^2+2\sqrt{5}\cdot iz-1}dz$$

$$=2\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+2\sqrt{5}\cdot iz-1},(-\sqrt{5}+2)i\right)=\pi$$

31、试求把带形区域$0<\operatorname{Im} z<\pi$映射成单位圆盘$|w|<1$的保形映射变换$w=f(z)$。

解：先作指数函数变换$\xi=e^z$将带形区域$0<\operatorname{Im} z<\pi$映射成上半平面$\operatorname{Im}\xi>0$；

再作分式线性变换$w=\dfrac{\xi-i}{\xi+i}$将上半平面$\operatorname{Im}\xi>0$映射成单位圆盘$|w|<1$。

复合上述的两个变换即可得满足要求的一个保形变换为

$$w=\frac{e^z-i}{e^z+i}$$

32、在复数范围内解方程$z^6+a^6=0$ $(a>0)$。

解：由原方程可得 $z^6=-a^6=a^6\cdot e^{i\pi}$

所以 方程的解为 $z_k=a\cdot e^{i\frac{(2k+1)}{6}\pi}$ $k=0,1,2,3,4,5$。

33、计算复积分$\displaystyle\int_{|z-2|=R}\frac{1}{(z-2)^n}dz$，其中$n\geq 1$为自然数，$R>0$。

解：令$z=2+R\cdot e^{i\theta}$ $0\leq\theta\leq 2\pi$，由复积分的参数方程计算公式得

$$\int_{|z-2|=R}\frac{1}{(z-2)^n}dz=\frac{i}{R^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{i(1-n)\theta}d\theta=\begin{cases}2\pi i, n=1\\ 0, n\neq 1\end{cases}.\text{。}$$

34、设$f(z)=\displaystyle\int_{|\xi|=2}\frac{e^{\xi}-\xi^2-1}{\xi-z}dz$，求$f'(i)$，$f'(2+i)$。

解：由柯西积分公式以及柯西积分定理得

$$f(z)=\int_{|\xi|=2}\frac{e^{\xi}-\xi^2-1}{\xi-z}dz=\begin{cases}2\pi i(e^z-z^2-1), & |z|<2\\ 0, & |z|>2\end{cases}$$

所以 $$f'(z)=\begin{cases}2\pi i(e^z-2z), & |z|<2\\ 0, & |z|>2\end{cases}$$

从而 $f'(i)=2\pi i(e^{i}-2)$， $f'(2+i)=$ （因为$|i|=1<2$， $|2+i|=\sqrt{5}>2$）。

35、求出函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$在扩充平面上的所有孤立奇点的去心邻域内的罗郎展式。

解：因为$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}$在扩充平面上的孤立奇点为$z=1$，$z=2$，

$z=\infty$。

所以 在$z=1$的最大的去心邻域$0<|z-1|<1$内，

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1-1}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{n}$$

在$z=2$ 的最大的去心邻域$0<|z-2|<1$内，

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2+1}=-\frac{1}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(z-2)^{n}$$

在$z=\infty$ 的最大的去心邻域$2<|z|<+\infty$ 内，

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n}-1}{z^{n+1}}$$

36、用留数计算实积分$\displaystyle\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}d\theta$ 。

解：令$z=e^{i\theta}$，则 $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}d\theta=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z^{2}+4z+1}dz$

显然被积函数在单位圆内仅有一个一阶极点$z=-2+\sqrt{3}$ 。

所以 由留数定理

$$\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}d\theta=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z^{2}+4z+1}dz$$

$$=\frac{1}{i}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{Res}(\frac{1}{z^{2}+4z+1},-2+\sqrt{3})=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

37、设复数$z=\dfrac{(1+\sqrt{3}+i)(\sin\sqrt{2}-i)}{(1+\sqrt{3}-i)(\sin\sqrt{2}+i)}$，求$|\overline{z}|$。

解：因$\overline{z}=\dfrac{(1+\sqrt{3}-i)(\sin\sqrt{2}+i)}{(1+\sqrt{3}+i)(\sin\sqrt{2}-i)}$，

并注意到 $\left|1+\sqrt{3}+i\right| = \left|1+\sqrt{3}-i\right|$, $\left|\sin\sqrt{2}-i\right| = \left|\sin\sqrt{2}+i\right|$

所以 $\left|\overline{z}\right| = 1$。

38、计算复积分 $\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2+4z+5} dz$。

解：因被积函数的不解析点为 $z = -2 \pm i \notin |z| \le 1$，所以 被积函数在闭圆 $|z| \le 1$ 上解析。

由柯西积分定理得 $\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2+4z+5} dz = 0$。

39、设 $f(z) = \int\limits_{|\xi|=2} \frac{5\xi^2+9\xi^2+3}{\xi - z} dz$，求 $f'(i)$， $f'(1+2i)$。

解：由柯西积分公式和柯西积分定理得

$$f(z) = \int\limits_{|\xi|=2} \frac{5\xi^3+9\xi^2+3}{\xi - z} dz = \begin{cases} 2\pi i(5z^3+9z^2+3), & |z| < 2 \\ 0, & |z| > 2 \end{cases}$$

所以 $f'(z) = \begin{cases} 2\pi i(15z^2+18z), & |z| < \\ 0, & |z| > 2 \end{cases}$

故 $f'(i) = 2\pi i(-15+18i) = 2\pi(-18-15i)$， $f'(1+2i) = 0$。

（因为 $|i| = 1 < 2$， $|1+2i| = \sqrt{5} > 2$ ）

40、求出函数 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ 在扩充平面上的所有孤立奇点的去心邻域内的罗郎展式。

解：因为 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$ 在扩充平面上的孤立奇点为 $z = 1$， $z = 0$，

$z = \infty$。

所以 在 $z = 1$ 的最大的去心邻域 $0 < |z-1| < 1$ 内，

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1+1} = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

在 $z = 0$ 的最大的去心邻域 $0 < |z| < 1$ 内，

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}=-\frac{1}{1-z}-\frac{1}{z}=-\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n \text{。}$$

在 $z=\infty$ 的最大的去心邻域 $1<|z|<+\infty$ 内，

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{z}=-\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} \text{。}$$

41、用留数计算实积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2\theta}d\theta$ 。

解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{3+\cos 2\theta}d\theta\overset{u=2\theta}{=}\frac{1}{2}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{3+\cos u}du$

令 $z=e^{iu}$，则 $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{3+\cos u}du=\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z^2+6z+1}dz$

显然被积函数在单位圆内仅有一个一阶极点 $z=-3+2\sqrt{2}$ 。

所以　由留数定理

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{3+\cos u}du=\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z^2+6z+1}dz=\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+6z+1},-3+2\sqrt{2}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

从而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{3+\cos u}du=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ 。

42、将函数 $f(z)=(z-2)^{-1}$ 在点 z=0 的去心邻域展成罗朗级数.

解: $f(z)=\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}$

43、将函数 $f(z)=\frac{z^2}{z-1}$ 在点 z＝1 的去心邻域展成罗朗级数.

解: $f(z)=\frac{z^2}{z-1}=\frac{z^2-1+1}{z-1}=\frac{(z-1)(z+1)+1}{z-1}=z+1+\frac{1}{z-1}=2+z-1+\frac{1}{z-1}$

44、试求函数 $f(z)=z^{-3}\cdot\sin z^3$ 的有限奇点,并判定奇点的类别.

解: $\because \sin z^3$ 解析,无奇点,$\therefore$ f(z)的有限奇点为 z=0.

并且为 3 阶极点.

45、试求函数 $f(z)=[z(1-z^2)]^{-1}$ 的有限奇点，并判定奇点的类别.

解：f(z)的 m 阶奇点即 $\frac{1}{f(z)}$ 的阶零点,而 $\frac{1}{f(z)} = z(1-z^2) = z(1-z)(1+z)$ 零点为 z=0，z=1，z=-1，且均为 1 阶零点。

$\therefore f(z) = \left[z(1-z^2)\right]^{-1}$ 的有限奇点为 z=0，z=1,z=-1 且均为 1 阶极点.

六、证明题

1、证明：$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$，并说明其几何意义。

证明：因 $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$

而 $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2\operatorname{Re}[\overline{z_1}z_2]$

所以 $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}[z_1\overline{z_2}]$

同理可得 $|z_1-z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}[z_1\overline{z_2}]$

两式相加得 $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

它表明以 z_1 和 z_2 为两邻边的平行四边形的对角线的平方和等于它的两邻边的平方和的两倍。

2、设 $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$，证明：

（1）$u(x,y)$ 是 z 平面上的调和函数；

（2）求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(0) = i$。

证明：（1）因 $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$，$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x + (-6x) = 0$$

所以 $u(x,y)$ 是 z 平面上的调和函数。

（2）设所求的解析函数为 $f(z) = u + iv$，因 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 6xyi \Big|_{\substack{x=\frac{z+\bar{z}}{2} \\ y=\frac{z-\bar{z}}{2i}}} = 3z^2$

所以 $f(z) = z^3 + c$。

又 由 $f(0)=i$ 可得 $c=i$，所以

所求的解析函数为 $f(z)=z^3+i$。

3、（1）证明：$\int_C \frac{1}{z+2}dz=0$，其中 $C:|z|=1$；

（2）利用（1）的结果证明 $\int_0^\pi \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$。

（1）证明：因为被积函数的不解析点 $z=-2\notin |z|\le 1$，所以由柯西积分定理得

$$\int_C \frac{1}{z+2}dz=0$$

（2）解：令 $z=e^{i\theta}$, $(-\pi\le\theta\le\pi)$，由复积分的参数方程计算公式得

$$0=\int_C \frac{1}{z+2}dz=i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{2+\cos\theta+i\sin\theta}d\theta=i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\cos\theta+1+2i\sin\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$$

$$=i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\cos\theta+1}{5+4\cos\theta}d\theta-2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$$

比较两边的实部和虚部得 $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$

再注意到被积函数是偶函数得

$$\int_0^\pi \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0。$$

4、若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在区域 D 内，$\mathrm{Re}\, z=e$，则在区域 D 内 $f(z)=e+ic$，其中 c 为是实常数。

证明：设 $f(z)=u+iv$，则 $u=e$。由题设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，由柯西黎曼条件得

$$0=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad 0=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

从而由数学分析的知识得 $v=c$，c 为是实常数

所以 在区域 D 内 $f(z)=e+ic$，其中 c 为是实常数。

5、设 $f(z)$ 在闭区域 $\left|z-z_0\right| \le R\ (R>0)$ 上解析，令 $M(R)=\max\limits_{\left|z-z_0\right|=R}\left|f(z)\right|$，证明：

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \frac{n!\cdot M(R)}{R^n}\ (n=0,1,2,\cdots,$$ ---------- 柯西不等式。

证明：由解析函数的高阶导数公式得

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\left|z-z_0\right|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\ (n=0,1,2,\cdots,$$

在 $\left|z-z_0\right|=R$ 上，$\left|\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \le \dfrac{M(R)}{R^{n+1}}$

由积分的估值性得

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|=\frac{n!}{2\pi}\left|\int_{\left|z-z_0\right|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M(R)}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R=\frac{n!M(R)}{R^n}\ (n=0,1,2,\cdots,$$

6、若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在区域 D 内，$\operatorname{Im} z=1$，则在区域 D 内 $f(z)=c+i$，其中 c 为是实常数。

证明：设 $f(z)=u+iv$，则 $v=1$。由题设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，由柯西黎曼条件得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

从而由数学分析的知识得 $u=c$，c 为是实常数

所以 在区域 D 内 $f(z)=c+i$，其中 c 为是实常数。

7、设 $f(z)$ 在闭区域 $\left|z\right|<R\ (R>0)$ 上解析，并且具有泰勒展式

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots\ a_n\ \cdots,$$

令 $M(r)=\max\limits_{\left|z\right|=r}\left|f(z)\right|$，证明：

$$\left|a_n\right| \le \frac{M(r)}{r^n}\quad (n=0,1,2,\cdots,\ \ldots < R)$$ 。

证明：由泰勒系数的计算公式得

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\left|z-z_0\right|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\ (n=0,1,2,\cdots,\ \ldots < R)$$

在 $\left|z-z_0\right|=r$ 上，$\left|\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \le \dfrac{M(r)}{r^{n+1}}$

由积分的估值性得

$$\left|a_n\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M(r)}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n} \quad (n=0,1,2,\cdots ,\text{。}$$

8、若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，$\overline{f(z)}$ 也在区域 D 内解析，则在区域 D 内 $f(z)$ 恒为常数。

证明：设 $f(z)=u+iv$，则 $\overline{f(z)}=u-iv$。由题设 $f(z)$ 与 $\overline{f(z)}$ 都在区域 D 内解析，由柯西黎曼条件得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$

所以 $f(z)$ 在区域 D 内恒为常数。

9、设 $f(z)$ 在闭圆 $|z|\le 1$ 上解析，且

$$\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi=0,\quad z\in\{z\,\|z|<1\},$$

证明：在 $|z|\le 1$ 内 $f(z)$ 恒为常数。

证明：由题设及解析函数的高阶导数公式得

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi=0,\quad z\in\{z\,\|z|<1\}$$

所以 在 $|z|<1$ 内 $f(z)$ 恒为常数。再由解析函数的惟一性得，在 $|z|\le 1$ 内 $f(z)$ 恒为常数。

10、若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $\overline{i\cdot f(z)}$ 也在区域 D 内解析，则 $f(z)$ 在区域 D 内必为常数。

证明：设 $f(z)=u+iv$，则 $\overline{i\cdot f(z)}=-v-iu$。由题设 $f(z)$ 与 $\overline{i\cdot f(z)}$ 都在区域 D 内解析，由柯西黎曼条件得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\quad -\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad -\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$

所以 $f(z)$ 在区域 D 内必为常数。

11、设 $f(z)$ 在闭圆域 $|z| \le 1$ 上解析，且在圆域 $|z| < 1$ 内，恒有 $\left| \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| = 1$，证明：在闭圆域 $|z| \le 1$ 上，$f(z) \equiv c$，且 $c = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{i\theta}$，$\theta$ 为实常数。

证明：由柯西积分公式得 $\int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i f(z)$，$|z| < 1$。

由题设得　在 $|z| < 1$ 内，$|f(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| = \frac{1}{2\pi}$ 为常数。

所以　在 $|z| < 1$ 内，$f(z) \equiv c$，显然 $c = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{i\theta}$，$\theta$ 为实常数

再由解析函数的惟一性得，　在闭圆域 $|z| \le 1$ 上，$f(z) \equiv c$，显然 $c = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{i\theta}$，$\theta$ 为实常数。

12、若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $\mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{Im}\, f(z)$，则 $f(z)$ 在区域 D 内必为常数。

证明：设 $f(z) = u + iv$，由题设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，由柯西黎曼条件得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

又由题设 $u = v$，从而 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}$

联立解得 $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

所以 $f(z)$ 在区域 D 内必为常数。

13、设 $f(z)$ 在闭圆域 $|z| \le 1$ 上解析，且在圆域 $|z| < 1$ 内，恒有 $\mathrm{Re}[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi] = 1$，

证明：在闭圆域 $|z| \le 1$ 上，$f(z) \equiv 1 + i \cdot c$，其中 c 为实常数。

证明：由柯西积分公式得 $\int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i f(z)$，$|z| < 1$。

由题设得　在 $|z| < 1$ 内，$\mathrm{Re}[f(z)] = \mathrm{Re}[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi] = 1$。

所以　在$|z|<1$内，$f(z)\equiv 1+ic$，c为实常数

再由解析函数的惟一性得，在闭圆域$|z|\le 1$上，$f(z)\equiv 1+i\cdot c$，其中c为实常数。

14、试在复平面讨论 f(z)=iz 的解析性。

解：令 f(z)=u+iv　z=x+iy

则 iz=i(x+iy)=-y+ix

∴u=-y　v=x

于是 ux=0　uy=-1

Vx=1　Vy=0

∵ux、uy、vx 在复平面内处处连接

又 Ux=Vy　Uy=-Vx。

∴f(z)=iz 在复平面解析。

15、试证：若函数 f(z)在区域 G 内为解析函数，且满足条件f'（z）=0，z∈G，则 f(z)在 G 内为常数。

证：设 f(z)=u+iv,z=x+iy,z∈G

∵f(z)在 G 内解析，

Ux=Vy,　Uy=-Vx

又f'（z）=0,　f'（z）=Ux+iVx

Ux=0　Vx=0

Uy=-Vx=0　Ux=Vy=0

U 为实常数 C_1，V 也为实常数 C_2，

f(z)=$C_1+iC_2=Z_0$

f(z)在 G 内为常数。

16、试证: $\sin 2z=2\sin z\cdot\cos z$.

证明：根据正弦函数及余弦正数定义有：

$$\sin 2z=\frac{e^{2iz}-e^{-2iz}}{2i}$$

$$2\sin z\cos z=2\frac{e^{iz}-iz}{2i}\cdot\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$=\frac{e^{2\cdot iz}-e^{-2\cdot iz}}{2i}$$

∴　sin2z=2sinz·cosz

17、计算积分$\int_{|z|=1}\frac{1}{z+2}dz$，并由此证明$\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$.

证明：∵$f(z)=\dfrac{1}{z+2}$在圆域

|z|≤1 内解析

$\therefore \int_{|z|=1} \frac{1}{z+2} dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{z+2} dz = 0$

另一方面,在圆|z|=$1 \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)(z \le \theta \le 2)$

$\therefore \int_{|z|=1} \frac{1}{z+2} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\cos\theta + \sin\vartheta + 2} d(\cos\theta + i\sin\theta)$ (实部和虚部为 0)

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin\theta + i\cos\theta}{\cos\theta + \sin\vartheta + 2} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{c - \sin\theta + i\cos\theta[(2+\cos\theta) - i\sin\theta]}{[(2+\cos\theta) + i\sin\theta][(2+\cos\theta) - i\sin\theta]} d\theta$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-2\sin\theta + i(2\cos\theta + 1)}{4 + 4\cos\theta + \cos\theta + \sin\theta} d\theta$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-2\sin\theta + i(1 + 2\cos\theta)}{5 + 4\cos\theta} dz$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-2\sin\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta + i\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + 2\cos\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta$

$\because \int_{|z|=1} \frac{1}{z+2} dz = 0 \quad \therefore \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-2\sin\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta = 0$

$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + 2\cos\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta = 0$

而 $\frac{1 + 2\cos\theta}{5 + 4\cos\theta}$ 为偶函数

$\therefore 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + 2\cos\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta$

$= 2\int_{0}^{\pi} \frac{1 + 2\cos\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta$

$\therefore \int_{0}^{\pi} \frac{1 + 2\cos\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta = 0$