Αριθμητικές Μέθοδοι – Σημειώσεις
Εφαρμογές στα Γεωφυσικά Ρευστά

Περιεχόμενα

1 Παράγωγος **2**
1.1 Forward Difference 2
1.2 Backward Difference 3
1.3 Centered Difference 3
1.4 Τάξη Ακρίβειας (Order of Accuracy) 4
1.5 Πεπερασμένες Διαφορές σε Διακριτό Πλέγμα 6
1.6 Ασκήσεις 10

1 Παράγωγος

Έστω μια πραγματική συνάρτηση $f : I \subseteq R \to R$, όπου I ανοικτό διάστημα και $x \in I$.
Η πρώτη παράγωγος της f στο σημείο x ορίζεται ως

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

εφόσον το όριο υπάρχει και είναι πεπερασμένο.

Η δεύτερη παράγωγος ορίζεται ως η παράγωγος της πρώτης παραγώγου:

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \tag{2}$$

εφόσον η f' είναι παραγωγίσιμη στο x.

1.1 Forward Difference

Η πρόσθια πεπερασμένη διαφορά προκύπτει από το ανάπτυγμα Taylor της $f(x+h)$ γύρω από το σημείο x.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots \\
f(x+h) - f(x) &= hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots \\
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= f'(x) + \frac{h}{2!}f''(x) + \cdots \\
f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2!}f''(x) - \cdots
\end{aligned}$$

Καθώς ο πρώτος παραλειπόμενος όρος είναι ανάλογος του h, προκύπτει

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h)} \tag{3}$$

Σφάλμα Αποκοπής - Truncation Error

Το σφάλμα αποκοπής προκύπτει από την παράλειψη όρων ανώτερης τάξης του αναπτύγματος Taylor κατά την αριθμητική προσέγγιση μιας παραγώγου. Στην περίπτωση της Forward Difference, από το ανάπτυγμα Taylor προκύπτει:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2!}f''(x) - \frac{h^2}{3!}f'''(x) - \cdots$$

Ορίζουμε το σφάλμα αποκοπής ως τη διαφορά μεταξύ της αριθμητικής προσέγγισης και της ακριβούς παραγώγου:

$$E_T(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \frac{h}{2!}f''(x) + \frac{h^2}{3!}f'''(x) + \cdots \qquad \Rightarrow \qquad E_T(h) = \mathcal{O}(h)$$

1.2 Backward Difference

Η οπίσθια πεπερασμένη διαφορά προκύπτει από το ανάπτυγμα Taylor της $f(x-h)$ γύρω από το σημείο x.

Απόδειξη.

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

$$f(x) - f(x-h) = hf'(x) - \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) - \cdots$$

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x) - \frac{h}{2!}f''(x) + \frac{h^2}{3!}f'''(x) - \cdots$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2!}f''(x) - \frac{h^2}{3!}f'''(x) + \cdots$$

Καθώς ο πρώτος παραλειπόμενος όρος είναι ανάλογος του h, προκύπτει

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h)} \tag{4}$$

1.3 Centered Difference

Η κεντρική πεπερασμένη διαφορά προκύπτει από τον συνδυασμό των αναπτυγμάτων Taylor της συνάρτησης $f(x+h)$ και $f(x-h)$ γύρω από το σημείο x.

Απόδειξη.
Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση προς τις δύο κατευθύνσεις:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

Αφαιρώντας το δεύτερο ανάπτυγμα από το πρώτο, οι όροι με άρτιες δυνάμεις του h απαλείφονται:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{2h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{3!}f'''(x) + \cdots$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}f'''(x) - \cdots$$

Καθώς ο πρώτος παραλειπόμενος όρος είναι ανάλογος του h^2, προκύπτει

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)} \tag{5}$$

Δεύτερη Παράγωγος - Centered Difference

Η κεντρική πεπερασμένη διαφορά για τη δεύτερη παράγωγο προκύπτει από το άθροισμα των αναπτυγμάτων Taylor της συνάρτησης $f(x+h)$ και $f(x-h)$ γύρω από το σημείο x.

Απόδειξη.
Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση προς τις δύο κατευθύνσεις:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots$$

Προσθέτοντας τα δύο αναπτύγματα, οι όροι με περιττές δυνάμεις του h απαλείφονται:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{2h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots$$

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) + \cdots$$

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{h^2}{12}f^{(4)}(x) + \cdots$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(x) + \cdots$$

Καθώς ο πρώτος παραλειπόμενος όρος είναι ανάλογος του h^2, προκύπτει ότι η κεντρική πεπερασμένη διαφορά για τη δεύτερη παράγωγο είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας.

$$\boxed{f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)} \tag{6}$$

1.4 Τάξη Ακρίβειας (Order of Accuracy)

Η τάξη ακρίβειας περιγράφει τον ρυθμό με τον οποίο μειώνεται το σφάλμα αποκοπής $E_T(h)$ καθώς το βήμα διακριτοποίησης $h \to 0$. Μια μέθοδος είναι τάξης p όταν το σφάλμα ικανοποιεί τη σχέση

$$|E_T(h)| \leq Mh^p, \qquad 0 < h < h_0,$$

για σταθερές $M, h_0 > 0$. Τότε γράφουμε $E_T(h) = \mathcal{O}(h^p)$.

Σχέση βήματος και σφάλματος

Αν ο πρώτος μη μηδενικός όρος του σφάλματος είναι Ah^p, με $A \neq 0$, τότε

$$E_T(h) = Ah^p + o(h^p) \quad \Rightarrow \quad |E_T(h)| \approx |A|h^p.$$

Υποδιπλασιάζοντας το βήμα $h \to h/2$, προκύπτει ότι το σφάλμα μειώνεται περίπου κατά παράγοντα 2^p για αρκετά μικρό h.

$$\boxed{\frac{|E_T(h/2)|}{|E_T(h)|} \approx \frac{1}{2^p}.} \tag{7}$$

Παράδειγμα 1. Πώς μεταβάλλεται το σφάλμα αποκοπής κάθε μεθόδου (Forward, Backward και Centered Difference) όταν το βήμα διακριτοποίησης υποδιπλασιάζεται ($h \to h/2$);

Λύση:

Χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\frac{|E_T(h/2)|}{|E_T(h)|} \approx \frac{1}{2^p}.$$

Για τις μεθόδους Forward και Backward Difference, όπου $p = 1$, έχουμε

$$\frac{|E_T(h/2)|}{|E_T(h)|} \approx \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως, το σφάλμα μειώνεται περίπου στο μισό.

Για τη μέθοδο Centered Difference, όπου $p = 2$, προκύπτει

$$\frac{|E_T(h/2)|}{|E_T(h)|} \approx \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Επομένως, το σφάλμα μειώνεται περίπου στο ένα τέταρτο.

Μέθοδος	**Τάξη σφάλματος**	**Λόγος**
Forward Difference	$\mathcal{O}(h)$	$1/2$
Backward Difference	$\mathcal{O}(h)$	$1/2$
Centered Difference	$\mathcal{O}(h^2)$	$1/4$

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2$. Θέλουμε να προσεγγίσουμε την πρώτη παράγωγο στο σημείο $x = 2$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Forward Difference.

Λύση:

$$f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 4.$$

Η αριθμητική προσέγγιση δίνεται από

$$D_F(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h.$$

Το απόλυτο σφάλμα αποκοπής είναι

$$|E_T(h)| = |D_F(h) - f'(2)| = |(4+h) - 4| = h, \qquad h > 0.$$

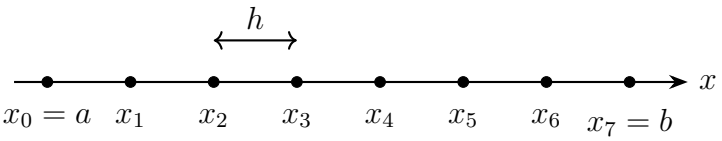
Επομένως, το σφάλμα είναι ανάλογο του h, γεγονός που επιβεβαιώνει ότι η προσέγγιση είναι πρώτης τάξης ακρίβειας.

$\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{D_F(h)}$	$\boldsymbol{\lvert E_T(h)\rvert}$
0.200	4.200	0.200
0.100	4.100	0.100
0.050	4.050	0.050
0.025	4.025	0.025

1.5 Πεπερασμένες Διαφορές σε Διακριτό Πλέγμα

Γνωρίζουμε ότι σε ένα ομοιόμορφο πλέγμα με N_x σημεία, τα διαδοχικά σημεία απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση h.

$$x_i = a + ih, \qquad i = 0, 1, \ldots, N_x - 1$$



όπου a είναι το αρχικό σημείο, N_x το πλήθος των σημείων και $N_x - 1$ το πλήθος των υποδιαστημάτων, με

$$h = \frac{b-a}{N_x - 1}.$$

Η τιμή της συνάρτησης $u(x)$ σε κάθε σημείο του πλέγματος συμβολίζεται ως

$$u_{i+1} = u(x_i + h), \qquad u_i = u(x_i), \qquad u_{i-1} = u(x_i - h)$$

Με αυτόν τον συμβολισμό, οι πεπερασμένες διαφορές γράφονται ως εξής:

Πρώτη Παράγωγος - Forward Difference

$$\boxed{\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} \simeq \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \qquad \mathcal{O}(h)} \tag{8}$$

Πρώτη Παράγωγος - Backward Difference

$$\boxed{\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} \simeq \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \qquad \mathcal{O}(h)} \tag{9}$$

Πρώτη Παράγωγος - Centered Difference

$$\boxed{\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} \simeq \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \qquad \mathcal{O}(h^2)} \tag{10}$$

Δεύτερη Παράγωγος - Centered Difference

$$\boxed{\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x_i} \simeq \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \qquad \mathcal{O}(h^2)} \tag{11}$$

Vectorized Indexing και Slicing

Υπενθυμίζουμε ότι για να επιλέξουμε τα κατάλληλα στοιχεία των πινάκων ώστε να εφαρμόσουμε αριθμητικά τις πεπερασμένες διαφορές, μπορούμε να εφαρμόσουμε Explicit Indexing ή Vectorized Slicing. Βρίσκουμε πόσες θέσεις απαιτεί η σχέση αριστερά (L_s) και δεξιά (R_s) από το σημείο i.

$$i - L_s \qquad \text{έως} \qquad i + R_s$$

Explicit Indexing

Για N_x χωρικά σημεία, το επιτρεπτό εύρος δεικτών είναι:

$$\begin{aligned} \text{Python:} \quad & i = L_s, \ldots, N_x - 1 - R_s \\ \text{MATLAB:} \quad & i = 1 + L_s, \ldots, N_x - R_s \end{aligned}$$

```
i = np.arange(Ls, Nx-Rs)
```

```
i = (Ls+1):(Nx-Rs);
```

Vectorized Slicing

Το κεντρικό slice γράφεται:

$$\begin{aligned} \text{Python:} \quad & u_i \longrightarrow \texttt{u[Ls:-Rs]} \\ \text{MATLAB:} \quad & u_i \longrightarrow \texttt{u(Ls+1:end-Rs)} \end{aligned}$$

```
u[Ls:-Rs]
```

```
u(Ls+1:end-Rs)
```

Παράδειγμα 3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[0, 4]$, με χωρικό βήμα $h = 1$. Να υπολογιστεί η πρώτη παράγωγος με Forward Difference, χρησιμοποιώντας Explicit Indexing σε Python και MATLAB.

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

Λύση:

Python (NumPy)

```
x = np.arange(0, 5)
f = x**2
h = 1
N=len(x);

i = np.arange(0, N-1)
df = (f[i+1] - f[i])/h
```

MATLAB

```
x = 0:1:4;
f = x.^2;
h = 1;
N=numel(x);

i = 1:N-1;
df = (f(i+1) - f(i))/h;
```

$$df = [1, 3, 5, 7]$$

Σημείωση: Η Forward Difference απαιτεί το επόμενο σημείο f_{i+1}. Επομένως, η παράγωγος υπολογίζεται μόνο στα $x = 0, 1, 2, 3$, καθώς στο τελευταίο σημείο $x = 4$ δεν υπάρχει επόμενο σημείο στο πλέγμα. Εκεί μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε Backward Difference.

Παράδειγμα 4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[0, 4]$, με χωρικό βήμα $h = 1$. Να υπολογιστεί η πρώτη παράγωγος με Forward Difference, χρησιμοποιώντας Vectorized Slicing σε Python και MATLAB.

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

Λύση:

Python (NumPy)

```
x = np.arange(0, 5)
f = x**2
h = 1

df = (f[1:]  - f[:-1])/h
```

MATLAB

```
x = 0:1:4;
f = x.^2;
h = 1;

df = (f(2:end) - f(1:end-1))/h;
```

$$df = [1, 3, 5, 7]$$

Σημείωση: Η Forward Difference απαιτεί το επόμενο σημείο f_{i+1}. Επομένως, η παράγωγος υπολογίζεται μόνο στα $x = 0, 1, 2, 3$, καθώς στο τελευταίο σημείο $x = 4$ δεν υπάρχει επόμενο σημείο στο πλέγμα. Εκεί μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε Backward Difference.

Παράδειγμα 5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[0, 4]$, με χωρικό βήμα $h = 1$. Να υπολογιστεί η δεύτερη παράγωγος με Centered Difference, χρησιμοποιώντας Explicit Indexing σε Python και MATLAB.

$$f''(x_i) \approx \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$$

Λύση:

Python (NumPy)

```
x = np.arange(0, 5)
f = x**2
h = 1
N = len(x)

i = np.arange(1, N-1)
d2f = (f[i-1] - 2*f[i] + f[i+1])/h**2
```

MATLAB

```
x = 0:1:4;
f = x.^2;
h = 1;
N = numel(x);

i = 2:N-1;
d2f = (f(i-1) - 2*f(i) + f(i+1))/h^2;
```

$$d2f = [2, 2, 2]$$

Σημείωση: Η Centered Difference απαιτεί τα γειτονικά σημεία f_{i-1} και f_{i+1}. Επομένως, η δεύτερη παράγωγος υπολογίζεται μόνο στα $x = 1, 2, 3$, καθώς στα άκρα $x = 0$ και $x = 4$ λείπει ένα γειτονικό σημείο. Στα άκρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν μονόπλευρες πεπερασμένες διαφορές.

Παράδειγμα 6. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[0, 4]$, με χωρικό βήμα $h = 1$. Να υπολογιστεί η δεύτερη παράγωγος με Centered Difference, χρησιμοποιώντας Vectorized Slicing σε Python και MATLAB.

$$f''(x_i) \approx \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$$

Λύση:

Python (NumPy)

```
x = np.arange(0, 5)
f = x**2
h = 1

d2f = (f[:-2] - 2*f[1:-1] +
f[2:])/h**2
```

MATLAB

```
x = 0:1:4;
f = x.^2;
h = 1;

d2f = (f(1:end-2) - 2*f(2:end-1) +
f(3:end))/h^2;
```

$$d2f = [2, 2, 2]$$

Σημείωση: Η Centered Difference απαιτεί τα γειτονικά σημεία f_{i-1} και f_{i+1}. Επομένως, η δεύτερη παράγωγος υπολογίζεται μόνο στα $x = 1, 2, 3$, καθώς στα άκρα $x = 0$ και $x = 4$ λείπει ένα γειτονικό σημείο. Στα άκρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν μονόπλευρες πεπερασμένες διαφορές.

Παράδειγμα 7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x, \quad x \in [0, 4]$ με χωρικό βήμα $h = 0.5$. Να υπολογιστεί η δεύτερη παράγωγος στο σημείο $x = 2.5$, χρησιμοποιώντας Centered Difference και Explicit Indexing σε Python και MATLAB.

$$f''(x_i) \approx \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$$

Λύση:

Αρχικά βρίσκουμε τον δείκτη που αντιστοιχεί στο σημείο $x = 2.5$.

$$\text{Python:} \quad i = \frac{2.5}{0.5} = 5 \qquad \text{MATLAB:} \quad i = \frac{2.5}{0.5} + 1 = 6$$

Python (NumPy)

```
x = np.arange(0, 4.5, 0.5)
f = x**4 - 2*x**3 + 3*x
h = 0.5
x0 = 2.5

i = int(x0/h)

d2f = (f[i-1] - 2*f[i]
 + f[i+1])/h**2
```

MATLAB

```
x = 0:0.5:4;
f = x.^4 - 2*x.^3 + 3*x;
h = 0.5;
x0 = 2.5;

i = x0/h + 1;

d2f = (f(i-1) - 2*f(i)
 + f(i+1))/h^2;
```

$$f''(2.5) \approx 45.5$$

1.6 Ασκήσεις

1.1 Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = e^x \sin(x), \qquad x \in [0, 2].$$

(α) Να υπολογίσετε αριθμητικά την πρώτη παράγωγο στο σημείο $x = 1$, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους Forward Difference, Backward Difference και Centered Difference, για τα βήματα

$$h = 0.2, \quad 0.1, \quad 0.05, \quad 0.025.$$

(β) Να προσδιορίσετε αναλυτικά την ακριβή πρώτη παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο $x = 1$ και να υπολογίσετε το απόλυτο σφάλμα των μεθόδων Forward Difference, Backward Difference και Centered Difference, για $h = 0.2$ και $h = 0.1$.

(γ) Να υπολογίσετε την "πειραματική" τάξη σύγκλισης κάθε μεθόδου, χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$p_{\text{exp}} = \log_2 \left(\frac{|E_T(h)|}{|E_T(h/2)|} \right).$$

Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα με τη θεωρητική τάξη ακρίβειας των αντίστοιχων μεθόδων για h=0.1

(δ) Να κατασκευάσετε διάγραμμα $\log(|E_T|)$ ως προς $\log(h)$ για τις τρεις μεθόδους.
Να εξετάσετε τη σχέση μεταξύ της κλίσης των καμπυλών και της τάξης ακρίβειας κάθε αριθμητικής μεθόδου.

Λύσεις

1.2 Θεωρούμε μια ομογενή μεταλλική ράβδο μήκους $L = 2\,\text{m}$, στην οποία η θερμοκρασία μεταβάλλεται κατά μήκος του άξονα x. Σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, η κατανομή της θερμοκρασίας δίνεται από

$$T(x) = 20 + 80 \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right), \qquad 0 \le x \le L,$$

όπου T είναι η θερμοκρασία σε °C.
Η χρονική μεταβολή της θερμοκρασίας περιγράφεται από τη μονοδιάστατη εξίσωση διάχυσης θερμότητας:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

όπου ο συντελεστής θερμικής διάχυσης είναι

$$\alpha = 1.2 \times 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}.$$

(α) Να δημιουργήσετε ομοιόμορφο πλέγμα με βήμα $h = 0.1\,\text{m}$ και να υπολογίσετε αριθμητικά τη δεύτερη χωρική παράγωγο σε όλα τα εσωτερικά σημεία της ράβδου, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Centered Difference.

(β) Χρησιμοποιώντας την εξίσωση διάχυσης θερμότητας, να υπολογίσετε τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας σε κάθε εσωτερικό σημείο της ράβδου και να προσδιορίσετε το σημείο στο οποίο η θερμοκρασία μειώνεται με τον μεγαλύτερο ρυθμό.

(γ) Να υπολογίσετε αναλυτικά τη δεύτερη χωρική παράγωγο της θερμοκρασίας και να συγκρίνετε την αναλυτική με την αριθμητική προσέγγιση σε κοινό διάγραμμα.

(δ) Να υπολογίσετε τη θερμική ροή ανά μονάδα επιφάνειας σύμφωνα με τον νόμο Fourier:

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x},$$

όπου $k = 200\,\mathrm{W/(m\,K)}$ είναι η θερμική αγωγιμότητα.
Να χρησιμοποιήσετε Backward Difference για την πρώτη χωρική παράγωγο και να προσδιορίσετε την κατεύθυνση μεταφοράς θερμότητας κατά μήκος της ράβδου.

(ε) Να επαναλάβετε τον υπολογισμό της δεύτερης χωρικής παραγώγου για τα βήματα

$$h = 0.2, \quad 0.1, \quad 0.05\,\mathrm{m}.$$

Να εξετάσετε πώς μεταβάλλεται το μέγιστο απόλυτο σφάλμα της αριθμητικής προσέγγισης καθώς μειώνεται το βήμα διακριτοποίησης.

Λύσεις

1.3 Η θέση ενός σώματος που κινείται κατά μήκος ευθύγραμμης τροχιάς περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$x(t) = 5t^2 + 2\sin(3t), \qquad 0 \le t \le 5,$$

όπου x είναι η θέση σε μέτρα και t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

(α) Να υπολογίσετε αριθμητικά την ταχύτητα $v(t) = dx/dt$ σε όλα τα δυνατά σημεία του χρονικού πλέγματος με βήμα $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους Forward, Backward και Centered Difference.

(β) Να προσδιορίσετε αναλυτικά την ακριβή ταχύτητα και να κατασκευάσετε κοινό διάγραμμα των τριών αριθμητικών προσεγγίσεων και της αναλυτικής λύσης.

(γ) Να υπολογίσετε το απόλυτο σφάλμα κάθε μεθόδου και να κατασκευάσετε κοινό διάγραμμα των σφαλμάτων ως προς τον χρόνο. Να προσδιορίσετε το μέγιστο απόλυτο σφάλμα κάθε μεθόδου.

(δ) Να επαναλάβετε τον υπολογισμό για τα χρονικά βήματα

$$\Delta t = 0.2, \quad 0.1, \quad 0.05\,\mathrm{s}.$$

Να εξετάσετε πώς μεταβάλλεται το μέγιστο απόλυτο σφάλμα καθώς μειώνεται το χρονικό βήμα και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα με τη θεωρητική τάξη ακρίβειας κάθε μεθόδου.

Λύσεις