W8PRML 演習問題 1.1

大上 雅史　(@tonets)

2012/09/18

関数 $y(x, \boldsymbol{w})$ **が多項式** (1.1) **で与えられたときの** (1.2) **の二乗和誤差関数を考える** $(*)$**．この誤差関数を最小にする係数** $w = \{w_i\}$ **は以下の線形方程式の解として与えられることを示せ．**

$$\sum_{j=0}^{M} A_{ij} w_j = T_i$$

ただし，

$$A_{ij} = \sum_{n=1}^{N} (x_n)^{i+j}, \qquad T_i = \sum_{n=1}^{N} (x_n)^i t_n$$

ここで，下付き添字の i **や** j **は成分を表し，**$(x)^i$ **は** x **の** i **乗を表す．**

$$(*)\ (1.1) \quad — \quad y(x, \boldsymbol{w}) = \sum_{j=0}^{M} w_j x^j$$

$$(1.2) \quad — \quad E(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \{y(x_n, \boldsymbol{w}) - t_n\}^2$$

(1.2) に (1.1) を代入し，w_i で偏微分して 0 と置く．

$$\begin{aligned}
E(\boldsymbol{w}) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \left\{ \sum_{j=0}^{M} w_j (x_n)^j - t_n \right\}^2 \\
\frac{\partial E(\boldsymbol{w})}{\partial w_i} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial w_i} \left\{ \sum_{j=0}^{M} w_j (x_n)^j - t_n \right\}^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \cdot 2 \left\{ \sum_{j=0}^{M} w_j (x_n)^j - t_n \right\} \sum_{j=0}^{M} \frac{\partial}{\partial w_i} w_j (x_n)^j \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left\{ \sum_{j=0}^{M} w_j (x_n)^j - t_n \right\} (x_n)^i \\
&= \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{M} w_j (x_n)^j (x_n)^i - \sum_{n=1}^{N} t_n (x_n)^i \\
&= \sum_{j=0}^{M} w_j \sum_{n=1}^{N} (x_n)^{i+j} - \sum_{n=1}^{N} (x_n)^i t_n = 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{j=0}^{M} A_{ij} w_j = T_i$$