

1.33

問

2つの離散確率変数 x, y の間の条件付きエントロピー $H[y|x]$ が0であるとする。すると $p(x) > 0$ なるすべての x に対し、変数 y は x の関数でなければならない。すなわち、各 x に対して $p(y|x) \neq 0$ である y が唯一つ存在することを示せ。

解答

問題の前提から、

$$H[y|x] = - \sum_x \sum_y p(x, y) \ln p(y|x) = - \sum_x p(x) \sum_y p(y|x) \ln p(y|x) = 0$$

$p(x, y) \ln p(y|x) \leq 0$ であり、問題では $p(x) > 0$ となる x を考えるので、

$$\sum_y p(y|x) \ln p(y|x) = 0$$

ここで、各 x に対して $p(y|x) \neq 0$ のとき y は $p(y|x) = 1$ を満たす。したがって $p(y|x) \neq 0$ である y は唯一つ存在する。(y は $p(y|x) = 1$ を満たすような x の関数。)