PRML 演習問題1.8

@americiumian

平成 24 年 9 月 25 日

1　問題

変数変換を使って 1 変数ガウス分布 (1.46) が (1.49) を満たすことを確かめよ．次に規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x|\mu, \sigma^2) dx = 1 \tag{1}$$

の両辺を σ^2 に関して微分し，ガウス分布が (1.50) を満たすことを確かめよ．最後に (1.51) が成り立つことを示せ

2　解答

2.1

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x|\mu, \sigma^2) x dx = \mu \tag{2}$$

を証明する．

$$\begin{aligned}
E[x] &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x|\mu, \sigma^2) x dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} x dx \\
& \quad z = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \text{とおくと，} \\
& \quad x = \sqrt{2}\sigma z + \mu \\
& \quad dz = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} dx
\end{aligned}$$

x	$-\infty \to \infty$
z	$-\infty \to \infty$

よって，

$$
\begin{aligned}
E[x] &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma z + \mu) \exp(-z^2) dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \int_{-\infty}^{\infty} z \exp(-z^2) dz + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz \\
& \quad \text{一項目は奇関数のため，積分値は 0.} \\
& \quad \text{二項目は，ガウス積分の公式より，積分値は} \sqrt{\pi} \\
\therefore &= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

2.2

$$
E[x^2] = \mu^2 + \sigma^2 \tag{3}
$$

を証明する．

規格化条件より，

$$
\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x|\mu, \sigma^2) dx = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \sqrt{2\pi\sigma^2}
\end{aligned}
$$

両辺を σ^2 で微分して，

$$
\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right) \left(-\frac{1}{\sigma^4}\right) \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \sqrt{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{\sigma^2}} \\
\Leftrightarrow \quad & \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \sigma^2 \\
\Leftrightarrow \quad & E[(x-\mu)^2] = \sigma^2 \\
\Leftrightarrow \quad & E[x^2] - 2\mu E[x] + \mu^2 = \sigma^2 \\
\Leftrightarrow \quad & E[x^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = \sigma^2 \\
\Leftrightarrow \quad & E[x^2] = \mu^2 + \sigma^2
\end{aligned}
$$

2.3

$$
var[x] = \sigma^2 \tag{4}
$$

を証明する．

$$
\begin{aligned}
var[x] &= E[x^2] - (E[x])^2 \\
&= (\mu^2 + \sigma^2) - \mu^2 \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$