

W8PRML 演習問題 1.9

齋藤 祐樹 (@sa_i)

平成 24 年 9 月 24 日

ガウス分布 (1.4.6) のモード (つまり分布が最大となる x の値) が μ で与えられることを示せ。同様に、多変量ガウス分布 (1.5.2) のモードは μ で与えられることを示せ。

1. 1 変量の場合

$$N(x|\mu, \sigma^2) = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right\}$$

x について微分

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}N(x|\mu, \sigma^2) &= -\frac{(x - \mu)}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right\} \\ &= -\frac{(x - \mu)}{\sigma^2} \frac{d}{dx}N(x|\mu, \sigma^2)\end{aligned}$$

よって $x = \mu$ のとき最大となる。

2. 多変量の場合

$$N(x|\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)\right\}$$

x について偏微分

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta x}N(x|\mu, \Sigma) &= -\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta x}N(x|\mu, \Sigma) \Delta_x (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \\ &= -\frac{1}{2} N(x|\mu, \Sigma) \Delta_x (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \\ &= -N(x|\mu, \Sigma) \Sigma^{-1} (x - \mu)\end{aligned}$$

よって $x = \mu$ のとき最大となる。