PRML 演習 2.23

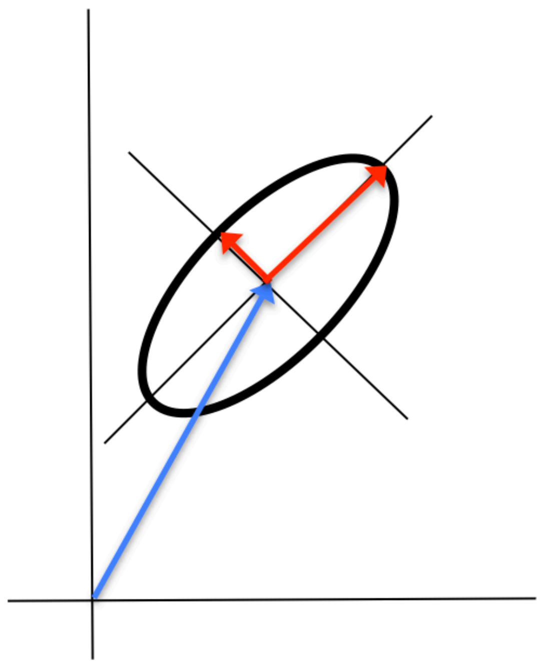
@daimatz

(演習 2.23) (2.48) の固有ベクトル展開を用いて座標系を対角化することで，マハラノビス距離 Δ が定数になる超楕円体の内部の体積が，

$$V_D|\mathbf{\Sigma}|^{1/2}\Delta^D \tag{2.286}$$

になることを示せ．ただし， V_D は D 次元単位球の体積で，マハラノビス距離は (2.44) で定義される．

(感覚的な説明しかできない‥)



(2.50), (2.51) を用いると，マハラノビス距離 Δ は

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{D} \frac{y_i^2}{\lambda_i}$$

を満たす．

2 次元単位球の体積 (単位円の面積) は

$$V_2 = \pi$$

2 次元楕円体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$$

の体積 (楕円の面積) は

$$W_2 = \pi abr^2 = abr^2 V_2$$

同様にして，n 次元単位球の体積を V_n とすると，n 次元楕円体

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} = r^2$$

の体積 W_n は

$$W_n = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right) r^n V_n$$

マハラノビス距離が一定となるような点の集合は

$$\sum_{i=1}^{D} \frac{y_i^2}{\lambda_i} = \Delta^2 \quad (= \mathrm{const})$$

をみたすような楕円体となるので，$\mathbf{y}$ 空間上でその体積は

$$\left(\prod_{i=1}^{D} \lambda_i^{1/2} \right) \Delta^D V_D = |\mathbf{\Sigma}|^{1/2} \Delta^D V_D$$

となる．$\mathbf{y}$ に拡大・回転変換するために使ったベクトルの大きさは 1 なので，$\mathbf{x}$ 空間上でも体積は同じである．