演習2.5

@sa__i

平成 24 年 10 月 15 日

1 2.5

この演習問題では、(2.13) のベータ分布が、(2.14) が成立するように正しく正規化されていることを証明する. これは

$$\int_0^1 \mu^{a-1}(1-\mu)^{b-1}d\mu = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

を示すことと等価である。ガンマ関数の定義 (1.141) より、

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty exp(-x)x^{a-1}dx \int_0^\infty exp(-y)y^{b-1}dy$$

を得る。この式を用いて、次の用にして (2.265) を証明せよ。まず,y についての積分を、x についての積分の被積分関数の中に移す。次に,x を固定して $t = y + x$ と置換し、x と t の積分の順序を交換する。最後に,t を固定して $x = t\mu$ と置換する。

$$\begin{aligned}
\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^\infty exp(-x)x^{a-1}dx \int_x^\infty exp(-y)y^{b-1}dy \\
&\quad t = y + x \text{ と置く} \\
&\quad \mu 0 \to 1 \text{ となれば任意の } x \text{ を表現できることに注意する} \\
&= \int_0^\infty x^{a-1}\{\int_x^t exp(-t)(t-x)^{b-1}dt\}dx \\
&\quad \text{積分区間に注意する} \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{a-1}exp(-t)(t-x)^{b-1}dtdx \\
&\quad \text{ここで } x \text{ と } t \text{ の積分順序を交換し、} x = t\mu (t \text{ を固定}) \text{ と置換すると } dx = td \\
&\quad \mu 01 \text{ ととれば任意の } x \text{ を表現できることに注意する} \\
&= \int_0^\infty exp(-t)t^{a-1}t^{b-1}tdt \int_{0^1} \mu^{a-1}(1-\mu)^{b-1}d\mu \\
&= \Gamma(a+b)\int_0^1 \mu^{a-1}(1-\mu)^{b-1}d\mu
\end{aligned}$$

2 2.6

(2,265) の結果を用いて, ベータ分布 (2,13) の平均、分散、およびモードがそれぞれ

$$
\begin{aligned}
E[\mu] &= \frac{a}{a+b} \\
var[\mu] &= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \\
mode[\mu] &= \frac{a-1}{a+b-2}
\end{aligned}
$$

になることを示せ。

平均

$$
\int_0^1 \mu Beta(\mu|a,b)d\mu = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 \mu^a(1-\mu)^{b-1}d\mu = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a+b+a)} \tag{1}
$$

ここで $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ より

$$
(1) = \frac{\Gamma(a+b)a\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)(a+b)\Gamma(a+b)} = \frac{a}{a+b} = E(\mu)
$$

分散

$$
\begin{aligned}
E[\mu^2] &= \int_0^1 \mu^2 Beta(\mu|a,b)d\mu = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 \mu^{a+1}(1-\mu)^{b-1}d\mu \\
&= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\{[-\frac{1}{b}\mu^{a+1}(1-\mu)^b]_0^1 + \frac{a+1}{b}\int_0^1 \mu^a(1-\mu)^{b-1}d\mu\} \\
&= \frac{\Gamma(a+b)(a+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)b}\{\int_0^1 \mu^a(1-\mu)^{b-1}d\mu - \int_0^1 \mu^{a+1}(1-\mu)^{b-1}d\mu\} \\
&= \frac{\Gamma(a+b)(a+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)b}(E(\mu) - E(\mu^2))
\end{aligned}
$$

先ほどの結果を代入し整理すると

$$
\begin{aligned}
E[\mu^2] &= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} \\
var[\mu] &= E[\mu^2] - E[\mu]^2 \text{であるので} \\
var[\mu] &= E[\mu^2] - E[\mu]^2 \\
&= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - (\frac{a}{a+b})^2 \\
& \text{整理すると} \\
&= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}
\end{aligned}
$$