W8PRML 演習問題 2.53, 2.54

大上 雅史　(@tonets)

2012/10/29

2.53（基本）

θ_0 についての (2.182) の解が (2.184) になることを示せ.

$$(2.182) — \sum_{n=1}^{N} \sin(\theta_n - \theta_0) = 0$$
$$(2.184) — \theta_0^{\mathrm{ML}} = \tan^{-1}\left\{\frac{\sum_n \sin\theta_n}{\sum_n \cos\theta_n}\right\}$$

$$\begin{aligned}
\sum_n \sin(\theta_n - \theta_0^{\mathrm{ML}}) &= \sum_n (\sin\theta_n \cos\theta_0^{\mathrm{ML}} - \cos\theta_n \sin\theta_0^{\mathrm{ML}}) \\
&= \cos\theta_0^{\mathrm{ML}} \sum_n \sin\theta_n - \sin\theta_0^{\mathrm{ML}} \sum_n \cos\theta_n = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\sin\theta_0^{\mathrm{ML}}}{\cos\theta_0^{\mathrm{ML}}} = \frac{\sum_n \sin\theta_n}{\sum_n \cos\theta_n}$$

$$\therefore \theta_0^{\mathrm{ML}} = \tan^{-1}\left\{\frac{\sum_n \sin\theta_n}{\sum_n \cos\theta_n}\right\}$$

2.54（基本）

フォン・ミーゼス分布 (2.179) の 1 階と 2 階の導関数を求め，さらに $m > 0$ で $I_0(m) > 0$ であることを用いて，分布は $\theta = \theta_0$ で最大になり，$\theta = \theta_0 + \pi(\mathrm{mod} 2\pi)$ で最小になることを示せ．

$$(2.179) \text{ — } p(\theta|\theta_0, m) = \frac{1}{2\pi I_0(m)} \exp\{m \cos(\theta - \theta_0)\}$$

$$I_0(m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\{m \cos\theta\} \mathrm{d}\theta$$

簡単のため $p(\theta|\theta_0, m)$ を p と書く．また，$0 \leq \theta < 2\pi$ である．まず 1 階導関数を求める．

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta} &= \frac{1}{2\pi I_0(m)} e^{m\cos(\theta-\theta_0)} \cdot \{-m \sin(\theta - \theta_0)\} \\ &= -mp \sin(\theta - \theta_0) \end{aligned}$$

1 階導関数が 0 になる θ は，$p > 0$ より，$\theta = \theta_0, \theta_0 + \pi(\mathrm{mod} 2\pi)$ である．
※ $\mathrm{mod} 2\pi$ は，2π を超えたときのことを考えてつけてあるだけで本質には関わらない．
次に 2 階導関数を求める．

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}\theta^2} &= -m \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta} \sin(\theta - \theta_0) - mp \cos(\theta - \theta_0) \\ &= m^2 p \sin^2(\theta - \theta_0) - mp \cos(\theta - \theta_0) \end{aligned}$$

$\theta = \theta_0$ のとき，

$$\left. \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}\theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} = -mp < 0 \text{ (極大点)}$$

$\theta_0 + \pi(\mathrm{mod} 2\pi)$ のとき，

$$\left. \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}\theta^2} \right|_{\theta=\theta_0+\pi(\mathrm{mod} 2\pi)} = mp > 0 \text{ (極小点)}$$

であるので，フォン・ミーゼス分布は $\theta = \theta_0$ で最大になり，$\theta = \theta_0 + \pi(\mathrm{mod} 2\pi)$ で最小になる．