PRML 演習問題2.55

@americiumian

平成 24 年 10 月 29 日

2.55

(2.168) の結果を，(2.184) と三角関数の公式 (2.178) と共に用いて，フォン・ミーゼス分布の集中度の最尤推定解 m_{ML} が，$A(m_{ML}) = \bar{r}$ を満たすことを示せ．ただし，$\bar{r}$ は，図 2.17 のように，2 次元ユークリッド平面中の単位ベクトルによって表した観測値の平均の半径である．

(2.187) より，

$$A(m_{ML}) = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\cos\theta_n\right)\cos\theta_0^{ML} + \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\cos\theta_n\right)\sin\theta_0^{ML}$$

この式に，(2.168)

$$\bar{x_1} = \bar{r}\cos\bar{\theta} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\cos\theta_n,$$
$$\bar{x_2} = \bar{r}\sin\bar{\theta} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sin\theta_n,$$

を代入して，

$$\begin{aligned} A(m_{ML}) &= \bar{r}\cos\bar{\theta}\cos\theta_0^{ML} + \bar{r}\sin\bar{\theta}\sin\theta_0^{ML} \\ \Leftrightarrow A(m_{ML}) &= \bar{r}\cos\left(\bar{\theta} - \theta_0^{ML}\right) \end{aligned}$$

(2.169),(2.168) より，

$$\begin{aligned} A(m_{ML}) &= \bar{r}\cos\left(\arctan\left\{\frac{\sum_n \sin\theta_n}{\sum_n \cos\theta_n}\right\} - \arctan\left\{\frac{\sum_n \sin\theta_n}{\sum_n \cos\theta_n}\right\}\right) \\ &= \bar{r}\cos 0 \\ &= \bar{r} \end{aligned}$$