PRML 演習問題3.1

@americiumian

平成 24 年 11 月 3 日

3.1

tanh 関数とロジスティックシグモイド関数 (3.6) は次のように関係づけられることを示せ.

$$\tanh(a) = 2\sigma(2a) - 1 \tag{3.100}$$

さらに，次の形のロジスティックシグモイド関数の線形結合

$$y(x, \mathbf{w}) = w_0 + \sum_{j=1}^{M} w_j \sigma\left(\frac{x - \mu_j}{s}\right) \tag{3.101}$$

は次の形の tanh 関数の線形結合

$$y(x, \mathbf{u}) = u_0 + \sum_{j=1}^{M} u_j \tanh\left(\frac{x - \mu_j}{2s}\right) \tag{3.102}$$

と等価であることを示し，新しいパラメータ $\{u_0, \cdots, u_M\}$ ともとのパラメータ $\{w_0, \cdots, w_M\}$ を関係付ける式を求めよ.

3.1.1

$\tanh(a) = 2\sigma(2a) - 1$ を証明する.

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \frac{2}{1 + \exp(-2a)} - 1 \\
&= \frac{1 - \exp(-2a)}{1 + \exp(-2a)} \\
&= \frac{\exp(a) - \exp(-a)}{\exp(a) + \exp(-a)} \\
&= \tanh(a) \\
&= (\text{左辺})
\end{aligned}$$

より，$\tanh(a) = 2\sigma(2a) - 1$ が成立.

3.1.2

$$
\begin{aligned}
y(x,\mathbf{w}) &= w_0 + \sum_{j=1}^{M} w_j \sigma\left(\frac{x-\mu_j}{s}\right) \text{を} \\
y(x,\mathbf{u}) &= u_0 + \sum_{j=1}^{M} u_j \tanh\left(\frac{x-\mu_j}{2s}\right)
\end{aligned}
$$

と表した時の，$\{u_0, \cdots, u_M\}$ と $\{w_0, \cdots, w_M\}$ の関係式を求める．

$$
a_j = \frac{x-\mu_j}{2s}
$$

とおくと，

$$
y(x,\mathbf{w}) = w_0 + \sum_{j=1}^{M} w_j \sigma\left(2a_j\right)
$$

(3.100) より，$\sigma(2a) = \frac{1}{2}(\tanh(a)+1)$ なので，

$$
\begin{aligned}
y(x,\mathbf{w}) &= w_0 + \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{2} w_j (\tanh(a_j)+1) \\
&= w_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M} w_j + \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{2} w_j \tanh(a_j) \\
&= w_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M} w_j + \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{2} w_j \tanh\left(\frac{x-\mu_j}{2s}\right)
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
u_0 &= w_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M} w_j \\
u_j &= \frac{1}{2} w_j \qquad\qquad (1 \leq j \leq M)
\end{aligned}
$$