3.4.

(3.105) の x_i に ε_i を加える(これを $\tilde{y}$ とする)と、

$$\tilde{y}(x,w) = w_0 + \sum_{i=1}^{D} w_i(x_i+\varepsilon_i)$$

$$= y_0 + \sum_{i=1}^{D} w_i\varepsilon_i$$

この二乗和誤差関数 (3.106) は

$$\tilde{E}_D(w) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left\{\left(y_0 + \sum_{i=1}^{D} w_i\varepsilon_{ni}\right) - t_n\right\}^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left\{(y_0 - t_n) + \sum_{i=1}^{D} w_i\varepsilon_{ni}\right\}^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left\{\underbrace{(y_0-t_n)^2}_{E_D(w)} + \underbrace{2(y_0-t_n)\sum_{i=1}^{D} w_i\varepsilon_{ni}}_{①} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{D} w_i\varepsilon_{ni}\right)^2}_{②}\right\}$$

ノイズ分布に関する。

① の期待値は、y_0, t_n, w_i は ε_i に依存しないので

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N}(y_0-t_n)\sum_{i=1}^{D} w_i\varepsilon_{ni}\right] = \sum_{n=1}^{N}(y_0-t_n)\sum_{i=1}^{D} w_i\,\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0.$$

② の、ノイズ分布に関する期待値は　　　$\mathbb{E}[\varepsilon_i\varepsilon_j] = \delta_{ij}\sigma^2$ より.

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{D} w_i\varepsilon_{ni}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N}\left(w_1\varepsilon_{n1}w_1\varepsilon_{n1} + \cancel{w_1\varepsilon_{n1}w_2\varepsilon_{n2}} + \cdots + w_D\varepsilon_{nD}w_D\varepsilon_{nD}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{D}(w_i^2\varepsilon_i^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{D} w_i^2\,\mathbb{E}[\varepsilon_i^2]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{D} w_i^2\sigma^2 = \frac{N}{2}\sum_{i=1}^{D} w_i^2\sigma^2$$

よって、$\tilde{E}_D(w)$ の、ノイズ分布に関する期待値は、

$$\mathbb{E}\left[\tilde{E}_D(w)\right] = \mathbb{E}\left[E_D(w)\right] + 0 + \frac{N}{2}\sum_{i=1}^{D} w_i^2 \sigma^2$$

$$= E_D(w) + \frac{N\sigma^2}{2}\sum_{i=1}^{D} w_i^2$$

第1項が(3.106)、第2項が、$\lambda = N\sigma^2$ としたときの、

2次の正則化項(3.27),(3.29)と一致する。