演習3.5

@sa__i

平成24年11月12日

1　3.6

ガウス分布に従う複数の目標変数tをもつ次の形の線形基底関数モデルを考える。

$$p(t|W,\Sigma) = N(t|y(x,W),\Sigma))$$

ただし、

$$y(x,W) = W^T\phi(x)$$

である。入力基底ベクトル $\phi(x_n)(n=1..,N)$ とそれに対応する目標ベクトル t_n が訓練データ集合として与えられるとき、パラメータ行列Wの最尤推定解 W_{ML} のそれぞれの列が、等方性のノイズ分布に対応する解の(3.15)の形で与えられることを示せ。これは共分散行列 Σ にはよらないことに注意せよ。さらに、Σ の最尤推定解が

$$\Sigma = \frac{1}{N}\Sigma_{n=1}^{N}(t_n - W_{ML}^T\phi(x_n))(t_n - W_{ML}^T\phi(x_n))^T$$

で与えられることを示せ。

対数をとった尤度関数は以下のように書ける。

$$lnL(W,\Sigma) = -\frac{1}{N}ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\Sigma_{n=1}^{N}(t_n - W_{ML}^T\phi(x_n))(t_n - W_{ML}^T\phi(x_n))^T$$

Wに関して微分

$$0 = -\Sigma_{n=1}N(t_n - W_{ML}T)\phi(x_n))(t_n - W_{ML}T)\phi(x_n))^T$$

両辺に Σ をかけ、計画行列 Φ と訓練データ集合 T を用いて以下のように表すことができる。

$$\Phi^T\Phi W = \Phi^T T$$

(3.15)の式を得る。

$$W_{ML} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T t$$

Σ の最尤推定解は式(2.122)から問題文にあるように与えられることがわかる。