Question3.7

平方完成を用いて式 (3.49) から (3.51) の導出を行う．事後分布 $p(\mathbf{w}|\mathbf{t})$ は以下のように書き下すことができる

$$p(\mathbf{w}|\mathbf{t}) \propto \left(-\frac{1}{2}(\mathbf{w}-\mathbf{m}_0)^T \mathbf{S}_0^{-1}(\mathbf{w}-\mathbf{m}_0) - \sum_{n=1}^{N} \frac{\beta}{2}(t_n - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_n))^2 \right)$$

指数部分を取り出し 2 倍してから展開すると以下のように式変形できる

$$(\mathbf{w}-\mathbf{m}_0)^T \mathbf{S}_0^{-1}(\mathbf{w}-\mathbf{m}_0) + \sum_{n=1}^{N} \beta(t_n - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_n))^2$$

$$= \mathbf{w}^T \mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{w} + 2\mathbf{w}^T \mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{m}_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(\beta \mathbf{w}^T \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_n)(\mathbf{w}^T \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_n))^T - 2\beta \mathbf{w}^T \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_n) t_n \right) + \text{定数}$$

$$= \mathbf{w}^T \left(\mathbf{S}_0^{-1} + \sum_{n=1}^{N} \beta \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_n)\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_n)^T \right) \mathbf{w} - 2\mathbf{w}^T \left(\mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{m}_0 + \beta \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_n) t_n \right) + \text{定数}$$

式 (3.49) と上式について係数比較を行うことにより以下のように $\mathbf{m}_N$,$\mathbf{S}_N^{-1}$ が求められる

$$\mathbf{S}_N^{-1} = \mathbf{S}_0^{-1} - \sum_{n=1}^{N} \beta \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_n)\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_n)^T = \mathbf{S}_0^{-1} + \beta \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi}$$

$$\mathbf{m}_N = \mathbf{S}_N \left(\mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{m}_0 + \beta \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_n) t_n \right) = \mathbf{S}_N \left(\mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{m}_0 + \beta \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{t} \right)$$