

## Question 3.8

基本的には前問と同様にして平方完成を用いて計算を行う。N + 1 個目のデータ点が得られた際の事後分布は、

$$p(\mathbf{w}|t_N, \mathbf{x}_N, \mathbf{m}_N, \mathbf{S}_N) \propto \left( -\frac{1}{2}(\mathbf{w} - \mathbf{m}_N)^T \mathbf{S}_N^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{m}_N) - \frac{\beta}{2}(t_{N+1} - \mathbf{w}^T \phi(\mathbf{x}_{N+1}))^2 \right)$$

となる。ここで指数部分を取り出し 2 倍してから展開すると以下のように式変形できる

$$\begin{aligned} & (\mathbf{w} - \mathbf{m}_N)^T \mathbf{S}_N^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{m}_N) + \beta(t_{N+1} - \mathbf{w}^T \phi(\mathbf{x}_{N+1}))^2 \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{S}_N^{-1} \mathbf{w} + 2\mathbf{w}^T \mathbf{S}_N^{-1} \mathbf{m}_N + (\beta(\mathbf{w}^T \phi(\mathbf{x}_{N+1})))(\mathbf{w}^T \phi(\mathbf{x}_{N+1}))^T - 2\beta \mathbf{w}^T \phi(\mathbf{x}_{N+1}) t_{N+1} + \text{定数} \\ &= \mathbf{w}^T (\mathbf{S}_N^{-1} + \beta \phi(\mathbf{x}_{N+1}) \phi(\mathbf{x}_{N+1})^T) \mathbf{w} - 2\mathbf{w}^T (\mathbf{S}_N^{-1} \mathbf{m}_N + \beta \phi(\mathbf{x}_{N+1}) t_{N+1}) + \text{定数} \end{aligned}$$

$p(\mathbf{w}|\mathbf{t}) = \mathcal{N}(\mathbf{w}|\mathbf{m}_{N+1}, \mathbf{S}_{N+1})$  と上式について係数比較を行うことにより以下のように  $\mathbf{m}_{N+1}, \mathbf{S}_{N+1}^{-1}$  が求められる

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{N+1}^{-1} &= \mathbf{S}_N^{-1} + \beta \phi(\mathbf{x}_{N+1}) \phi(\mathbf{x}_{N+1})^T \\ \mathbf{m}_{N+1} &= \mathbf{S}_{N+1} (\mathbf{S}_N^{-1} \mathbf{m}_N + \beta \phi(\mathbf{x}_{N+1}) t_{N+1}) \end{aligned}$$