P1) $\vec{a} = k\sqrt{x}\,\hat{i}$, $v(t=0)=0$, $x(t=0)$

Sol: Tenemos $\vec{a}(x)$, la idea es obtener $\vec{x}(t)$ y luego $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dx} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = k\sqrt{x} \longrightarrow \dot{x}\,d\dot{x} = k\sqrt{x}\,dx$$

integrando

$$\int_{\dot{x}(t=0)=0}^{\dot{x}} \dot{x}\,d\dot{x} = k\int_{x(t=0)=0}^{x}\sqrt{x}\,dx \implies \frac{\dot{x}^2}{2} = k\frac{2}{3}x^{3/2} \quad /\sqrt{()}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{\frac{k}{3}}\,x^{3/4} \longrightarrow x^{-3/4}dx = 2\sqrt{\frac{k}{3}}\,dt$$

integrando de nuevo

$$\int_{x(t=0)=0}^{x} x^{-3/4}dx = \int_0^t 2\sqrt{\frac{k}{3}}\,dt \implies {}^{2}\cancel{4}\,x^{1/4} = \cancel{2}\sqrt{\frac{k}{3}}\,t \implies x = \left(\sqrt{\frac{k}{3}}\frac{t}{2}\right)^4$$

Entonces la posición en función del tiempo es:

$$\boxed{x(t) = \frac{k^2}{144}t^4}$$

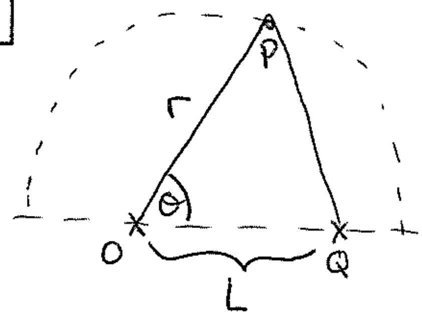
ahora la velocidad:

$$v = \frac{dx}{dt} \implies \boxed{v(t) = \left(\frac{1}{36}\right)k^2 t^3}$$

la aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} \implies \boxed{a(t) = \frac{1}{12}k^2 t^2}$$

P2)



Cuerda de largo 2L con O y Q fijos, mientras que P se desliza.

r, θ polares

Sol:

a) Se busca probar que: $r(\theta) = \frac{3L/2}{2-\cos\theta}$

Se resuelve solamente usando geometría. Definiendo $\rho = \overline{QP}$:

- $r + \rho = 2L$ (1) } largo de la cuerda
- $\rho^2 = r^2 + L^2 - 2rL\cos\theta$ (2) } teo. del coseno

$$(1) \rightarrow (2L - r)^2 = \underset{(2)}{\rho^2} = r^2 + L^2 - 2rL\cos\theta$$

$$4L^2 - 4Lr + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + L^2 - 2rL\cos\theta$$

$$3L^{\cancel{2}} = 2r\cancel{L}(2-\cos\theta) \Rightarrow \boxed{r(\theta) = \frac{3L/2}{2-\cos\theta}}$$

b) P se mueve con rapidez v_0 cte., se busca $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$ para $\theta = \pi/2$.

Como son coordenadas polares:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \rightarrow \|\vec{v}\| = v_0 = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} \quad (3)$$

buscaremos $\dot{r}$:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}}\frac{dr}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} \longrightarrow \underbrace{\frac{dr}{d\theta} = \frac{-3L/2}{(2-\cos\theta)^2}\operatorname{sen}\theta}_{\text{resultado a)}}$$

evaluando en $\theta = \pi/2$:

$$* \ \dot{r}\big|_{\pi/2} = \dot{\theta}\big|_{\pi/2} \cdot \frac{-3L/2}{(2-\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{0})^2}\underbrace{\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2}}_{1} = -\frac{3L}{8}\dot{\theta}\big|_{\pi/2} \quad (4) \qquad * \ r\big|_{\pi/2} = \frac{3L/2}{2-\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{0}} = \frac{3L}{4} \quad (5)$$

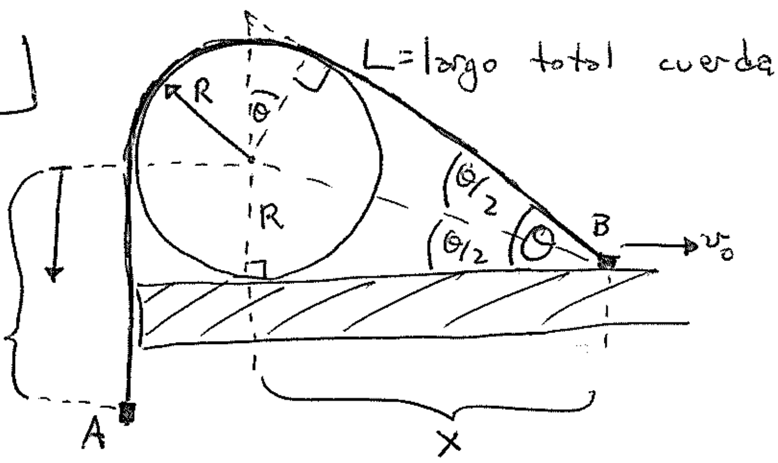
remplazando en (3):

$$v_0 = \sqrt{\dot{r}^2\big|_{\pi/2} + r^2\big|_{\pi/2}\dot{\theta}^2\big|_{\pi/2}} \underset{(4) \text{ y } (5)}{=} \dot{\theta}\big|_{\pi/2}\sqrt{\frac{9L^2}{64} + \frac{9L^2}{16}} = \dot{\theta}\big|_{\pi/2} L\sqrt{\frac{45}{64}} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}\big|_{\pi/2} = \frac{v_0}{L}\frac{8}{\sqrt{45}}}$$

Finalmente remplazando en la ec. (4):

$$\dot{r}\Big|_{\pi/2} = \frac{-3\cancel{k}}{\cancel{8}} \cdot \frac{v_0}{\cancel{k}} \frac{8}{\sqrt{45}} \Rightarrow \boxed{\dot{r}\Big|_{\pi/2} = \frac{-v_0}{\sqrt{5}}}$$

P3)



Sol: a) Encontrar $\dot{\theta}$ en $\theta = \pi/3$:

$- \; x(t) = R + v_0 t$

$- \; tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{R}{x} = \frac{R}{R+v_0 t} \xrightarrow[\theta=\pi/3]{} tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{R}{R+t^* v_0}$ (1)

entonces el instante t^* en que $\theta = \pi/3$ es:

$$R + v_0 t^* = R\sqrt{3} \Rightarrow t^* = \frac{R(\sqrt{3}-1)}{v_0} \qquad (2)$$

Para obtener $\dot{\theta}$ derivamos $tg(\theta/2)$:

$$\underbrace{tg'\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\dot{\theta}}{2}}_{\text{lado izq. (1)}} = \underbrace{\frac{-Rv_0}{(R+v_0 t)^2}}_{\text{lado derecho (1)}}$$

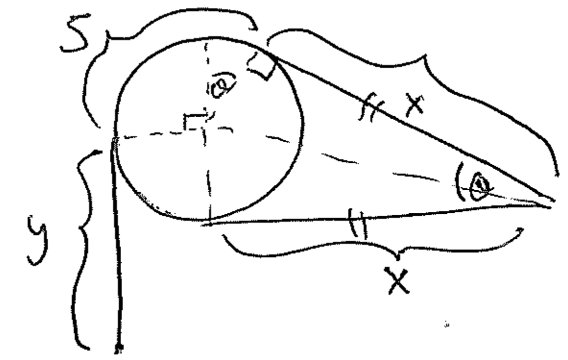
despejando: $\dot{\theta} = \frac{-2Rv_0}{(R+v_0 t)^2}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (3)

evaluando en $\theta = \pi/3$:

$$\dot{\theta}\Big|_{\frac{\pi}{3}} = \frac{-2Rv_0}{(R+v_0 t^*)^2}\underbrace{\cos^2(\pi/6)}_{(\sqrt{3}/2)^2} \underset{(2)}{=} \frac{-Rv_0}{\left(R + \cancel{v_0}\frac{R(\sqrt{3}-1)}{\cancel{v_0}}\right)^2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{-\cancel{R}v_0}{R^{\cancel{2}}\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}\Big|_{\frac{\pi}{3}} = \frac{-v_0}{2R}}$$

por el menos se ve que el ángulo θ se va achicando, lo que esta bien porque B se va alejando.

b) Rapidez del bloque A en ese instante:



$L = y + S + x$ } largo cuerda

El arco S: $S = R(\frac{\pi}{2}+\theta) \rightarrow L = y + R(\frac{\pi}{2}+\theta)+x \quad / \frac{d}{dt}()$

$$0 = \dot{y} + R\dot{\theta} + \underbrace{\dot{x}}_{v_0}$$

$\rightarrow \dot{y} = -R\dot{\theta} - v_0$

evaluando en $\theta = \pi/3$;

$$\dot{y}\Big|_{\pi/3} = -R\underbrace{\dot{\theta}\Big|_{\pi/3}}_{-\frac{v_0}{2R}} - v_0 = -R\cdot\frac{-v_0}{2R} - v_0 \Rightarrow \boxed{\dot{y}\Big|_{\pi/3} = \frac{-v_0}{2}}$$

} es menos porque el bloque va subiendo

c) De la expresión para $\dot{\theta}$:

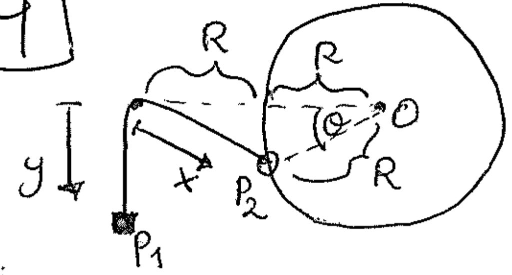
$$(3) \rightarrow \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{-2Rv_0}{(R+v_0t)^2}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\int_{\pi/2}^{\theta} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = -2Rv_0\int_0^t \frac{dt}{(R+v_0t)^2}$$

resolviendo ambas integrales y despejando θ se puede obtener θ(t) y derivando $\dot{\theta}(t)$.

P4

La cuerda tiene largo L



Sol:

a) Si P_2 tiene $\dot{\theta} = \omega_0$ constante, determinar rapidez máxima de P_1:

Teo. del coseno $\rightarrow x^2 = 4R^2 + R^2 - 4R^2\cos\theta = 5R^2 - 4R^2\cos\theta$

$\Rightarrow x = R\sqrt{5 - 4\cos\theta}$

notar que x crece en la misma direcc. que θ, hay que tener cuidado al definir dirección

derivando: $\dot{x} = \dfrac{\frac{1}{2}R}{\sqrt{5-4\cos\theta}} \cdot \overset{2}{\cancel{4}}\,\mathrm{sen}(\theta)\overset{\omega_0}{\dot{\theta}} = \dfrac{2R\omega_0 \,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}} = \dfrac{R\omega_0 \,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{5/4 - \cos\theta}}$

además $\dot{x} = -\dot{y}$, entonces:

$$\dot{y} = \frac{-R\omega_0 \,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{5/4-\cos\theta}} < 0 \qquad (1)$$

pues $0<\theta<\pi$

Para encontrar el máximo derivamos $\dot{y}$ e igualamos a cero:

$$(1) \rightarrow \ddot{y} = \frac{-R\omega_0\cos\theta\,\omega_0}{\sqrt{5/4-\cos\theta}} + \frac{1}{2}\frac{R\omega_0\,\mathrm{sen}\,\theta}{(5/4-\cos\theta)^{3/4}}\mathrm{sen}\,\theta\,\omega_0 = R\omega_0^2\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{(5/4-\cos\theta)^{3/4}} - \frac{\cos\theta}{(5/4-\cos\theta)^{1/2}}\right]$$

$$= R\omega_0^2\left[\frac{\frac{1}{2}\mathrm{sen}^2\theta - \frac{5}{4}\cos\theta + \cos^2\theta}{(5/4-\cos\theta)^{3/2}}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta - \frac{5}{4}\cos\theta = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{sen}^2\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta}_{1/2} + \frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{5}{4}\cos\theta = 0$$

$$\frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{5}{2\cdot 4}\cos\theta + \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2\theta - \frac{5}{2}\cos\theta + 1 = 0 \qquad (2)$$

que es una ecuación de segundo grado, llamando $u = \cos\theta$:

$$(2) \rightarrow u^2 - \frac{5}{2}u + 1 = 0 \Rightarrow u_\pm = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

las soluciones son:

* $u_+ = \cos\theta_+ = 2$ ✗ — $-1 < \cos\theta < 1$ (no es solución)

* $u_- = \cos\theta_- = \frac{1}{2}$ ✓

entonces: $\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \pi/3$

remplazando en (1):

$$|\dot{y}_{max}| = \frac{R\omega_0 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\frac{\pi}{3}}} = \frac{R\omega_0 \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \Rightarrow \boxed{|\dot{y}_{max}| = R\omega_0}$$

b) Si ahora P_1 se aleja con rapidez v_0, se busca la velocidad de P_2 cuando $\theta = \pi/3$

Teníamos que:

$$\dot{x} = \underbrace{\frac{R\operatorname{sen}(\theta)\,\dot{\theta}}{\sqrt{5/4 - \cos\theta}}}_{\text{ahora } \dot{\theta} \text{ no es constante}} = \underbrace{-v_0}_{\text{se está alejando}} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{-v_0}{R}\frac{\sqrt{5/4 - \cos\theta}}{\operatorname{sen}\theta}$$

entonces la velocidad de P_2:

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\hat{\theta} = -v_0\frac{\sqrt{5/4 - \cos\theta}}{\operatorname{sen}\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}\Big|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = -v_0\,\hat{\theta}}$$