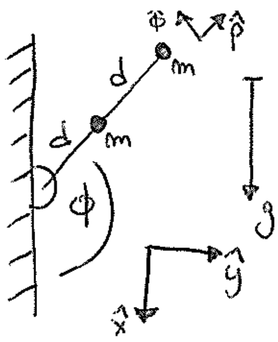
P1 

Inicialmete la barra está vertical con las masas arriba y es soltada: $\phi(t=0)=\pi$

$\dot{\phi}(t=0)=0$

a) Velocidad angular sistema:

<u>Sol</u>: • Estudiaremos la evolución del centro de masa:

$$\vec{R}_G = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{2\cancel{m}}(\cancel{m}\cdot d\hat{\rho} + \cancel{m}\cdot 2d\hat{\rho}) \Rightarrow \vec{R}_G = \frac{3d}{2}\hat{\rho}$$

posición centro de masa

} al medio de las dos masas (lo lógico)

La velocidad del centro de masa en polares:

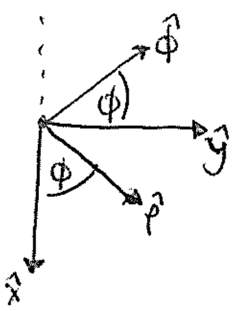
$$\vec{v}_G = \underbrace{\cancel{\dot{\rho}_G}}_{0}\hat{\rho} + \rho_G\dot{\phi}\hat{\phi} \Rightarrow \vec{v}_G = \frac{3d}{2}\dot{\phi}\hat{\phi}$$

(centro de masa fijo en la barra)

y la aceleración:

$$\vec{a}_G = (\underbrace{\cancel{\ddot{\rho}_G}}_{0} - \rho_G\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\underbrace{\cancel{\dot{\rho}_G}}_{0}\dot{\phi} + \rho_G\ddot{\phi})\hat{\phi} \Rightarrow \vec{a}_G = \frac{3d}{2}(-\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \ddot{\phi}\hat{\phi}) \qquad (1)$$

• Ahora veremos las fuerzas que actúan en el sistema:

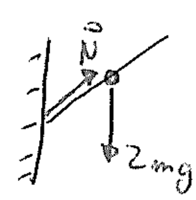


} $\hat{x} = \cos\phi\,\hat{\rho} - \operatorname{sen}\phi\,\hat{\phi}$

– El peso: $\underbrace{2m\vec{g}}_{\text{son dos masas}} = 2mg\hat{x} = 2mg(\cos\phi\,\hat{\rho} - \operatorname{sen}\phi\,\hat{\phi}) \qquad (2)$

– Normal: $\vec{N} = N\hat{\rho}$

No hay roce



• Ecs. Newton:

$$\hat{\rho}: 2m\,a_{G,\hat{\rho}} \overset{(1)}{=} 2m\cdot\frac{3d}{2}(-\dot{\phi}^2) \overset{(2)}{=} 2mg\cos\phi + N \Rightarrow -\frac{3}{2}dM\dot{\phi}^2 = Mg\cos\phi + N \qquad (3)$$

con $M = 2m$

$$\hat{\phi}: M\,a_{G,\hat{\phi}} = M\cdot\frac{3d}{2}\ddot{\phi} = -Mg\operatorname{sen}\phi \qquad (4)$$

• Ahora sacamos $\dot{\phi}$ usando (4):

$$\ddot{\phi} = -\frac{2}{3}\frac{g}{d}\,\text{sen}\,\phi \qquad /\cdot\dot{\phi}$$

$$\underbrace{\dot{\phi}\ddot{\phi}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\phi}^2)} = -\frac{2}{3}\frac{g}{d}\underbrace{\dot{\phi}\,\text{sen}\,\phi}_{-\frac{d}{dt}\cos\phi} \Rightarrow \frac{d\dot{\phi}^2}{dt} = \frac{4}{3}\frac{g}{d}\frac{d\cos\phi}{dt}$$

integramos lo ultimo:

$$\int_0^t \frac{d\dot{\phi}^2}{dt}dt = \frac{4}{3}\frac{g}{d}\int_0^t \frac{d\cos\phi}{dt}dt \underset{\substack{\text{Teo.}\\ \text{fundamental}\\ \text{del calculo}}}{\Rightarrow} \dot{\phi}^2 - \cancel{\dot{\phi}_0^2}^{\,0} = \frac{4}{3}\frac{g}{d}\Big(\cos\phi - \underbrace{\cos(\overset{\pi}{\phi_0})}_{-1}\Big)$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}^2 = \frac{4}{3}\frac{g}{d}(\cos\phi + 1)$$

finalmente:

$$\boxed{\dot{\phi} = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{g}{d}(\cos\phi + 1)}}$$

b) Calcular N cuando $\theta = \pi/2$:

<u>Sol</u>: Usando (3) se despeja N.

$$-N = Mg\cos\phi + \frac{3}{2}dM\dot{\phi}^2 \underset{\uparrow\,(a)}{=} Mg\cos\phi + \frac{3}{\cancel{2}}\cancel{d}M\cdot\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{3}}\frac{g}{\cancel{d}}(\cos\phi+1) = 3Mg\cos\phi + 2Mg$$

evaluando en $\phi = \pi/2$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{N_{\pi/2} = -2Mg}$$

es menos porque la rótula "sujeta" la barra.

P2) Partícula de carga m y cargo q bajo la influencia de la gravedad ($\vec{g}=-g\hat{k}$) y un campo magnético uniforme $\vec{B}=B_0\hat{x}$

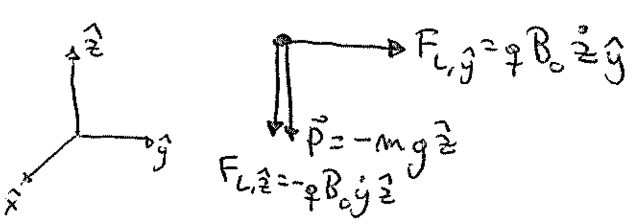
$\vec{v}(t=0)=\vec{0}$, $\vec{r}(t=0)=\vec{0}$

a) Encontrar ecs. de movimiento:

<u>Sol</u>: Usando la fuerza de Lorentz, $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$:

$$\vec{F}_L=q(\underbrace{\cancel{\vec{E}}}_{\text{no hay }\vec{E}}^{0}+(\dot{x}\hat{x}+\dot{y}\hat{y}+\dot{z}\hat{z})\times B_0\hat{x})=q(-\dot{y}\hat{z}+\dot{z}\hat{y})B_0 \quad \left\{\begin{array}{l} F_{L,\hat{y}}=qB_0\dot{z} \\ F_{L,\hat{z}}=-qB_0\dot{y}\end{array}\right.$$

<u>D.C.L</u>:



Lo fuerza total sobre la partícula es

$$\vec{F}=qB_0\dot{z}\hat{y}-qB_0\dot{y}\hat{z}-mg\hat{z}$$

entonces las ecs. de movimiento son: $m\vec{a}=\vec{F}$

$$\boxed{\begin{array}{l} m\ddot{x}=0 \\ m\ddot{y}=qB_0\dot{z} \\ m\ddot{z}=-qB_0\dot{y}-mg\end{array}} \quad \begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

b) Encontrar trayectoria y velocidad de la partícula:

<u>Sol</u>: De inmediato de (1),

$$m\ddot{x}=0 \longrightarrow \ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dt}= \text{[redacted]} =0 \Rightarrow \boxed{\dot{x}=\dot{x}(t=0)=0} \Rightarrow \boxed{x=x(t=0)=0}$$

No hay movimiento en el eje $\hat{x}$.

Para obtener el movimiento en $\hat{y}$ y en $\hat{z}$ hay dos formas.

<u>1ra forma:</u> (2)+i(3):

$$m(\ddot{y}+i\ddot{z})=qB_0(\dot{z}-i\dot{y})-img$$

$$\underbrace{m(\ddot{y}+i\ddot{z})}_{\frac{d}{dt}(\dot{y}+i\dot{z})}+qB_0\underbrace{(i\dot{y}-\dot{z})}_{i(\dot{y}+i\dot{z})}=-img \longrightarrow$$

Se llega a (dividiendo por m

$$\frac{d}{dt}(\dot{y}+i\dot{z})+\frac{iqB_0}{m}(\dot{y}+i\dot{z})=-ig$$

definiendo $f=\dot{y}+i\dot{z}$, la ecuación anterior queda como:

$$\frac{d}{dt}f+\frac{iqB_0}{m}f=-ig$$

$$\frac{d}{dt}f+i\omega f=-ig \qquad \text{con} \qquad \omega=\frac{qB_0}{m}$$

* Sol. homogénea: $\frac{df_H}{dt}+i\omega f_H=0 \rightarrow \int\frac{df_H}{f_H}=-i\omega\int dt \Rightarrow \ln f_H=-i\omega t+\underbrace{C}_{\text{constan. integra}}$

Aplicando exponencial a lo anterior:

$$\exp(\ln f_H)=f_H=e^{-i\omega t+C}=Ke^{-i\omega t} \qquad \text{con } K=e^C \text{ y constante}$$

* Sol. particular: $\frac{d}{dt}f_p+i\omega f_p=ig$

Uso un f_p constante: $\rightarrow \underbrace{\cancel{\frac{d}{dt}f_p}}_{\substack{0\\(cte)}}+i\omega f_p=-ig \Rightarrow f_p=\frac{-g}{\omega}$

Entonces la solución completa:

$$f=f_H+f_p=Ke^{-i\omega t}-\frac{g}{\omega}=K\cos(\omega t)-iK\,\text{sen}(\omega t)-\frac{g}{\omega}$$

como $f=\dot{y}+i\dot{z}$, $\dot{y}$ corresponde a la parte real de f y $\dot{z}$ a la imaginaria:

$$\dot{y}=K\cos(\omega t)-\frac{g}{\omega} \qquad , \quad \dot{z}=-K\,\text{sen}(\omega t)$$

para despejar K uso la condición inicial:

$$\dot{y}(t=0)=0=K\underbrace{\cos(0)}_{1}-\frac{g}{\omega}=K-\frac{g}{\omega} \Rightarrow K=\frac{g}{\omega}$$

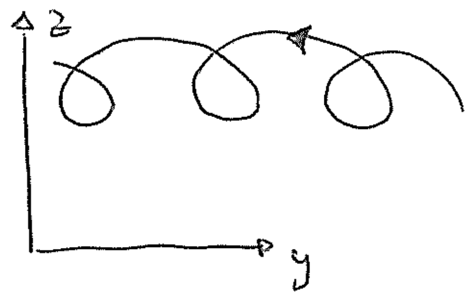
Entonces:

$$\boxed{\dot{y}=\frac{g}{\omega}\cos(\omega t)-\frac{g}{\omega}} \qquad \boxed{\dot{z}=-\frac{g}{\omega}\text{sen}(\omega t)}$$

Y finalmente la trayectoria se saca integrando:

$$\int_0^y dy=\frac{g}{\omega}\int_0^t(\cos(\omega t)-1)\,dt \Rightarrow \boxed{y=\frac{g}{\omega}\left(\frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega}-t\right)}$$

$$\int_0^z dz = \frac{-g}{\omega}\int_0^t \operatorname{sen}(\omega t)\,dt \Rightarrow \boxed{z = \frac{g}{\omega^2}\cos(\omega t)}$$



2^da^ Forma: De (2), $m\ddot{y} = qB_0\dot{z} \quad / \frac{d}{dt}()$

$$m\dddot{y} = qB_0\ddot{z} \Rightarrow \ddot{z} = \frac{m\dddot{y}}{qB_0}$$

remplazando $\ddot{z}$ en (3):

$$m\frac{m\dddot{y}}{qB_0} = -qB_0\dot{y} - mg$$

$$\rightarrow \dddot{y} + \frac{q^2B_0^2}{m^2}\dot{y} = -\frac{g}{m}qB_0$$

definiendo $\varphi = \dot{y}$ y $\omega = \frac{qB_0}{m}$, la ec. anterior queda:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = -\frac{g}{m}qB_0$$

que es la ec. de un resorte (o un péndulo a pequeñas oscilaciones)!!!

La solución es conocida:

$$\dot{y} = \varphi = A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t) - \frac{g}{\omega^2 m}qB_0$$

usando condición inicial:

$$\dot{y}(t=0) = 0 = A - \frac{g}{\omega^2 m}qB_0 \Rightarrow A = \frac{g}{\omega} \quad (*)$$

para sacar la constante B necesitamos la condición de $y(t=0)$, por lo tanto integramos $\dot{y}$:

$$\int_0^y dy = \frac{g}{\omega}\int_0^t (\cos(\omega t))\,dt + B\int_0^t \operatorname{sen}(\omega t)\,dt - \frac{g}{\omega}\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow y = +\frac{g}{\omega^2}\operatorname{sen}(\omega t) - \frac{B}{\omega}\cos(\omega t) - \frac{g}{\omega}t$$

imponiendo condición inicial:

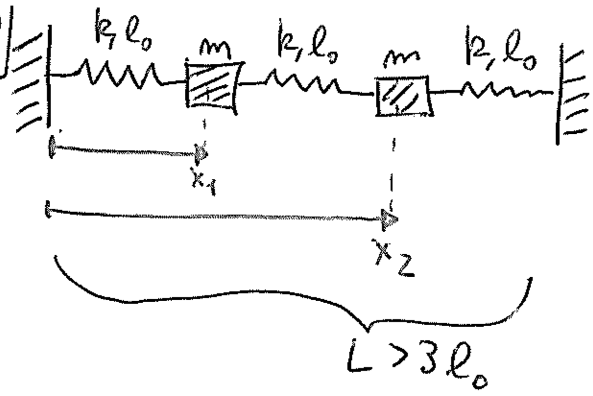
$$y(t=0) = 0 = \frac{g}{\omega^2}\underbrace{\cancel{\operatorname{sen}}(0)}_{0} - \frac{B}{\omega}\underbrace{\cancel{\cos}(0)}_{1} - 0 \implies B = 0 \quad (**)$$

remplazando A y B:

$$\boxed{\dot{y} = \frac{g}{\omega}\cos(\omega t) - \frac{g}{\omega}} \qquad \boxed{y = \frac{g}{\omega}\left(\frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega} - t\right)}$$

misma solución. z y $\dot{z}$ se puede sacar remplazando en (2) o (3).

P3



Inicialmente $x_1(t=0) = \ell_0$

$x_2(t=0) = 2\ell_0$

$\dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0$

a) Encontrar ecs. de movimiento:

Sol: • D.C.L:

1) $-k(x_1-\ell_0)\hat{x}$ $\quad k(x_2-x_1-\ell_0)\hat{x}$

2) $-k(x_2-x_1-\ell_0)\hat{x}$ $\quad k(L-x_2-\ell_0)\hat{x}$

• Newton:

1: $m\ddot{x}_1 = k(x_2-x_1-\cancel{\ell_0}) - k(x_1-\cancel{\ell_0}) \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_1 = -\frac{2k}{m}x_1 + \frac{k}{m}x_2}$ (1)

2: $m\ddot{x}_2 = k(L-x_2-\cancel{\ell_0}) - k(x_2-x_1-\cancel{\ell_0}) \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_2 = -\frac{2k}{m}x_2 + \frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}L}$ (2)

b) Resolver:

Sol: • Sumamos (1)+(2): $\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{2k}{m}(x_1+x_2) + \frac{k}{m}(x_1+x_2) + \frac{k}{m}L$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2) + \frac{k}{m}(x_1+x_2) = \frac{k}{m}L$$

definiendo $z_1 = x_1 + x_2$ y $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$\ddot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 = \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_1^2}L = \omega_1^2 L$$

que es la ecuación para un resorte "normal". La solución es conocida:

$$z_1 = A\cos(\omega_1 t) + B\,\text{sen}(\omega_1 t) + L$$

$$x_1 + x_2 = A\cos(\omega_1 t) + B\,\text{sen}(\omega_1 t) + L \Rightarrow \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -A\omega_1\text{sen}(\omega_1 t) + B\omega_1\cos(\omega_1 t)$$

Sacamos las ctes. imponiendo condiciones iniciales:

$\underbrace{x_1(t=0)}_{\ell_0} + \underbrace{x_2(t=0)}_{2\ell_0} = 3\ell_0 = A + L \Rightarrow A = 3\ell_0 - L$ $\qquad \underbrace{\dot{x}_1(t=0)}_{0} + \underbrace{\dot{x}_2(t=0)}_{0} = B\omega_1 = 0 \Rightarrow B = 0$

entonces: $x_1 + x_2 = (3\ell_0 - L)\cos(\omega_1 t) + L$ (3)

• Restamos (1) − (2):

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\frac{2k}{m}(x_1 - x_2) - \frac{k}{m}(x_1 - x_2) - \frac{k}{m}L$$

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -3\frac{k}{m}(x_1 - x_2) - \frac{k}{m}L$$

definiendo $z_2 = x_1 - x_2$ y $\omega_2 = \sqrt{3\frac{k}{m}}$:

$$\ddot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 = -\underbrace{\frac{k}{m}}_{\frac{1}{3}\omega_2^2}L = -\frac{\omega_2^2}{3}L$$

de forma análoga:

$$z_2 = C\cos(\omega_2 t) + D\,\mathrm{sen}(\omega_2 t) - \frac{L}{3} = x_1 - x_2 \rightarrow \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = -C\omega_2\,\mathrm{sen}(\omega_2 t) + D\omega_2\cos(\omega_2 t)$$

Imponiendo condiciones iniciales:

$$\underbrace{x_1(t=0)}_{l_0} - \underbrace{x_2(t=0)}_{2l_0} = -l_0 = C - \frac{L}{3} \Rightarrow C = \frac{L}{3} - l_0$$

$$\underbrace{\dot{x}_1(t=0)}_{0} - \underbrace{\dot{x}_2(t=0)}_{0} = 0 = D\omega_2 \Rightarrow D = 0$$

Entonces: $x_1 - x_2 = \left(\frac{L}{3} - l_0\right)\cos(\omega_2 t) - \frac{L}{3}$ (4)

Finalmente:

* (3) + (4): $2x_1 = (3l_0 - L)\cos(\omega_1 t) + L + \left(\frac{L}{3} - l_0\right)\cos(\omega_2 t) - \frac{L}{3}$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{3l_0 - L}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{\frac{L}{3} - l_0}{2}\cos(\omega_2 t) + \frac{2L}{3}}$$

* (3) − (4): $2x_2 = +(3l_0 - L)\cos(\omega_1 t) + L - \left(\frac{L}{3} - l_0\right)\cos(\omega_2 t) + \frac{L}{3}$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{3l_0 - L}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{l_0 - \frac{L}{3}}{2}\cos(\omega_2 t) + \frac{4L}{3}}$$