P1) Partícula de masa m es lanzada hacia arriba con rapidez v_0. Es afectada por la gravedad y el roce viscoso $\vec{f} = -\gamma \vec{v}$

a) Tiempo en que llega al punto más alto:

Sol: C.I: $y(t=0)=0 \qquad \dot{y}(t=0)=v_0$

Newton: $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -mg - \gamma\dot{y} = m\ddot{y} = m\frac{d\dot{y}}{dt} \rightarrow -dt = \frac{d\dot{y}\, m}{mg+\gamma\dot{y}}$

integrando:
$$-\int_0^t dt = m\int_0^{\dot{y}} \frac{d\dot{y}}{mg+\gamma\dot{y}} = m\,\ln(mg+\gamma\dot{y})\Big|_{v_0}^{\dot{y}}\frac{1}{\gamma}$$

$$\Rightarrow t = \frac{m}{\gamma}\ln\left(\frac{mg+\gamma v_0}{mg+\gamma\dot{y}}\right) \qquad (*)$$

y el tiempo t^* en que $\dot{y}=0$ (el punto más alto):

$$\Rightarrow \boxed{t^* = \frac{m}{\gamma}\ln\left(\frac{mg+\gamma v_0}{mg}\right)}$$

b) Altura máxima:

Sol: Despejamos $\dot{y}$ de $(*)$:

$$t\frac{\gamma}{m} = \ln\left(\frac{mg+\gamma v_0}{mg+\gamma\dot{y}}\right) \quad /\exp()$$

$$e^{t\frac{\gamma}{m}} = \frac{mg+\gamma v_0}{mg+\gamma\dot{y}} \Rightarrow \gamma\underbrace{\dot{y}}_{dy/dt} = e^{-t\frac{\gamma}{m}}(mg+\gamma v_0) - mg$$

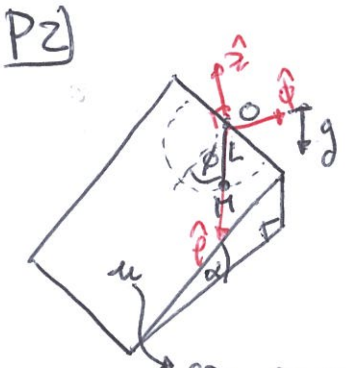
integramos:
$$\gamma\int_0^y dy = (mg+\gamma v_0)\int_0^t e^{-t\frac{\gamma}{m}}dt - mg\int_0^t dt$$

$$\gamma y = (mg+\gamma v_0)\cdot -\frac{m}{\gamma}\left(e^{-t\frac{\gamma}{m}} - 1\right) - mgt$$

El punto más alto es cuando $t = t^*$:

$$\Rightarrow \boxed{y_{max} = \frac{1}{\gamma}\left[(mg+\gamma v_0)\cdot\frac{m}{\gamma}\left(1 - \left(\frac{mg+\gamma v_0}{mg}\right)^{-1}\right) - mg\frac{m}{\gamma}\ln\left(\frac{mg+\gamma v_0}{mg}\right)\right]}$$

P2)



Usar cilíndricas

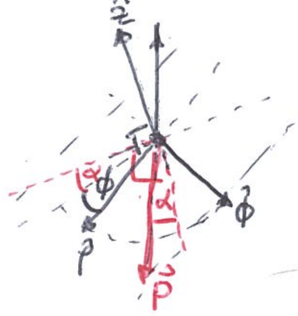
Plano inclinado con roce

con roce [redacted]

a) Encontrar fuerzas:

Sol. • Tensión: $\vec{T} = -T\hat{\rho}$ • Roce: $\vec{F}_R = \mu N \hat{\phi}$ ← + porque tiende a moverse en -

• Normal: $\vec{N} = N\hat{z}$ • Peso: $\vec{P} = mg(\operatorname{sen}\alpha\cos\phi\,\hat{\rho} - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\phi\,\hat{\phi} - \cos\alpha\,\hat{z})$



La fuerza total:

$$\boxed{\vec{F} = (mg\operatorname{sen}\alpha\cos\phi - T)\hat{\rho} + (\mu N - mg\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\phi)\hat{\phi} + (N - mg\cos\alpha)\hat{z}}$$

b) Se suelta del reposo en $\phi = \pi/2$, encontrar μ tal que llegue con velocidad nula a $\phi = 0$:

Sol: Como $\rho = L$ y $z = 0$ $\Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = \dot{z} = \ddot{z} = 0$

La aceleración es: $\vec{a} = -L\dot{\phi}^2\hat{\rho} + L\ddot{\phi}\hat{\phi}$

Newton:

$\hat{\rho}$: $-L\dot{\phi}^2 = mg\operatorname{sen}\alpha\cos\phi - T$ (1)

$\hat{\phi}$: $L\ddot{\phi} = \mu N - mg\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\phi$ (2)

$\hat{z}$: $0 = N - mg\cos\alpha \Rightarrow N = mg\cos\alpha$

$(2)\cdot\dot{\phi}$:

$$L\underbrace{\dot{\phi}\ddot{\phi}}_{} = \mu N\dot{\phi} - mg\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\phi\,\dot{\phi}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\dot{\phi}^2}{dt} = \mu N\frac{d\phi}{dt} + mg\operatorname{sen}\alpha\frac{d}{dt}\cos\phi$$

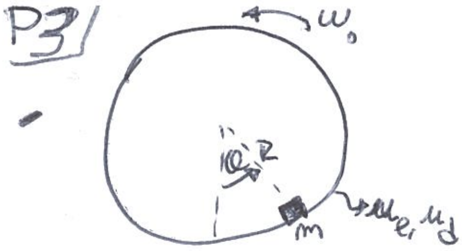
integrando entre $t=0$ y t:

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = \mu N\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + mg\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\phi$$

Imponiendo $\dot{\phi} = 0$ y $\phi = 0$:

$$0 = -\mu N\frac{\pi}{2} + mg\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \mu mg\cos\alpha\frac{\pi}{2} = mg\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\alpha}$$

P3/



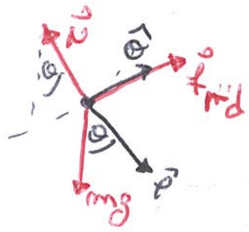
Bloque se encuentra en un tambor que gira con velocidad angular ω_0 constante.

μ_e: roce estático

μ_d: roce dinámico

a) Valor de μ_d si bloque se encuentra en $\theta = \theta_0$ cte.

Sol: D.C.L.:



$$\vec{F} = mg\cos\theta\,\hat{\rho} - mg\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\theta} - N\hat{\rho} + f_{rd}\hat{\theta}$$

Newton: $\vec{F} = m\vec{a} = 0$ } para que se quede quieto el blo

$\hat{\rho}$: $mg\cos\theta - N = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta \Rightarrow f_{rd} = \mu_d N = \mu_d mg\cos\theta$

$\hat{\theta}$: $-mg\,\text{sen}\,\theta + \mu_d mg\cos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\mu_d = tg\,\theta}$

b) Condición de ω_0 y μ_e para que el bloque no se despegue en una vuelta completa.

Sol: El D.C.L. es igual cambiando $\vec{f}_{rd}$ por $\vec{f}_{re}$:

$$\vec{F} = mg\cos\theta\,\hat{\rho} - mg\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\theta} - N\hat{\rho} + f_{re}\hat{\theta}$$

La aceleración: $\vec{a} = (\underbrace{\cancel{\ddot{\rho}}}_{0} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (\underbrace{2\cancel{\dot{\rho}}\dot{\theta}}_{0} + \underbrace{\rho\cancel{\ddot{\theta}}}_{0})\hat{\theta} =$

$= -R\omega_0^2\hat{\rho}$

$\rho = R \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$

$\dot{\theta} = \omega_0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$: $\hat{\rho}$: $mg\cos\theta - N = -R\omega_0^2 m \Rightarrow N = mg\cos\theta + R\omega_0^2 m \to f_{re} \leq \mu_e N$

$\hat{\theta}$: [redacted] $-mg\,\text{sen}\,\theta + f_{re} = 0$

Para que el bloque no se despegue:

$N > 0 \Rightarrow R\omega_0^2 > -g\cos\theta \Rightarrow \boxed{\omega_0 > \sqrt{\frac{g}{R}}}$ } el valor máximo de $-g\cos\theta$ es g cuando $\theta = \pi$.

Sabemos que el roce estático cumple que:

$f_{re} \leq \mu_e N \Rightarrow \cancel{m}g\,\text{sen}\,\theta \leq \mu_e \cancel{m}(g\cos\theta + R\omega_0^2)$

Hay que ver con qué valor de μ_e se cumple para todo ángulo.

$\rightarrow \mu_e \geq \frac{g\,\text{sen}\,\theta}{g\cos\theta + R\omega_0^2} = f(\theta)$

derivamos $f(\theta)$ para ver su máximo:

$$\frac{df}{d\theta}=\frac{g\cos\theta}{g\cos\theta+R\omega_0^2}+\frac{g^2\operatorname{sen}^2\theta}{(g\cos\theta+R\omega_0^2)^2}=0 \implies \cos\theta+\frac{g\operatorname{sen}^2\theta}{g\cos\theta+R\omega_0^2}=0$$

$$\rightarrow \underbrace{g\cos^2\theta+g\operatorname{sen}^2\theta}_{g}+R\omega_0^2\cos\theta=0 \iff \cos\theta^*=\frac{-g}{R\omega_0^2} \implies \theta^*\in[\tfrac{\pi}{2},\pi] \implies \operatorname{sen}\theta^*>0$$

entonces,

$$\mu_e \geq \frac{g\operatorname{sen}\theta^*}{g\cos\theta^*+R\omega_0^2}=\frac{g\sqrt{1-\cos^2\theta^*}}{g\cos\theta^*+R\omega_0^2}=\frac{g\sqrt{1-\frac{g^2}{R^2\omega_0^4}}}{\frac{-g^2}{R\omega_0^2}+R\omega_0^2}=\frac{\frac{g}{R\omega_0^2}\sqrt{R^2\omega_0^4-g^2}}{\frac{-g^2}{R\omega_0^2}+R\omega_0^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{R^2\omega_0^4-g^2}}{R^2\omega_0^4-g^2}\cdot g=\frac{g}{\sqrt{R^2\omega_0^4-g^2}}$$

$$\implies \boxed{\mu_e \geq \frac{g}{\sqrt{R^2\omega_0^4-g^2}}}$$