P1) Esfera sólida uniforme

$\rightarrow \rho = Q/(\frac{4}{3}\pi a^3)$

1. Por simetría: $\vec{E} = E(r)\hat{r}$
2. Las dos regiones que hay que considerar:
   i. $r \leq a$ ii. $r > a$
3. Usamos una superficie esférica:

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen}\theta \int_0^{2\pi} d\phi}_{4\pi}\, r^2 E(r) = 4\pi r^2 E$$

$d\vec{S} = r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{r}$

$dV = r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$

4. $\underline{r \leq a}$: La carga encerrada: $Q_V = \int_V dV \rho = \frac{\cancel{3}Q}{\cancel{4\pi} a^3} \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen}\theta \int_0^{2\pi} d\phi}_{\cancel{4\pi}} \underbrace{\int_0^{r} dr\, r^2}_{\frac{r^3}{\cancel{3}}} =$

$$= Q\frac{r^3}{a^3}$$

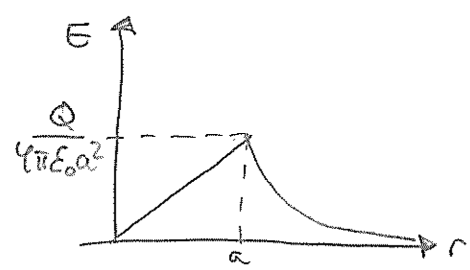
ahora con Gauss: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}$

$$4\pi \cancel{r^2} E = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{\cancel{r^3}}{a^3} \Rightarrow E(r \leq a) = \frac{Q r}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

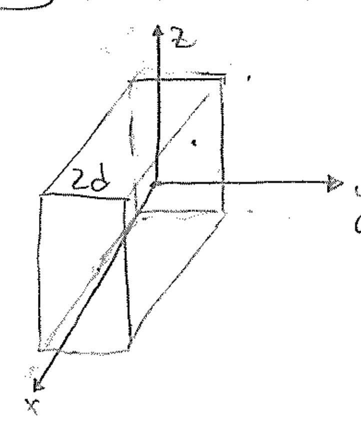
$\underline{r > a}$: La carga encerrada es $Q_V = Q$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r > a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{a^3}\hat{r} & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2} & r > a \end{cases}}$$

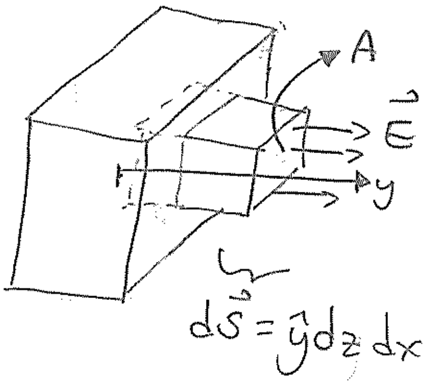


P2) Plano infinito



1. Por simetría: $\vec{E} = E(y)\hat{y}$
2. Las regiones son $|y| \leq d$, $|y| > d$

3. Hacemos un cubo:



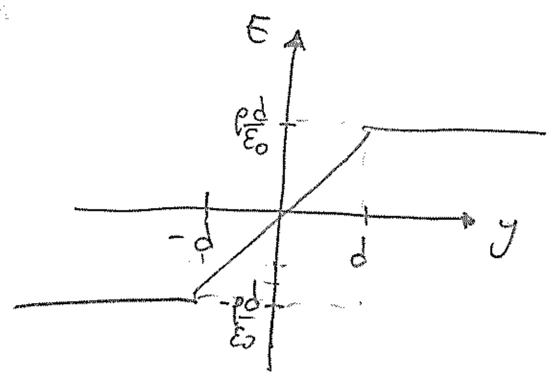
$$\oint E \cdot d\vec{S} = E \cdot A$$

4. $\underline{|y| \leq d}$: $Q_v = \int \rho\, dV = \rho A y \Rightarrow E\cancel{A} = \frac{\rho \cancel{A} y}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(|y| \leq d) = \frac{\rho y}{\varepsilon_0}$

$\underline{|y| > d}$: $Q_v = \int \rho\, dV = \rho A d \Rightarrow E\cancel{A} = \frac{\rho \cancel{A} d}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(|y| > d) = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho y}{\varepsilon_0} & |y| \leq d \\ \frac{\rho d}{\varepsilon_0} & |y| > d \end{cases}}$$

graficando:

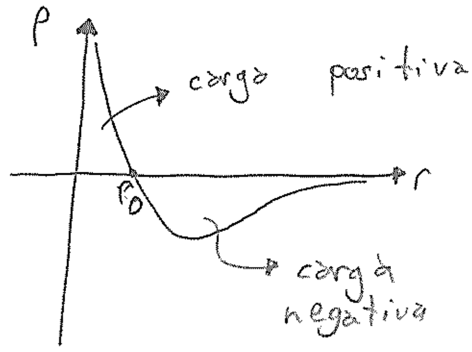


P3) Átomo:

Se tiene una densidad: $\rho(r) = Zq\alpha^2 \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}(1-\alpha r)$. Se busca $\vec{E}$.

esféricas

La densidad:



$\rho(r_0) = 0 \Rightarrow 1-\alpha r_0 = 0$

$\Rightarrow r_0 = \frac{1}{\alpha}$ } el cero de la densidad

Por simetría: $\vec{E} = E(r)\hat{r}$

Usando superficies esféricas como la P1:

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E$$

La carga encerrada:

$$Q_{enc}(r) = \int \rho\, dV = \frac{Zq\alpha^2}{\cancel{4\pi}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta}_{\cancel{4\pi}} \underbrace{\int_0^r dr\, r^{\cancel{2}} \frac{e^{-\alpha r}}{\cancel{r}}(1-\alpha r)}_{I_1 + I_2}$$

las integrales:

- $I_1 = \int_0^r dr\, r e^{-\alpha r} = -\frac{r}{\alpha}e^{-\alpha r}\Big|_0^r + \frac{1}{\alpha}\int_0^r e^{-\alpha r} dr = -\frac{r}{\alpha}e^{-\alpha r} - \frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha r}\Big|_0^r =$

$u = r \quad du = dr$
$v = -\frac{e^{-\alpha r}}{\alpha} \quad dv = e^{-\alpha r} dr$

$$= -\frac{r}{\alpha}e^{-\alpha r} - \frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha r} + \frac{1}{\alpha^2}$$

- $I_2 = -\alpha \int_0^r dr\, r^2 e^{-\alpha r} = -\cancel{\alpha}\left[-\frac{r^2}{\cancel{\alpha}}e^{-\alpha r}\Big|_0^r + \frac{2}{\cancel{\alpha}}\underbrace{\int_0^r dr\, r e^{-\alpha r}}_{I_1}\right] =$

$u = r^2 \quad du = 2r\,dr$

$$= r^2 e^{-\alpha r} - 2I_1$$

$$\Rightarrow I_1 + I_2 = r^2 e^{-\alpha r} - I_1 = r^2 e^{-\alpha r} + \frac{r}{\alpha}e^{-\alpha r} + \frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha r} - \frac{1}{\alpha^2} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha^2}\left[\alpha^2 r^2 + \alpha r + 1 - e^{\alpha r}\right]$$

$$\Rightarrow Q_{enc}(r) = Zq\, e^{-\alpha r}\left[\alpha^2 r^2 + \alpha r + 1 - e^{\alpha r}\right]$$

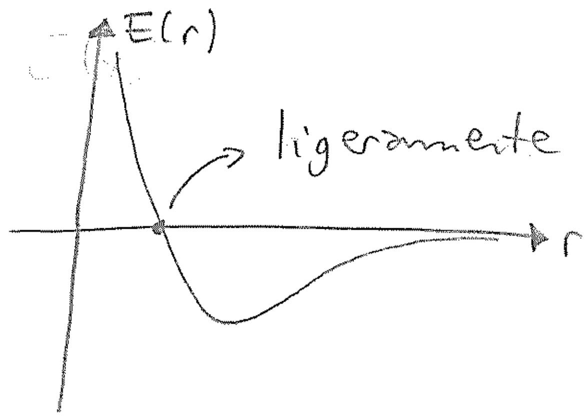
finalmente usando Gauss:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{Zq}{\varepsilon_0} e^{-\alpha r}\left[\alpha^2 r^2 + \alpha r + 1 - e^{\alpha r}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Zq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-\alpha r}}{r^2}\left[\alpha^2 r^2 + \alpha r + 1 - e^{\alpha r}\right]\hat{r}}$$

graficando el campo:



el campo cerca del núcleo va hacia afuera, pues el núcleo es positivo. Al salir del núcleo y entrar a la nube de electrones negativa el campo se vuelve negativo y sus líneas apuntan hacia adentro.

Muy lejos del átomo el campo es cero (o muy cercano a cero), lo que tiene sentido ya que el átomo es neutro y no debería producir un campo fuera de él.