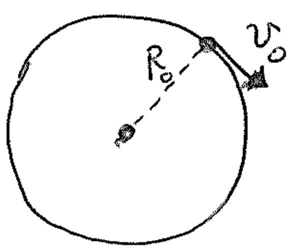
P1)



$\vec{v}_1 = v_0\hat{\phi}$

$\vec{v}_2 = v_0\hat{\phi} + \alpha v_0 \hat{r}$

Encontrar perihelio y afelio

Sol: Primero recordamos la fórmula de una cónica:

$$r(\phi) = \frac{R}{1+e\cos\phi}$$

Para el caso planetario:

$$R = \frac{\ell^2}{GM_m{}^2} \qquad e = \sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{G^2M^2{}_m{}^3}}$$

Dado que sólo R_0 y α son datos, debo obtener una relación entre R_0 y G, M, m.

Cuando aún es una circunferencia:

$$E = \frac{m}{2}v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} \quad , \quad \ell = m r_0 v_0$$

tomando $e=0$:

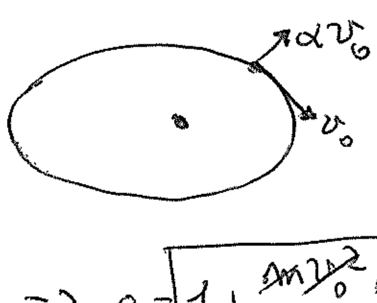
$$0 = 1 + \frac{2E\ell^2}{G^2M^2m^3} = 1 + \frac{mv_0^2 \cdot m^2 r_0^2 v_0^2}{G^2M^2m^3} - 2\frac{\frac{GMm}{r_0}\cdot m^2 r_0^2 v_0^2}{G^2M^2m^3}$$

$$\rightarrow G^2M^2\cancel{m^3} + \cancel{m^3} r_0^2 v_0^4 - 2GM\cancel{m^3} r_0 v_0^2 = 0$$

$$r_0^2 v_0^4 - 2GMr_0 v_0^2 + G^2M^2 = 0$$

$$(r_0 v_0^2 - GM)^2 = 0 \quad \Rightarrow v_0^2 = \frac{GM}{r_0}$$

Ahora la velocidad cambia:



$$E = \frac{m}{2}v_0^2 + \frac{m}{2}\alpha^2 v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} \quad , \quad \ell = m r_0 v_0$$

$$\Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{\cancel{m v_0^2}\,\cancel{m^2 r_0^2 v_0^2}}{\cancel{G^2M^2m^3}}(1+\alpha^2) - \frac{2\cancel{GMm\,m^2 r_0 v_0^2}}{\cancel{G^2M^2m^3}}} = \sqrt{\cancel{1}+\cancel{1}+\alpha^2-\cancel{2}} = \alpha$$

pedimos que $\alpha < 1$.

tomando, $r = \dfrac{R}{1 + e\cos\phi}$, $R = \dfrac{\ell^2}{GMm^2} = \dfrac{\cancel{m^2} r_0^2 v_0^2}{GM\cancel{m^2}} = r_0$

$\rightarrow r_{min} = \dfrac{R}{1+e} \Rightarrow \boxed{\underbrace{r_{min}}_{\text{perihelio}} = \dfrac{r_0}{1+\alpha}}$

$\rightarrow r_{max} = \dfrac{R}{1-e} \Rightarrow \boxed{\underbrace{r_{max}}_{\text{afelio}} = \dfrac{r}{1-\alpha}}$

P2 Demostra 3ra Ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

Sol: Partimos de la 2da Ley:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\ell}{2m}$$

el área total en una órbita:

$$A = \pi ab = \frac{\ell}{2m} T$$

$$a \to \frac{R}{1-e^2} \qquad b \to \frac{R}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{2m}{\ell} \frac{\pi R^2}{(1-e^2)^{3/2}} \Rightarrow T^2 = \frac{4m^2}{\ell^2} \frac{\pi^2 R^4}{(1-e^2)^3}$$

$$R = \frac{\ell^2}{GMm^2}$$

$$\to \quad T^2 = \frac{4\cancel{m^2}}{GM\cancel{m^2}\cancel{R}} \frac{\pi^2 R^{\cancel{4}\,3}}{(1-e^2)^3} = \frac{4\pi^2 R^3}{GM(1-e^2)^3} \quad a^3$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}}$$

P3) La Tierra tiene una órbita circular. La masa del Sol disminuye a la mitad. ¿Qué órbita tendría la Tierra?

Sol: $K = \frac{m}{2}\underbrace{\cancel{\dot{r}^2}}_{0} + \frac{\ell^2}{2mr^2} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$

(circular)

$$U = \frac{-GmM}{r}$$

Newton: $-\cancel{m}r\omega^2 = \frac{-G\cancel{m}M}{r^2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{GM}{r^3}$

La energía cinética

$$K = \frac{m}{2}r^2\omega^2 = \frac{m}{2}\cancel{r^2}\frac{GM}{r^3} = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2}U$$

La energía (inicial):

$$E_i = -\frac{1}{2}U + U = \frac{1}{2}\underbrace{U}_{<0} < 0 \quad \} \text{ (elipse)}$$

Cuando cambia la masa del Sol:

$$K_f = K_i = -\frac{1}{2}U_i = \frac{-U}{2}$$

depende de m, no de M

$$U_F = -G\frac{\frac{M}{2}m}{r} = \frac{U}{2}$$

la nueva energía:

$$E_F = -\frac{1}{2}U + \frac{U}{2} = 0 \quad \Rightarrow \text{órbita parabólica}$$